Sur quelques éléments associés aux points d'une surface.

Considérons, dans l'espace ordinaire, une surface (x) et désignons par U, V les points que représentent les tangentes asymptotiques en un point de la surface (x), sur l'hyperquadrique de l'espace à cinq dimensions représentant les droites de l'espace ordinaire. On sait que les points U, V sont consécutifs dans une suite de Laplace (¹).

$$\ldots, U_i, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_i, \ldots$$

A tout point x de la surface (x) se trouve donc associée une ligne brisée de Laplace. A tout élément géométrique associé à cette ligne correspond donc un élement géométrique associé à la surface (x) au point x.

Dans cette note, nous considérons les quadriques appartenant aux espaces à trois dimensions déterminés par quatre points consécutifs de la ligne brisée et circonscrites au tétraèdre formé par ces points. Il leur correspond des surfaces réglées du quatrième ordre (ou du troisième ordre dans certains cas) associées au point x de la surface (x). Nous établissons quelques propriétés de ces surfaces et en déduisons l'existence de quelques droites liées d'une manière intrinsèque à la surface (²).

(¹) Voir sur ce sujet nos notes : Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-41.)

(²) Nous avons considéré un cas particulier de cette question dans une communication faite au Congrès des Mathématiciens polonais de Wilno (septembre 1931).

1. Soit (x) une surface de l'espace ordinaire S_3, non réglée, n'appartenant pas à un complexe linéaire, rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes d'un point x de cette surface satisfont à un système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles que l'on peut mettre sous la forme (Wilczynski)

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0,$$

les fonctions a, b n'étant pas identiquement nulles.

Si x est un point non parabolique de la surface, les points x, x^{10}, x^{01}, x^{11} ne sont pas dans un même plan et tout point de l'espace a des coordonnées de la forme

$$z_1 x + z_2 x^{10} + z_3 x^{01} + z_4 x^{11};$$

z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées locales de ce point.

Soit Q une hyperquadrique de l'espace S_5 représentant les droites de l'espace S_3. Les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} de la surface (x) sont représentées sur l'hyperquadrique Q par les points U, V et on a

$$U^{10} + 2bV = 0, \qquad V^{01} + 2aU = 0.$$

Les points U, V se succèdent dans une suite de Laplace que nous écrirons

$$\ldots, U_i, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_i, \ldots,$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u.

Les points U_2, U_1, U, V, V_1, V_2 n'appartiennent pas en général â un même hyperplan et tout point de S_5 peut être représenté par

$$\xi_2 U_2 + \xi_1 U_1 + \xi U + \eta V + \eta_1 V_1 + \eta_2 V_2.$$

Les ξ, η sont les coordonnées locales de ce point.

2. Considérons dans l'espace à trois dimensions déterminé par les points U_2, U_1, U, V, les quadriques passant par les droites $U_1 U_2$, UV, VU_1, UU_2. Elles ont pour équations locales

$$\xi\xi_1 + \lambda\eta\xi_2 = 0, \quad \eta_1 = \eta_2 = 0. \tag{1}$$

A la section de Q par une de ces quadriques correspond dans S_3 une surface réglée du quatrième ordre. Mais cette section comprend la droite UV, qui représente le faisceau des tangentes à la surface (x) au point x, faisceau situé dans le plan $z_4 = 0$. Par suite la surface réglée se décompose en le plan $z_4 = 0$ et en une réglée du troisième ordre que nous désignerons par Ψ_v.

A la section de Q par le plan U U_1 U_2 correspond la réglée formée par les génératrices de la quadrique de Lie

$$z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2ab\, z_4^2 = 0$$

s'appuyant sur la droite xx^{01}.

Le plan U_1 U V coupe Q suivant la droite U V comptée deux fois. Par suite à la section de Q par ce plan correspond le faisceau des tangentes en x à la surface (x) compté deux fois. On en conclut que parmi les réglées Ψ_v se trouve la réglée dégénérée

$$z_4 (z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2ab\, z_4^2) = 0. \tag{2}$$

