ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XVII, no 12.
Séance du 5 décembre 1931, p. 1356-1364.

Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique,

par LUCIEN GODEAUX, correspondant de la Classe.

(*Troisième communication.*)

Poursuivant nos recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique ne possédant qu'un nombre fini de points unis [1] et sur les singularités des surfaces normales, images de ces involutions, aux points de diramation, nous allons, dans cette troisième note, considérer un cas particulier présentant un certain intérêt. L'exemple le plus simple des involutions considérées est constitué par les involutions engendrées par les homographies non homologiques, cycliques, du plan; la variété des singularités que présentent, aux points de diramation, les surfaces images de ces involutions [2] montre la nature des difficultés que l'on rencontre dans la résolution du problème dans le cas général. Dans ce travail, nous considérons un cas fort simple, celui de

(1) Les deux premières communications ont paru dans le *Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 1930, pp. 450-467; 1931, pp. 1131-1150.

(2) Voir nos trois notes Sur les homographies planes cycliques (*Mémoires de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1929, 3e série, t. XV, pp. 1-26); Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies cycliques (*idem*, 1930, 3e série, t. XVI, pp. 1-21); Sur les courbes tracées sur la surface représentant l'involution engendrée par une homographie plane cyclique (*idem*, pp. 1-14).

l'involution engendrée par l'homographie de période 11 du plan,

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^3 x_3,$$

ε étant une racine primitive onzième de l'unité. On peut prendre, comme surface normale image de cette involution, une surface du onzième ordre, située dans un espace linéaire à sept dimensions. Le point de diramation qui correspond au point uni $(x_2 = x_3 = 0)$ est multiple d'ordre cinq pour la surface image, A ce point sont infiniment voisins successifs deux points simples suivis d'un point double conique, et c'est ce qui fait l'intérêt de la question traitée. Nous montrons d'ailleurs la genèse de cette singularité.

Ajoutons que l'on pourrait, par la même méthode, étudier le cas d'une involution d'ordre premier $p = 6m + 5$; on parviendrait à une singularité analogue, l'homographie génératrice de l'involution étant toujours représentée par les mêmes formules, ε étant cette fois une racine primitive d'ordre p de l'unité.

1. Considérons, dans un plan ϖ, l'homographie cyclique de période onze,

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^3 x_3, \tag{1}$$

où ε est une racine primitive onzième de l'unité. Cette homographie engendre une involution I_{11}, d'ordre 11, possédant comme points unis les points $O_1(1, 0, 0)$, $O_2(0, 1, 0)$, $O_3(0, 0, 1)$.

Le système linéaire complet formé par les courbes d'ordre 11 contient 11 systèmes linéaires composés au moyen de I_{11}. Un seul d'entre eux est dépourvu de points-base et a la dimension sept. Son équation s'écrit

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 x_1^{11} + \lambda_1 x_1^6 x_2^2 x_3^3 + \lambda_2 x_1^4 x_2^5 x_3^2 + \lambda_3 x_1^2 x_2^8 x_3 + \lambda_4 x_2^{11} \\ + \lambda_5 x_1^3 x_2 x_3^7 + \lambda_6 x_1 x_2^4 x_3^6 + \lambda_7 x_3^{11} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Nous désignerons ce système par $|C_0|$. En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire S_7 à sept dimensions, nous obtiendrons une surface Φ, normale, d'ordre 11, image de l'involution I_{11}.

Désignons par $X_0, X_1, \ldots, X_7$, les coordonnées projectives de S_7 et établissons la projectivité dont il vient d'être question en faisant correspondre à la courbe (2) l'hyperplan

$$\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_6 X_6 + \lambda_7 X_7 = 0.$$

Les équations de Φ sont alors

$$\left\| \begin{matrix} X_0X_5 & X_1 & X_2 & X_3 & X_5 & X_2X_7 \\ X_1^2 & X_2 & X_3 & X_4 & X_6 & X_6^2 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Au point uni O_1 correspond, sur la surface Φ, le point de diramation O_0' $(1, 0, 0, \ldots, 0)$. Nous allons étudier la singularité de la surface Φ en ce point.

