Sur certaines involutions du sixième ordre appartenant à une surface de genres un,

par Lucien GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Dans la détermination des plans doubles de genres un ($p_a = P_4 = 1$) représentant une involution d'ordre trois appartenant à une surface de genres un [1], nous avons été conduit à la construction suivante :

Représentons par $x_0, x_1, \dots x_4$ les coordonnées projectives homogènes d'un espace linéaire S_4 à quatre dimensions et considérons la surface du sixième ordre

$$x_3x_4 + \varphi_2(x_0, x_1, x_2) = 0,$$
$$a^3x_3^3 + b^3x_4^3 + \varphi_3(x_0, x_1, x_2) = 0,$$

où φ_2, φ_3 sont des formes ternaires respectivement du second et du troisième degré.

Cette surface est de genres un et possède deux transformations birationnelles en elle-même. L'une, T, d'équations

$$\frac{x_0'}{x_0} = \frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{x_2} = \frac{x_3'}{\varepsilon x_3} = \frac{x_4'}{\varepsilon^2 x_4}, \qquad (T)$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité, a la période trois. L'autre, θ_1, d'équations

$$\frac{x_0'}{abx_0} = \frac{x_1'}{abx_1} = \frac{x_2'}{abx_2} = \frac{x_3'}{b^2x_4} = \frac{x_4'}{a^2x_3}, \qquad (\theta_1)$$

est involutive. On a

$$T\theta_1 = \theta_1 T^2.$$

(1) « Sur les plans doubles de genres un et de rang trois ». (*Annaes da Academia polytechnica do Porto*, 1920, t. XV.)

Les transformations $T\theta_1$, $T^2\theta_1$ sont d'ailleurs involutives et précisément, comme θ_1, des homologies involutives. Les hyperplans

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$$

découpent, sur la surface, un système de courbes composé au moyen des involutions engendrées par $T, \theta_1, \theta_2 = T\theta_1, \theta_3 = T^2\theta_1$. En rapportant projectivement les courbes de ce système aux droites d'un plan, on obtient, comme surface image de l'involution engendrée par T, un plan double dont la courbe de diramation a pour équation

$$[\varphi_3(1, x, y)]^2 + 4a^3b^3[\varphi_2(1, x, y)]^3 = 0.$$

Cette courbe possède six points de rebroussement et le plan double est de genres un.

Ce qui précède nous a amené à étudier la question suivante : Étant donnée une surface F de genres un $(p_a = P_4 = 1)$, supposons qu'elle soit transformée en elle-même par une transformation birationnelle T de période trois, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, et par une transformation birationnelle involutive θ_1, ayant une courbe unie. Supposons en outre que l'on ait

$$T\theta_1 = \theta_1 T^2.$$

Peut-il exister un système linéaire (incomplet) composé au moyen de l'involution I_3 engendrée par T et au moyen de l'involution I_2' engendrée par θ_1, sans que ce système soit contenu dans un système plus ample, composé au moyen d'une de ces deux involutions ? Nous démontrons qu'un seul cas est possible, précisément celui dont il vient d'être question.

D'une manière précise, nous établirons le théorème suivant :

Si une surface de genres un $(p_a = P_4 = 1)$ *possède une involution cyclique d'ordre trois et de genres un, et une invo-*

lution rationnelle d'ordre deux ; si les transformations génératrices T, θ_1 *de ces involutions vérifient la relation*

$$T\theta_1 = \theta_1 T^2;$$

si enfin il existe sur la surface un système linéaire sans points-base composé au moyen des deux involutions et qui ne soit pas contenu dans un système plus ample composé au moyen d'une de ces involutions, le système linéaire en question a le degré six, le genre quatre et la dimension deux.

Pour les propriétés des involutions d'ordre trois et de genres un, appartenant à une surface de genres un, dont nous aurons besoin au cours de ce travail, nous renvoyons à un mémoire publié antérieurement [1].

1. Soit F une surface algébrique de genres un ($p_a = P_4 = 1$) possédant deux transformations birationnelles en elle-même. Sur ces transformations, nous ferons les hypothèses suivantes :

1° La transformation T a la période trois et engendre une involution d'ordre trois, I_3, ne possédant qu'un nombre fini de points unis. L'involution I_3 est donc de genres un ($p_a = P_4 = 1$) et possède six points unis.

2° La transformation θ_1 est involutive et engendre une involution rationnelle I'_2, d'ordre deux. Cette involution possède donc une infinité de points unis.

3° On a

$$T\theta_1 = \theta_1 T^2.$$

La surface F possède deux autres transformations birationnelles involutives

$$\theta_2 = T\theta_1, \qquad {}_3 = T^2\theta_1$$

engendrant des involutions I''_2, I'''_2.

Les transformations T, θ_1, θ_2, θ_3 engendrent sur F une involution d'ordre six. Soient P_1, P'_1 deux points formant un

[1] « Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un ». (*Annales scientif. de l'École normale supérieure*, Paris, 1914, 1919.)

couple de I'_2 ; P_2, P_3 et P'_2, P'_3 les points que T et T^2 font correspondre respectivement à P_1, P'_1. θ_1 fait correspondre P'_3 à P_2 et P'_2 à P_3. Les couples $P_1P'_2$, $P_2P'_1$, $P_3P'_3$ appartiennent à I''_2 et les couples $P_1P'_3$, $P_2P'_2$, $P_3P'_1$ à I'''_2. Si P_1 est un point uni de I'_2, c'est-à-dire si P_1 et P'_1 coïncident, P'_2 coïncide avec P_2 et P'_3 avec P_3. D'après ce qui précède, P'_2 est un point uni de I'''_2 et P_3 un point uni de I''_2. Les points P_2 et P_3 sont homologues à la fois par rapport à T et à θ_1. On voit que si D_1 est la courbe unie de l'involution I'_2, D_2 sa transformée par T^2, D_3 sa transformée par T, les involutions I''_2, I'''_2 ont respectivement D_2, D_3 comme courbes unies. Ces involutions sont donc rationnelles.