L'espace U_2 U_1 U V touche l'hyperquadrique Q au point V, par suite le plan V U_1 U_2 coupe Q suivant deux droites passant par V et chacune par un des points de rencontre de la droite U_1 U_2 avec Q. A ces droites correspondent dans S_3, des faisceaux de rayons situés dans les plans projetant de la droite xx^{01} les points caractéristiques de la quadrique de Lie, distincts du point x. L'ensemble de ces plans a pour équation locale

$$[2z_2 + z_4 (\log b)^{01}]^2 + \beta z_4^2 = 0,$$

où $$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2).$$

Le plan UVU_2 coupe Q suivant la droite UV et suivant une seconde droite passant par V et par le point de rencontre de la droite UU_2 avec Q, distinct de U. A ce point correspond dans S_3 une droite p_v que l'on peut construire de la manière suivante : La droite UU_2 est la seconde image d'une congruence linéaire dont la première image est l'espace à trois dimensions intersection des hyperplans polaires de $U_1 U_2$ par rapport à Q, c'est-à-dire des hyperplans $U_1 U V V_1 V_2$ et $V V_1 V_2 V_3 V_4$. Le premier de ces hyperplans représente le complexe des droites s'appuyant sur xx^{10}. Le second hyperplan représente le complexe osculateur Γ_v, le long de la droite xx^{01}, à la réglée R_v lieu des tangentes aux courbes v aux points de la courbe u passant par le point x (1). On en conclut que la droite p_v est la conjugée de la droite xx^{10} par rapport au complexe Γ_v. La droite xx^{01} appartenant à ce complexe, elle rencontre la droite p_v.

A la section de Q par le plan UVU_2 correspondent donc le faisceau des tangentes en x à la surface (x) et le faisceau déterminé par les droites p_v et xx^{01}. Le plan de ce dernier faisceau a pour équation locale

$$2z_2 + z_4(\log b^2 h_1)^{01} = 0,$$

où

$$h_1 = -(\log b)^{11} + 4ab.$$

On conclut de ce qui précède que parmi les surfaces Ψ_v se trouve la réglée dégénérée

$$[\{2z_2 + z_4(\log b)^{01}\}^2 + \beta z_4^2][2z_2 + z_4(\log b^2 h_1)^{01}] = 0. \quad (3)$$

(1) Voir notre première note Sur les lignes asymptotiques d'une surface (*loc. cit.*).

Les surfaces Ψ_v forment un faisceau déterminé par les réglées (2) et (3). D'une manière précise, à la quadrique (1) correspond la réglée

$$[\{2z_2 + z_4(\log b)^{01}\}^2 + \beta z_4^2][2z_2 + z_4(\log b^2 h_1)^{01}] \\ - 4\lambda z_4(z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2abz_4^2) = 0.$$

Les surfaces Ψ_v passent doublement par la droite xx^{01} (ou $z_2 = 0$, $z_3 = 0$), une nappe touchant le plan $z_4 = 0$, l'autre nappe la quadrique de Lie le long de cette droite. Le point x est double biplanaire pour ces surfaces.

La base du faisceau des surfaces Ψ_v est constituée par la droite xx^{01} comptée six fois et par les trois droites suivant lesquelles les plans (3) coupent la quadrique de Lie en dehors de xx^{01}.

La considération des quadriques

$$\eta\eta_1 + \mu\xi\eta_2 = 0, \qquad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0$$

conduit de même aux surfaces Ψ_u d'équation

$$[\{2z_3 + z_4(\log a)^{10}\}^2 + \alpha z_4^2][2z_3 + z_4(\log a^2 k_1)^{10}] \\ - 4\mu z_4(z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2abz_4^2) = 0,$$

passant doublement par la droite xx^{10}, où l'on a posé

$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1), \quad k_1 = -(\log a)^{11} + 4ab.$$

3. Parmi les quadriques (1) se trouvent les quadriques de Tzitzeica (1). L'une de ces quadriques est définie par la condition d'osculer au point V la courbe v tracée sur la surface (V); elle correspond à la valeur $\lambda = 6a$ du paramètre λ.

La seconde quadrique de Tzitzeica est définie par la

(1) Tzitzeica, Sur certaines congruences (*C. R.*, 1926, t. 182, pp. 952-954); Sur une nouvelle classe de congruences (*C. R.*, 1926, t. 182, pp. 1071-1073).

condition d'osculer au point U_2 la courbe u tracée sur la surface (U_2) ; elle correspond à la valeur de λ donnée par

$$2b\lambda - 3h_2 = 0,$$

où

$$h_2 = -(\log b^2 h_1)^{11} + 4ab.$$

A une courbe v tracée sur la surface (V) correspond, dans S_3, la développable S_v engendrée par les tangentes à la courbe v correspondante sur la surface (x). Par conséquent, à la première quadrique de Tzitzeica correspond la surface Ψ_v, d'équation

$$\left.\begin{aligned}&[\{2z_2 + z_4(\log b)^{01}\}^2 + \beta z_4^2][2z_2 + z_4(\log b^2 h_1)^{01}]\\&\quad - 24az_4(z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2ab\, z_4^2) = 0,\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

ayant un contact du troisième ordre, le long de la droite xx^{01}, avec la développable S_v, lieu des tangentes à la courbe v de la surface (x), passant par le point x.