2. Appelons C_1 les courbes C_0 passant par le point O_1; elles sont représentées par l'équation (2) où l'on pose $\lambda_0 = 0$. Les courbes C_1 sont rapportées projectivement aux hyperplans de l'espace $X_0 = 0$ et cette projectivité donne, dans cet espace, une surface Φ_1 projection, à partir du point O_0', de la surface Φ. Aux courbes C_1 correspondent, sur cette surface Φ, les sections Γ_1 faites par les hyperplans passant par O_0'.

Pour étudier la singularité des courbes C_1 au point O_1, nous utiliserons la transformation quadratique

$$x_1 : x_2 : x_3 = y_1^2 : y_1y_2 : y_2y_3, \tag{I}$$

qui fait correspondre au point O_{12} infiniment voisin de O_1 sur la droite $x_3 = 0$, le point $y_2 = y_3 = 0$, et la transformation quadratique

$$x_1 : x_2 : x_3 = y_1^2 : y_2y_3 : y_1y_3, \tag{II}$$

qui fait correspondre au point O_{13}, infiniment voisin de O_1 sur la droite $x_2 = 0$, le point $y_2 = y_3 = 0$.

En appliquant deux fois de suite la transformation (I) aux courbes C_1, on obtient les courbes

$$y_1^{22}(\lambda_1 y_3^3 + \lambda_2 y_2 y_3^2 + \lambda_3 y_2^2 y_3 + \lambda_4 y_2^3) + y_1^{11} y_2^7 y_3^6 (\lambda_5 y_3 + \lambda_6 y_2) + \lambda_7 y_2^{14} y_3^{11} = 0. \tag{3}$$

En appliquant trois fois de suite la transformation (II) aux courbes C_1, on obtient

$$y_1^{33}(\lambda_1 y_2^2 + \lambda_5 y_2 y_3 + \lambda_7 y_3^2) + y_1^{22} y_2^4 y_3^8 (\lambda_2 y_2 + \lambda_6 y_3) + \lambda_3 y_1^{11} y_2^8 y_3^{16} + \lambda_4 y_2^{11} y_3^{24} = 0. \tag{4}$$

Les courbes C_1 ont en O_1 un point quintuple auquel sont infiniment voisins dans une direction deux points triples successifs, que nous désignerons par O_{12}, O_{122} et, dans autre direction, trois points doubles successifs, que nous désignerons par O_{13}, O_{133}, O_{1333}. Le système $|C_1|$ a donc le degré 66 et la surface Φ_1 l'ordre six. Le point O'_0 est multiple d'ordre cinq pour la surface Φ.

Dans l'équation (3), posons $y_3 = \lambda y_2$. On a

$$\frac{X_1}{y_1^{22}\lambda^3} = \frac{X_2}{y_1^{22}\lambda^2} = \frac{X_3}{y_1^{22}\lambda} = \frac{X_4}{y_1^{22}} = \frac{X_5}{y_1^{11}y_2^{11}\lambda^7} = \frac{X_6}{y_1^{11}y_2^{11}\lambda^6} = \frac{X_7}{y_2^{22}\lambda^{11}}.$$

En faisant tendre y_2 vers zéro, on obtient

$$\frac{X_1}{\lambda^3} = \frac{X_2}{\lambda^2} = \frac{X_3}{\lambda} = \frac{X_4}{1}, \qquad X_5 = X_6 = X_7 = 0. \tag{5}$$

On voit donc qu'aux points infiniment voisins du point O_{122} correspondent les points de la surface Φ, infiniment voisins de O'_0 situés sur le cône cubique (5).

De même, aux points du plan ϖ, infiniment voisins du point O_{1333}, correspondent les points de la surface Φ, infiniment voisins de O'_0, situés sur le cône du second ordre

$$\frac{X_1}{1} = \frac{X_5}{\lambda} = \frac{X_7}{\lambda^2}, \qquad X_2 = X_3 = X_4 = X_6 = 0. \tag{6}$$

Aux points du plan ϖ, infiniment voisins de O_{122}, correspondent, sur la surface Φ_1, les points de la cubique gauche γ_1, section du cône (5) par $X_0 = 0$,

$$\left\| \begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_2 & X_3 & X_4 \end{matrix} \right\| = 0, \qquad X_0 = X_5 = X_6 = X_7 = 0. \qquad (\gamma_1)$$

Aux points de ϖ, infiniment voisins de O_{1333}, correspondent, sur Φ_1 les points de la conique γ_2, d'équations

$$X_5^2 - X_1X_7 = 0, \qquad X_0 = X_2 = X_3 = X_4 = X_6 = 0, \qquad (\gamma_2)$$

section du cône (6) pour l'hyperplan $X_0 = 0$.

