Académie royale de Belgique.

—

EXTRAIT

du *Bulletin de la Classe des Sciences*

5e série — T. XVIII — No 5 — 1932

Koninklijke Belgische Academie.

—

UITTREKSEL

der *Mededeelingen van de Afdeeling Wetenschappen*

5de Reeks — B. XVIII — Nr 5 — 1932

Sur l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface cubique ayant trois points doubles biplanaires,

par LUCIEN GODEAUX,
Correspondant de l'Académie.

Nous nous sommes proposé d'appliquer les résultats que nous avons obtenus sur les quadriques de Lie d'une surface et sur les questions connexes (1), à quelques surfaces algébriques dont les asymptotiques sont connues. Nous avons considéré en premier lieu la surface de Steiner (2), dont les asymptotiques sont des quartiques gauches de seconde espèce. Nous nous proposons d'examiner ici la surface cubique possédant trois points doubles biplanaires. Cette surface est isothermo-asymptotique et nous montrons que ses quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques. La seconde nappe de l'enveloppe de ces quadriques est une surface qui se déduit de la première par une homologie harmonique. Les surfaces qui représentent les tangentes asymptotiques des deux nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie, dans l'espace à cinq dimensions, sont du sixième ordre et représentent des systèmes linéaires de cubiques planes ayant trois points-base. Ces surfaces ont été considérées récemment par M. Togliatti (3).

---

(1) Voir en particulier les notes que nous avons publiées dans les *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* depuis novembre 1927. Voir également les notes de M. DEMOULIN. (*C. R.*, 1908, t. 147; 1924, t. 179.)

(2) *Bull. de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, avril 1932.

(3) Alcuni esempî di superficie algebriche degl' iperspazi che rappresentano un' equazione di Laplace. (*Commentarii Mathematici Helvetici*, 1929, t. I.)

1. Les courbes

$$\lambda_1 u^3 + \lambda_2 v^3 + \lambda_3 uv + \lambda_4 = 0$$

sont transformées en elles-mêmes par l'homographie de période trois

$$u' = \varepsilon u, \qquad v' = \varepsilon^2 v,$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité. Si l'on rapporte projectivement ces courbes aux plans d'un espace, en posant

$$\frac{x_1}{u^3} = \frac{x_2}{v^3} = \frac{x_3}{uv} = \frac{x_4}{1},$$

on obtient une surface cubique (x) d'équation

$$x_1 x_2 x_4 = x_3^3$$

ayant aux points $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ des points doubles biplanaires ordinaires.

Les coordonnées d'un point x de la surface (x) satisfont au système d'équations aux dérivées partielles

$$\left.\begin{aligned} u x^{20} + 2 v x^{11} - 2 x^{10} = 0, \\ v x^{02} + 2 u x^{11} - 2 x^{01} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$x^{ik} = \frac{\partial^{i+k} x}{\partial u^i \partial v^k}.$$

2. Effectuons le changement de variables

$$u_1 = v u^{\varepsilon}, \qquad v_1 = v u^{\varepsilon}\ . \tag{2}$$

Au système (1) correspond le système

$$\left.\begin{aligned} u_1^2 \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} - \varepsilon^2 v_1^2 \frac{\partial^2 x}{\partial v_1^2} + \varepsilon u_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} - \varepsilon v_1 \frac{\partial x}{\partial v_1} = 0, \\ \varepsilon u_1^2 \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} - \varepsilon v_1^2 \frac{\partial^2 x}{\partial v_1^2} - 2 u_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + 2\varepsilon^2 v_1 \frac{\partial x}{\partial v_1} = 0. \end{aligned}\right\}$$

On en déduit

$$\left.\begin{aligned} u_1^2 \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} &= \varepsilon(\varepsilon - 1) u_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + v_1 \frac{\partial x}{\partial v_1}, \\ v_1^2 \frac{\partial^2 x}{\partial v_1^2} &= u_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} - \varepsilon(\varepsilon - 1) v_1 \frac{\partial x}{\partial v_1}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Les lignes u$_1$, v$_1$ *sont les asymptotiques de la surface* (x).

Effectuons encore le changement de variables

$$u_0 = \log u_1, \qquad v_0 = \log v_1. \tag{4}$$

Au système (3) correspond

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial x}{\partial u_0} - \frac{\partial x}{\partial v_0} = 0, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v_0^2} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial x}{\partial v_0} - \frac{\partial x}{\partial u_0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Posons enfin

$$x = \lambda X, \tag{6}$$

où

$$\lambda = e^{-\varepsilon u_0 - \varepsilon^2 v_0 + C}.$$

On obtient finalement le système

$$\left.\begin{aligned} X^{20} - X^{01} = 0, \\ X^{02} - X^{10} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

où X^{ik} représente la dérivée de X prise i fois par rapport à u_0 et k fois par rapport à v_0.