En intervertissant les rôles de u, v, on obtient de même la surface Ψ_u, d'équation

$$\left.\begin{aligned}&[\{2z_3 + z_4(\log a)^{10}\}^2 + \alpha z_4^2][2z_3 + z_4(\log a^2 k_1)^{10}]\\&\quad - 24bz_4(z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2ab\, z_4^2) = 0,\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

ayant un contact du troisième ordre le long de la droite xx^{10} avec la développable S_u dont l'arète de rebroussement est l'asymptotique u de la surface (x), passant par le point x.

Les surfaces (4) et (5) ont en commun une courbe du neuvième ordre ayant un point sextuple en x.

Les six tangentes en ce point sont les tangentes de Segre

$$az_3^3 - bz_2^3 = 0$$

à la surface (x) comptées chacune deux fois.

La seconde quadrique de Tzitzeica dont il est question plus haut fournit également une réglée Ψ_v. On obtient de même une réglée particulière Ψ_u en donnant à μ la valeur

$$2a\mu - 3k_2 = 0,$$

avec

$$k_2 = -(\log a^2 k_1)^{11} + 4ab.$$

Les surfaces Ψ_v ont au point x, un contact du cinquième ordre avec l'asymptotique v passant par ce point. Il existe une surface Ψ_v ayant un contact du sixième ordre avec cette asymptotique, elle est donnée par $\lambda = 6a$. De même, la surface Ψ_u ayant un contact du sixième ordre avec l'asymptotique u, au point x, est donnée par $\lambda = 6b$.

4. Nous avons appelé R_v la réglée lieu des tangentes aux courbes u aux points d'une courbe v. Par un point x de (x) passant deux surfaces R_v, R_u définies par les asymptotiques u, v issues de ce point. Soient Γ_v, Γ_u les complexes linéaires osculateurs respectivement à ces surfaces R_v, R_u le long des génératrices xx^{01}, xx^{10} de ces surfaces. La conjuguée de la droite xx^{10} par rapport au complexe Γ_v est une droite p_v d'équations locales

$$2z_2 + z_4(\log b^2 h_1)^{01} = 0,$$
$$2z_1 + z_3(\log b^2 h_1)^{01} + 4ab\, z_4 = 0.$$

La conjuguée p_u de la droite xx^{01} par rapport au complexe Γ_u a pour équations locales

$$2z_3 + z_4(\log a^2 k_1)^{10} = 0,$$
$$2z_1 + z_2(\log a^2 k_1)^{10} + 4ab\, z_4 = 0.$$

La quadrique de Lie relative au point x portant les hyperboloïdes osculateurs aux réglées R_v, R_u le long des tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01}, les droites p_u, p_v appartiennent à cette quadrique et se rencontrent. La droite l projetant du point x ce point de rencontre a pour équations locales

$$\frac{z_2}{(\log b^2 h_1)^{01}} = \frac{z_3}{(\log a^2 k_1)^{10}} = \frac{z_4}{-2}. \qquad (l)$$

La droite l' joignant les points où les droites p_u, p_v rencontrent respectivement les tangentes xx^{10}, xx^{01}, a pour équations locales

$$2z_1 + z_2(\log a^2 k_1)^{10} + z_3(\log b^2 k_1)^{01} = 0, \; z_4 = 0. \qquad (l')$$

Les droites l, l' sont évidemment conjuguées par rapport à la quadrique de Lie.