Les courbes γ_1 et γ_2 ont en commun le point $O'_1 (0, 1, 0, \ldots, 0)$.

3. Les courbes C_1 soumises à la condition d'avoir en O_1 une tangente distincte des droites $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ sont représentées par l'équation (2) où l'on pose $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0$. Nous les désignerons par C_2. Il existe une projectivité entre les courbes C_2 et les hyperplans de l'espace $X_0 = X_1 = 0$; au plan ϖ correspond, dans cette projectivité, une surface Φ_2, projection de la surface Φ_1 à partir de O'_1 sur l'hyperplan $X_1 = 0$ de l'espace $X_0 = 0$.

Les courbes C_2 ont en O_1 la multiplicité sept. En utilisant les transformations (I) et (II), on voit que ces courbes ont en commun, dans le voisinage de O_1 :

Deux points doubles infiniment voisins successifs O_{12}, O_{122};

Un point double O_{13} infiniment voisin de O_1 auquel sont infiniment voisins successifs dans une direction deux points simples O_{133}, O_{1333}; dans une seconde direction, trois points simples que nous désignerons par O_{132}, O_{1322}, O_{13222}.

Le système $|C_2|$ a donc le degré 11×5 et la surface Φ_2 a l'ordre cinq. Le point O'_1 est donc simple pour la surface Φ_1.

Aux points du plan ϖ, infiniment voisins de O_{122}, correspondent, sur la surface Φ_2, les points de la conique γ'_1, d'équations

$$X_3^2 - X_2X_4 = 0, \qquad X_0 = X_1 = X_5 = X_6 = X_7 = 0, \qquad (\gamma'_1)$$

projection, à partir de O'_1, de la cubique gauche γ_1.

Aux points du plan ϖ, infiniment voisins de O_{1333}, correspondent, sur la surface Φ_2, les points de la droite γ'_2, d'équations

$$X_0 = X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X_6 = 0, \qquad (\gamma'_2)$$

projection de la conique γ_2 à partir de O'_1,

Enfin, aux points du plan ϖ, infiniment voisins de O_{13222}, correspondent sur Φ_2 les points de la droite γ_3, d'équations

$$X_0 = X_1 = X_3 = X_4 = X_6 = X_7 = 0. \qquad (\gamma_3)$$

Le plan tangent à la surface Φ_1 en O'_1 est le plan projetant la droite γ_3 à partir de O'_1.

La conique γ'_1 et la droite γ'_2 ne se rencontrent pas, mais la droite γ_3 coupe la conique γ'_1 au point O'_2 (0, 0, 1, 0, ..., 0) et la droite γ'_2 au point O'_5 (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0).

4. Les courbes C_2 soumises à la condition d'avoir une tangente distincte des droites $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ au point O_1 sont représentées par l'équation (2) où l'on pose $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$; nous les désignerons par C_3. A ces courbes correspondent dans l'espace

$$X_0 = X_1 = X_2 = 0$$

les sections hyperplanes de la surface Φ_3, projection à partir de O'_0 de la surface Φ_2 sur cet espace.

Les courbes C_3 ont en O_1 la multiplicité huit. Dans le voisinage de ce point, elles ont en commun :

Un point double O_{12}, infiniment voisin de O_1;

Un point simple O_{122}, infiniment voisin O_{12};

Cinq points simples, que nous désignerons par $O_{123}, \dots, O_{1233333}$, infiniment voisins successifs du point O_{12};

Trois points simples O_{13}, O_{133}, O_{1333}, infiniment voisins successifs de O_1,

Le système $|C_3|$ a donc le degré 11×4 et la surface Φ_3 a l'ordre quatre. Le point O'_2 est donc simple pour la surface Φ_2.

Aux points du plan ϖ, infiniment voisins du point O_{122}, correspondent, sur la surface Φ_3, les points de la droite γ''_1, d'équations

$$X_0 = X_1 = X_2 = X_5 = X_6 = X_7 = 0, \qquad (\gamma''_1)$$

projection, à partir de O'_2, de la conique γ'_1.