Les quantités X_1, X_2, X_3, X_4 sont les coordonnées normales de Wilczynski des points x de la surface (x).

Observons, ce qui sera utile dans la suite, que l'on a

$$\lambda^{10} = -\varepsilon\lambda, \quad \lambda^{01} = -\varepsilon^2\lambda, \quad \lambda^{20} = \lambda\varepsilon^2, \quad \lambda^{02} = \lambda\varepsilon, \quad \lambda^{11} = \lambda.$$

3. Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique Q d'un espace linéaire à cinq dimensions représentant les droites de l'espace ordinaire, image des tangentes asymptotiques au point X de la surface (x). On a précisément

$$U = |\, X X^{10} \,|, \qquad V = |\, X X^{01} \,|.$$

En vertu des équations (7), on a

$$U^{10} = V, \qquad V^{01} = U.$$

La suite de Laplace dans laquelle les points U, V sont consécutifs, comprend les points

$$U_1 = U^{01}, \quad U_2 = U_1^{01}, \quad U_3 = U_2^{01}, \ldots,$$
$$V_1 = V^{10}, \quad V_2 = V_1^{10}, \quad V_3 = V_2^{10}, \ldots,$$

et tous ces points, comme les points U, V, satisfont à l'équation de Moutard

$$\theta^{11} = \theta.$$

On a d'ailleurs

$$U_1 = |\, X X^{11} \,| - |\, X^{10} X^{01} \,|,$$
$$U_2 = 2 |\, X^{01} X^{11} \,| + |\, X X^{01} \,|,$$
$$U_3 = 2 |\, X^{10} X^{11} \,| + |\, X X^{10} \,|,$$
$$U_4 = |\, X^{10} X^{01} \,| + |\, X X^{11} \,|,$$
$$U_5 = |\, X X^{01} \,| = V$$

et la suite de Laplace considérée a la période six.

Les points U_1, V_1 n'appartiennent pas à Q, mais les points U_2, $V_2 = U_3$ appartiennent à cette hyperquadrique. Les quadriques de Lie de la surface (x) n'ont que deux points caractéristiques : l'un de ces points est le point X de cette surface ; l'autre est le point Y sommet du faisceau de rayons représenté sur Q par la droite $U_2\, V_2$.

4. Les coordonnées du point Y s'expriment, en fonction de celles du point X, par l'équation

$$Y = X - 2X^{11}.$$

On en déduit

$$y = \lambda Y = -2 \frac{\partial^2 x}{\partial u_0 \partial v_0} - 2\varepsilon^2 \frac{\partial x}{\partial u_0} - 2\varepsilon \frac{\partial x}{\partial v_0} - x$$

et, en passant aux paramètres u_1, v_1,

$$y = -2u_1 v_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial v_1} - 2\varepsilon^2 u_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} - 2\varepsilon v_1 \frac{\partial x}{\partial v_1} - x.$$

Enfin, en fonction des variables primitives u, v, on a

$$3y = -2u^2 x^{20} - 2uv x^{11} - 2v^2 x^{02} + 6ux^{10} + 6vx^{01} - 3x.$$

On en déduit

$$\frac{y_1}{-x_1} = \frac{y_2}{-x_2} = \frac{y_3}{+x_3} = \frac{y_4}{-x_4}.$$

On voit donc que *les deux nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface* (x) *se correspondent dans l'homologie harmonique ayant pour centre le point commun aux plans tangents à la surface* (x) *aux points doubles, et pour plan le plan de ces points.*

Les premières directrices de Wilczynski de la surface (x) passent par le point X + Y, c'est-à-dire par le centre (0, 0, 1, 0) de l'homologie. Les secondes directrices de Wilczynski sont situées dans le plan d'homologie.

