EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*,
N° 4, 1932.

Sur les surfaces isothermo-asymptotiques dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques,

par LUCIEN GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liége.

Soit (x) une surface non réglée, rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 du point x satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles que l'on peut mettre sous la forme (Wilczynski).

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0.$$

La condition pour que la surface (x) soit isothermo-asymptotique est

$$(\log a)^{11} = (\log b)^{11}. \qquad (1)$$

La condition pour que les quadriques de Lie de cette surface n'aient que deux points caractéristiques s'exprime par les relations [1]

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1) = 0, \\ \beta &= 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Le second point caractéristique de la quadrique de Lie a pour expression

$$y = \left[4ab - \frac{1}{2}(\log a)^{10}(\log b)^{01}\right] x + x^{10}(\log b)^{01} + x^{01}(\log a)^{10} - 2x^{11}.$$

Nous avons montré que sous les conditions (1) et (2), la droite xy, première directrice de Wilczynski de chacune des surfaces (x), (y), passait par le point fixe

$$p = y + h_1 x,$$

où

$$h_1 = -(\log a)^{11} + 4ab.$$

---

(1) Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie. (*Bull. de l'Acad roy. de Belgique*, 1928, pp. 158-186, 345-348.)

On a

$$2p^{10} + p\,(\log a)^{10} = 0, \qquad 2p^{01} + p\,(\log b)^{01} = 0.$$

La seconde directrice de Wilczynski de la surface (x) est également celle de la surface (y) ; c'est l'intersection des plans tangents aux surfaces (x), (y) aux points homologues. Cette droite se meut dans un plan fixe ϖ dont l'équation s'écrit

$$\begin{vmatrix} X_1 & x_1 & x_1^{10} & x_1^{01} & x_1^{11} \\ X_2 & x_2 & x_2^{10} & x_2^{01} & x_2^{11} \\ X_3 & x_3 & x_3^{10} & x_3^{01} & x_3^{11} \\ X_4 & x_4 & x_4^{10} & x_4^{01} & x_4^{11} \\ 0 & 2 & (\log a)^{10} & (\log b)^{01} & (\log a)^{11} + \frac{1}{2}(\log a)^{10}(\log b)^{01} \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Si l'on écrit cette équation sous la forme

$$\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 X_4 = 0,$$

on a

$$2\xi^{10} + \xi\,(\log a)^{10} = 0, \qquad 2\xi^{01} + \xi\,(\log b)^{01} = 0.$$

Nous avons montré (¹) que les surfaces (x), (y) sont projectivement applicables ; nous allons faire voir de plus qu'elles sont projectives et que, précisément, elles se correspondent dans une homologie harmonique de centre p et de plan ϖ.

Si p' est le point de rencontre de la droite $x\,y$ avec le plan ϖ, posons, dans l'équation (3),

$$X = p' = y + \lambda x.$$

Cette équation se réduit à

$$(\lambda + h_1)\,|\, x \quad x^{10} \quad x^{01} \quad x^{11} \,| = 0.$$

Par suite, on a

$$p' = y - h_1 x$$

et

$$(x, y, p, p') = -1,$$

ce qui démontre le théorème.

(¹) Sur les surfaces projectivement applicables ayant mêmes quadriques de Lie. (*Anais da Faculdade de Sciências do Porto*, 1928, t. **XV**, pp. 157-161.)

Si deux surfaces ont mêmes quadriques de Lie et si l'une d'elles est isothermo-asymptotique, ces deux surfaces se correspondent dans une homologie involutive. Les droites passant par le centre d'homologie sont les premières directrices de Wilczynski des deux surfaces; les droites du plan d'homologie sont les secondes directrices de Wilczynski des deux surfaces (¹).

En deux points homologues x, y, les plans osculateurs aux courbes homologues tracées sur ces surfaces forment donc deux gerbes perpectives, le plan de perspectivité étant le plan d'ho mologie.

Liége, le 16 avril 1932.

(¹) Il est aisé de vérifier, en s'appuyant sur les résultats de notre note : Sur les congruences formées par les directrices de Wilczynski d'une surface (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1928, pp. 335-345), que les surfaces dont la première directrice de Wilczynski passe par un point fixe, ou dont la seconde directrice appartient à un plan fixe, sont caractérisées par les relations (1) et (2).

MARCEL HAYEZ, Imprimeur, 112, rue de Louvain, Bruxelles.