L'équation différentielle des développables de la congruence (l) est

$$\begin{aligned}\big[2(\log a^2 k_1)^{20} + \overline{(\log a^2 k_1)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1) - 4b(\log b h_1)^{01}\big] du^2 + 2(h_2 - k_2)\, du\, dv \\ - \big[2(\log b^2 h_1)^{02} + \overline{(\log b^2 h_1)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2) - 4a(\log a k_1)^{10}\big] dv^2 = 0,\end{aligned}$$

et celle de la congruence (l'),

$$\begin{aligned}\big[2(\log a^2 k_1)^{20} + \overline{(\log a^2 k_1)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1) + 4b(\log b h_1)^{01}\big] du^2 + 2(h_2 - k_2)\, du\, dv \\ - \big[2(\log b^2 h_1)^{02} + \overline{(\log b^2 h_1)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2) + 4a(\log a k_1)^{10}\big] dv^2 = 0.\end{aligned}$$

5. Considérons l'espace à trois dimensions déterminé par les points U, U_1, U_2, U_3 et les quadriques de cet espace passant par les droites UU_1, U_2U_3, UU_2, U_1U_3. Ces quadriques forment un faisceau déterminé par la quadrique formée des plans UU_1U_2, $U_1U_2U_3$ et par la quadrique formée des plans UU_1U_3, UU_2U_3. A ces quadriques correspondent dans S_3 des surfaces réglées du quatrième ordre, que nous désignerons par Θ_v et que nous allons étudier.

Observons tout d'abord que l'espace $UU_1U_2U_3$ est le conjugué, par rapport à l'hyperquadrique Q, de la droite V_1V_2. Par suite, si c_{11}, c_{12} désignent les droites de S_3

représentées par les points d'intersection de Q et de la droite V_1V_2, l'intersection de Q et de l'espace $UU_1U_2U_3$ représente la congruence linéaire ayant pour directrices les droites c_{11}, c_{12}. Il en résulte que les surfaces Θ_v appartiennent à cette congruence et passant doublement par les droites c_{11}, c_{12}. Les surfaces Θ_v forment un faisceau.

Le plan UU_1U_2 représente la réglée ayant comme support la quadrique de Lie Φ et contenant la génératrice xx^{10}. Le plan $U_1U_2U_3$ représente la réglée ayant comme support la quadrique Φ_1 (1) et contenant deux droites de la réglée rencontrée précédemment. Par suite l'ensemble des quadriques Φ, Φ_1 constitue une surface Θ_v particulière.

Le plan UU_2U_3 représente une réglée ayant pour support la quadrique passant par la droite xx^{10}, par la c_{11}, c_{12} et par les droites d_{21}, d_{22} représentées sur Q par les points de rencontre de la droite U_2U_3 avec Q. De plus, cette réglée contient la droite p_v. Le plan UU_1U_3 représente une réglée ayant pour support une quadrique passant par les droites c_{11}, c_{12} et touchant la quadrique de Lie Φ le long de la droite xx^{10}. L'ensemble de ces deux quadriques constitue une seconde surface Θ_v particulière.

6. Pour arriver à former l'équation des surfaces Θ_v, observons que l'équation de la quadrique de Lie Φ, en coordonnées générales, peut s'écrire (2).

$$\Phi \equiv \Sigma\, x_i x_k \begin{vmatrix} U \\ U_1 \\ U_2 \end{vmatrix} = 0.$$

(1) Voir notre première note Sur les lignes asymptotiques... (*loc. cit.*).

(2) Voir notre seconde note Sur les lignes asymptotiques (*loc. cit.*).

En dérivant par rapport à v le premier membre de cette équation, on trouve

$$\Phi^{01} \equiv \Sigma x_i x_k \begin{vmatrix} U \\ U_1 \\ U_2 \end{vmatrix} (\log b^3 h_1^2 h_2)^{01} + \Sigma x_i x_k \begin{vmatrix} U \\ U_1 \\ U_3 \end{vmatrix}.$$

Il en résulte que la quadrique qui correspond un plan $U U_1 U_3$ peut être représentée par

$$\Phi^{01} - \Phi (\log b^3 h_1^2 h_2)^{01} = 0.$$

L'équation de la quadrique Φ_1, en coordonnées générales, peut s'écrire

$$\Phi_1 \equiv \Sigma x_i x_k \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En dérivant par rapport à u le premier membre de cette équation, on a

$$\Phi_1^{10} \equiv h_1 \Sigma x_i x_k \begin{vmatrix} U \\ U_2 \\ U_3 \end{vmatrix}.$$

On peut donc représenter l'équation de la quadrique qui correspnd au plan $U U_2 U_3$ par

$$\Phi_1^{10} = 0.$$

Cela étant, l'équation d'une surface Θ_v peut s'écrire

$$\Phi^{01} \Phi_1^{10} - \Phi \Phi_1^{10} (\log b^3 h_1^2 h_2)^{01} + \lambda \Phi \Phi_1 = 0. \qquad (6)$$