Aux points de ϖ, infiniment voisins de O_{1333}, correspondent, sur Φ_3, les points de la droite γ'_2, d'équations

$$X_0 = X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X_6 = 0, \qquad (\gamma'_2)$$

qui, appartenant déjà à Φ_2, est sa propre projection de O'_2.

Aux points de ϖ, infiniment voisins de $O_{1233333}$, correspondent, sur Φ_3, les points de la droite γ_4, d'équations

$$X_0 = X_1 = X_2 = X_4 = X_6 = X_7 = 0. \qquad (\gamma_4)$$

5. Les courbes C_3 assujetties à avoir en O_1 une tangente distincte des droites $x_2=0$, $x_3=0$ sont représentées par l'équation (2), où l'on pose $\lambda_0=0$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_5=0$. Nous les désignerons par C_4. Aux courbes C_4 correspondent projectivement les sections hyperplanes de la surface Φ_4, appartenant à l'espace

$$X_0 = X_1 = X_2 = X_5 = 0,$$

projection, sur cet espace, de la surface Φ_3 à partir du point O'_5. La surface Φ_4 a pour équation

$$X_6^2 = X_3 X_7. \qquad (7)$$

Les courbes C_4 ont en O_1 la multiplicité neuf. Dans le voisinage de ce point, elles ont en commun :

Deux points simples O_{12}, O_{122}, infiniment voisins successifs de O_1 ;

Quatre points doubles O_{13}, O_{132}, O_{1322}, O_{13222}, infiniment voisins successifs de O_1.

Le système $|C_4|$ a le degré 11×2 et la surface Φ_4 a donc bien l'ordre deux, comme on le savait déjà par l'équation (7). Le point O'_5 est donc double pour la surface Φ_3.

Aux points du plan ϖ, infiniment voisins du point O_{122}, correspondent, sur la surface Φ_4, les points de la droite γ''_1 d'équations

$$X_0 = X_1 = X_2 = X_5 = X_6 = X_7 = 0. \qquad (\gamma''_1)$$

Aux points du plan ϖ, infiniment voisins du point O_{13222}, correspondent les points de la conique γ'_3, d'équations

$$X_6^2 - X_3X_7 = 0, \qquad X_0 = X_1 = X_2 = X_4 = X_5 = 0. \qquad (\gamma'_3)$$

Le cône tangent à la surface Φ_3 au point O'_5 est le cône projetant de ce point la conique γ'_3.

Nous trouvons donc que l'entourage du point O_{13222} du plan ϖ est représenté par la droite γ_3 sur la surface Φ_2 et par la conique γ'_3 sur la surface Φ_4. Il faut donc que, dans les projections que nous avons faites, la conique γ'_3 corresponde à la droite γ_3. Effectivement dans le passage de Φ_2 à Φ_3, la droite γ_3 est projetée à partir de O'_2, en O'_5, dont le voisinage représente donc, sur Φ_3, les points de γ_3. Or, la conique γ'_3 représente également le voisinage de O'_5 sur Φ_3.

Le point O'_5 est simple pour la surface Φ_2. Pour le démontrer, considérons les courbes C_2 pour lesquelles on a $\lambda_5 = 0$ et désignons-les par C'_2. Les courbes C'_2 ont en O_1 la même multiplicité sept que les courbes C_2. Dans le voisinage de O_1, elles ont en commun :

Deux points doubles O_{12} et O_{122}, infiniment successifs de O_1 ;

Un point quadruple O_{13}, infiniment voisin de O_1, auquel font suite quatre points simples successifs dont le premier est O_{132} et dont nous désignerons les autres par O_{1323}, O_{13233}, O_{132333}.

Le système $|C_2'|$ a donc le degré 11×4. Aux courbes C_2' correspondent les sections de la surface Φ_2 par les hyperplans passant par O_5'. Ces sections forment un système linéaire de degré quatre et, comme Φ_2 est d'ordre cinq, O_5' est simple pour cette surface. Celles de ces sections qui sont faites par des hyperplans passant en outre par O_2', sont formées de la droite γ_3 et d'une courbe d'ordre quatre rencontrant cette droite en deux points variables. Ainsi se trouve justifiée la singularité de O_5' pour la surface Φ_3.

Liége, le 21 novembre 1931.