La surface (y) a pour équation

$$y_1 y_2 y_4 + y_3^3 = 0$$

et les coordonnées du point Y vérifient les relations

$$Y^{20} - Y^{01} = 0, \qquad Y^{02} - Y^{10} = 0.$$

5. Nous allons maintenant démontrer que la surface (U) est rationnelle et établir sa représentation plane dans le plan (u, v),

En exprimant les coordonnées du point U en fonction de u, v, on trouve

$$\varepsilon(1-\varepsilon)\lambda^2 U = u \mid x \quad x^{10} \mid - \varepsilon^2 v \mid x \quad x^{01} \mid.$$

On en déduit

$$\frac{U_{12}}{3\varepsilon u^3 v^3} = \frac{U_{13}}{(\varepsilon - 1)u^4 v} = \frac{U_{14}}{-3u^3} = \frac{U_{23}}{\varepsilon(\varepsilon - 1)uv^4} = \frac{U_{24}}{3\varepsilon^2 v^3} = \frac{U_{34}}{-\varepsilon^2(\varepsilon - 1)uv}.$$

On en conclut que les sections hyperplanes de la surface (U) correspondent projectivement aux courbes du système linéaire dont nous écrirons l'équation en coordonnées homogènes sous la forme

$$\lambda_{12}u_1^3u_2^3 + \lambda_{13}u_1^4u_2u_3 + \lambda_{14}u_1^3u_3^3 + \lambda_{23}u_1u_2^4u_3 + \lambda_{24}u_2^3u_3^3 + \lambda_{34}u_1u_2u_3^4 = 0. \quad (8)$$

Ces courbes, du sixième ordre, ont des points doubles à tangentes fixes aux sommets du triangle de référence; le système a par suite le degré 18. Mais si l'on observe qu'il est composé au moyen de l'involution engendrée de l'homographie de période trois

$$u_1' : u_2' : u_3' = \varepsilon u_1 : \varepsilon^2 u_2 : u_3, \quad (9)$$

on voit que la surface (U) est du sixième ordre. Comme elle représente une involution plane, elle est rationnelle.

Les courbes (8) sont de genre sept et possèdent six points de coïncidence pour l'involution engendrée sur chacune d'elles pour l'homographie (9) (deux de ces points sont dans le voisinage de chacun des sommets du triangle de référence). Il en résulte que les courbes sections hyperplanes de la surface (U) sont elliptiques. La surface (U) doit donc être une des surfaces rencontrées par M. Togliatti. Nous allons montrer que c'est la surface (I) de ce géomètre.

Posons

$$\frac{v_1}{u_1^2 u_2} = \frac{v_2}{u_2^2 u_3} = \frac{v_3}{u_3^2 u_1};$$

l'équation (8) s'écrit

$$\lambda_{12}v_1^2v_2 + \lambda_{13}v_1^2v_3 + \lambda_{14}v_3^2v_1 + \lambda_{23}v_2^2v_1 + \lambda_{24}v_2^2v_3 + \lambda_{34}v_3^2v_2 = 0, \quad (8')$$

ce qui démontre notre affirmation.

Les surfaces (U), (V), (U_1), (V_1), (U_2), (V_2) sont deux-à-deux projectivement identiques.

Au système linéaire.

$$\lambda_1 v_1^2 v_3 + \lambda_2 v_2^2 v_1 + \lambda_3 v_1 v_2 v_3 + \lambda_4 v_3^2 v_2 = 0 \qquad (10)$$

correspond le système

$$\lambda_1 u_1^3 + \lambda_2 u_2^3 + \lambda_3 u_1 u_2 u_3 + \lambda_4 u_3^3 = 0.$$

Aux courbes du système (10) correspondent donc les sections planes de la surface (x). Observons que le système (8′) et le système (10) ont un réseau en commun.

6. Les coordonnées du point V s'expriment, en fonction, u, v, par la formule

$$\varepsilon(1-\varepsilon)\lambda^2 V = \varepsilon v \mid x \quad x^{01} \mid + u \mid x \quad x^{10} \mid .$$

On a par suite

$$\frac{V_{12}}{-3\varepsilon^2 u^3 v^3} = \frac{V_{13}}{\varepsilon^2(\varepsilon-1)u^4 v} = \frac{V_{14}}{3u^3} = \frac{V_{23}}{\varepsilon(\varepsilon-1)uv^4} = \frac{V_{24}}{-3\varepsilon v^3} = \frac{V_{34}}{-(\varepsilon-1)uv}.$$

On en déduit les équations de l'homographie qui fait passer de la surface (U) à la surface (V),

$$\frac{V_{12}}{-\varepsilon U_{12}} = \frac{V_{13}}{\varepsilon^2 U_{13}} = \frac{V_{14}}{-U_{14}} = \frac{V_{23}}{U_{23}} = \frac{V_{24}}{-\varepsilon^2 U_{24}} = \frac{V_{34}}{\varepsilon U_{34}}.$$

C'est une homographie de période six qui fait correspondre les surfaces (V_1) à (V), (V_2) à (V_1), (U_2) à (V_2), (U_1) à (U_2) et enfin (U) à (U_1).

Liége, le 14 avril 1932

Marcel HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.