7. Pour obtenir d'une manière explicite l'équation de la surface Θ_v, prenons comme nouveau tétraèdre de référence celui qui a pour arêtes les directrices de Wilczynki, les tangentes asymptotiques et les droites joignant le second point de rencontre de la première directrice de

Wilczynski et de la quadrique de Lie, avec les points où la seconde directrice de Wilczynski coupe les tangentes asymptotiques. Si y_1, y_2, y_3, y_4 sont les coordonnées d'un point par rapport à ce tétraèdre, on a

$$\begin{aligned}
\rho y_1 &= 4 z_1 + 2 z_2 (\log a)^{10} + 2 z_3 (\log b)^{01} + [8ab + (\log a)^{10} (\log b)^{01}]\, z_4,\\
\rho y_2 &= 2 z_2 + z_4 (\log b)^{01},\\
\rho y_3 &= 2 z_3 + z_4 (\log a)^{10},\\
\rho y_4 &= z_4.
\end{aligned}$$

On trouve aisément les relations

$$\begin{aligned}
\rho y_1^{10} &= -\frac{1}{2} y_1 (\log a)^{10} + \frac{1}{2} \alpha y_2 - h_1 y_3 - 2b\beta y_4,\\
\rho y_2^{10} &= -\frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2 (\log a)^{10} - h_1 y_4,\\
\rho y_3^{10} &= 2by_2 - \frac{1}{2} y_3 (\log a)^{10} + \frac{1}{2} \alpha y_4,\\
\rho y_4^{10} &= -\frac{1}{2} y_3 + \frac{1}{2} y_4 (\log a)^{10}.
\end{aligned}$$

On a

$$y_1 y_4 - y_2 y_3 = 4\Phi;$$

l'équation de la quadrique Φ_1 est d'autre part (¹).

$$\Phi_1 \equiv y_1^2 + \alpha y_2^2 + \beta y_3^2 + \alpha\beta y_4^2 + \frac{1}{2a}\beta (\log b^2 \beta)^{01} (y_1 y_4 - y_2 y_3) = 0.$$

En tenant compte de la relation

$$a\alpha^{10} + 2\alpha a^{10} = b\beta^{01} + 2\beta b^{01},$$

on trouve

$$\Phi_1^{10} = -\Phi_1 (\log a)^{10} - \frac{2\beta^{10}}{a} \Phi^{01} - \frac{4 h_1 \beta_1}{a} \Phi - 2h_1 (y_1 y_3 - \alpha y_2 y_4),$$

(¹) Cf. notre note Sur les quadriques de Darboux d'une surface (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 1930, pp. 1195-1205).

où l'on a posé

$$\beta_1 = (\log bh_1)^{02} + (\log bh_1)^{01} (\log b^2 h_1)^{01} + \beta.$$

On a

$$2\Phi^{01} + a\,(y_3^2 + \alpha y_4^2) = 0.$$

Il suffira de faire les substitutions convenables dans l'équation (6) pour obtenir l'équation de la surface Θ_v.

Les surfaces Θ_v passent simplement par la tangente asymptotique xx^{10} et touchent la quadrique de Lie le long de cette droite. Les surfaces Θ_v ont un contact du second ordre avec l'asymptotique u au point x ; une d'entre elles a un contact du troisième ordre avec cette courbe ; elle correspond à la valeur

$$\lambda = -(\log a)^{10} (\log b^3 h_1^2 h_2)^{01}.$$

Cette surface admet comme droite double la droite xx^{10}.

On peut définir, d'une manière symétrique, des surfaces réglées du quatrième ordre, Θ_u, d'équation

$$\Phi^{10}\,\Phi_1^{01} - \Phi\,\Phi_1^{01} (\log a^3 k_1^2 k_2)^{10} + \mu\,\Phi\,\Phi_1 = 0, \tag{6'}$$

passant doublement par les droites représentées sur Q par les points de rencontre de la droite $U_1 U_2$ avec cette hyperquadrique, et touchant la quadrique de Lie le long de la droite xx^{01}.

8. On peut également considérer, dans l'espace à trois dimensions $U_n\,U_{n+1}\,U_{n+2}\,U_{n+3}$, les quadriques passant par les droites $U_n U_{n+1}$, $U_{n+2} U_{n+3}$, $U_n\,U_{n+2}$, $U_{n+1}\,U_{n+3}$. Elles donnent lieu, dans l'espace S_3, à des surfaces réglées du quatrième ordre ayant comme droites doubles les droites représentées sur Q par les points où la droite $V_{n+1}\,V_{n+2}$ coupe cette hyperquadrique.

Si l'on représente par Φ_i le premier membre de l'équation de la quadrique de S_3 représentée dans S_5 par les sections de Q par les plans conjugées $U_i U_{i+1} U_{i+2}$, $V_i V_{i+1} V_{i+2}$, l'équation des surfaces réglées est

$$\Phi_{n+1}^{10}\left[\Phi_n^{01} - \Phi_n (\log b^3 h_1^3 \ldots h_n^3 h_{n+1}^2 h_{n+2})^{01}\right] + \lambda \Phi_n \Phi_{n+1} = 0. \quad (7)$$

On obtient, d'une manière symétrique, des réglées du quatrième ordre d'équation

$$\Phi_{n+1}^{01}\left[\Phi_n^{10} - \Phi_n (\log a^3 k_1^3 \ldots k_n^3 k_{n+1}^2 k_{n+2})^{10}\right] + \mu \Phi_n \Phi_{n+1} = 0. \quad (8)$$

Parmi les quadriques de l'espace $U_n U_{n+1} U_{n+2} U_{n+3}$ considérées, se trouvent les deux quadriques de Tzitzeica : l'une a un contact du troisième ordre au point U_n avec la courbe v tracée sur la surface (U_n), l'autre a un contact du troisième ordre au point U_{n+3} avec la courbe u tracée sur la surface (U_{n+3}). Les réglées correspondantes sont obtenues en posant respectivement $\lambda = -3\, h_{n+1}$, $\lambda = -3\, h_{n+3}$ dans l'équation (7).

En posant $\mu = -3\, k_{n+1}$ ou $\mu = -3\, k_{n+3}$ dans l'équation (8), on obtiendra des réglées analogues.

Revenons aux surfaces Θ_v, Θ_u en posant $n = 0$. Pour $\lambda = -3\, h_1$, l'équation (6) représente une surface réglée ayant, avec la surface R_u, le long de la droite xx^{10}, un contact du troisième ordre. De même, pour $\mu = -3\, k_1$, l'équation (6') représente une surface réglée ayant, avec la surface R_v, le long de la droite xx^{10}, un contact du troisième ordre.

9. Les surfaces réglées Θ_v, Θ_u dont il vient d'être question et qui correspondent respectivement aux valeurs $\lambda = -3\, h_1$, $\mu = -3\, k_1$, sont définies d'une manière intrinsèque. Ces deux surfaces touchent, au point x, le plan tangent $y_4 = 0$. Les tangentes au point x aux sections de ces surfaces par le plan $y_4 = 0$, et les tangentes communes aux deux surfaces, sont définies d'une manière intrinsèque.

La surface

$$\Phi_1^{10}\lfloor\Phi^{01}-\Phi(\log b^3h_1^2h_2)^{01}]-3h_1\Phi\Phi_1=0 \tag{9}$$

admet comme tangentes à sa section par le plan $y_4=0$, au point x, la droite xx^{10} et la droite

$$y_2[3h_1-(\log a)^{10}(\log b^3h_1^2h_2)^{01}]+2a\,y_3(\log a)^{10}=0, y_4=0.$$

En partant de la surface

$$\Phi_1^{01}\lfloor\Phi^{10}-\Phi(\log a^3k_1^2k_2)^{10}|-3k_1\Phi\Phi_1=0, \tag{10}$$

on obtient de même la droite

$$y_3[3k_1-(\log b)^{01}(\log a^3k_1^2k_2)^{10}]+2by_2(\log b)^{01}=0, y_4^*=0.$$

Enfin, les surfaces (9) et (10) ont en commun une courbe dont les tangentes au point x sont

$$\begin{vmatrix} (\log a)^{10}(\log b^3h_1^2h_2)^{01}-3h_1 & a(\log a)^{10}y_3^2 \\ (\log b)^{01}(\log a^3k_1^2k_2)^{10}-3k_1 & b(\log b)^{01}y_2^2 \end{vmatrix}=0, \quad y_4=0.$$

Ces droites partagent harmoniquement le couple formé par les deux autres droites, ainsi que le couple des tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01}.

Liége, le 20 octobre 1931.