Tout point commun à deux des courbes D_1, D_2, D_3 est uni pour T et appartient à la troisième courbe. Les trois points situés sur ces trois courbes et infiniment voisins de leur point commun forment un groupe de l'involution I_3.

2. L'involution I'_2 étant rationnelle, peut être représentée sur un plan et la surface F est donc birationnellement équivalente à un plan double. Un multiple convenablement choisi du système des droites doubles de ce plan double donnera, sur F, un système linéaire complet $|C_1|$, non composé au moyen de l'involution I'_2, comprenant deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de I'_2. L'un de ces systèmes sera formé de courbes C_1 totales, l'autre de courbes qui, ajoutées à la courbe D_1, donnent des courbes C_1. Le premier système sera de plus dépourvu de point-base.

Soient $|C_2|$, $|C_3|$ les systèmes que T, T^2 font respectivement correspondre à $|C_1|$, systèmes qui peuvent éventuellement coïncider avec $|C_1|$. Le système

$$|C| = |C_1 + C_2 + C_3$$

sera transformé en lui-même par T, θ_1 et par suite par θ_2, θ_3. Mais il ne pourra être composé avec aucune des involutions I_3, I'_2, I''_2, I'''_2.

Le système $|C|$ contiendra au moins deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_3. En prenant éventuellement au lieu de $|C|$ un de ses multiples convenablement choisis, on aura un système contenant trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_3, l'un de ces systèmes partiels n'ayant pas pour points-base des points unis de I_3. Nous pouvons donc supposer sans restriction que $|C|$ jouit de cette propriété.

On voit de plus que le système $|C|$ contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I'_2, l'un de ces systèmes dépourvu de points-base étant composé de courbes C totales, l'autre ayant la courbe D_1 comme composante fixe.

3. Nous désignerons dorénavant par F une surface birationnellement identique à F, normale, dont les sections hyperplanes seront les courbes C. Si $|C_0|$ est le système partiel contenu dans $|C|$, composé au moyen de I_3 et dépourvu de point-base, et si π est la dimension de ce système, les courbes C seront de genre $3\pi - 2$ et la surface F sera située dans un espace linéaire $S_{3\pi-2}$ à $3\pi - 2$ dimensions. Cette surface sera d'ordre $6\pi - 6$.

Sur la surface F, les transformations T, θ_1, θ_2, θ_3 seront déterminées par des homographies de l'espace $S_{3\pi-2}$; nous désignerons ces homographies par le même symbole que les transformations précédentes.

L'homographie T possède trois axes ; l'un, $S_\pi^{(0)}$, est un espace linéaire à π dimensions rencontrant F aux six points unis $A_1, A_2, \ldots, A_6$ de l'involution I_3; les deux autres, $S_{\pi-2}^{(1)}$, $S_{\pi-2}^{(2)}$, sont des espaces linéaires à $\pi - 2$ dimensions ne rencontrant pas F. Les trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_3 contenus dans $|C|$ sont découpés par les hyperplans passant par deux des trois axes de T. Nous désignerons par $|C_0|$ le système ∞^π découpé par les hyperplans passant par $S_{\pi-2}^{(1)}$, $S_{\pi-2}^{(2)}$; par $|C_1|$ celui qui est découpé par les hyperplans passant par $S_\pi^{(0)}$, $S_{\pi-2}^{(2)}$; par $|C_2|$ celui qui est découpé par les hyperplans passant par $S_\pi^{(0)}$, $S_{\pi-2}^{(1)}$. (Ces deux derniers systèmes n'ont évidemment rien de commun avec ceux qui ont été désignés par le même symbole au n° 2).

On sait que le plan tangent en A_i à la surface F s'appuie en un point sur chacun des axes $S_{\pi-2}^{(1)}$, $S_{\pi-2}^{(2)}$.

4. L'homographie harmonique θ_1 doit évidemment transformer en eux-mêmes les trois axes de T. Deux cas peuvent se présenter :

1° Chacun des axes de T est transformé en lui-même par θ_1.

2° L'axe $S_\pi^{(0)}$ est transformé en lui-même par θ_1 et les axes $S_{\pi-2}^{(1)}$, $S_{\pi-2}^{(2)}$ sont transformés l'un dans l'autre par cette homographie.

Examinons le premier cas. Ou bien un axe de T a tous ses points unis pour θ_1, ou bien θ_1 détermine dans cet axe une homographie harmonique possédant elle-même deux axes. Dans tous les cas les deux axes $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$ de θ_1 sont complètement déterminés par leurs intersections avec les axes de T. L'un des espaces $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$, par exemple le second, coupe F suivant la courbe D_1 ; l'autre ne rencontre pas F. Les espaces $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$ sont transformés en eux-mêmes par T et par suite les courbes D_1, D_2, D_3 coïncident. Il en résulte en outre que les homographies harmoniques θ_1, θ_2, θ_3 coïncident, ce qui est impossible. Seul le second cas peut donc se présenter.

5. Plaçons-nous donc dans le second cas. L'homographie θ_1 échangeant entre eux les espaces $S_{\pi-2}^{(1)}$, $S_{\pi-2}^{(2)}$, l'espace $S_{2\pi-3}$ déterminé par ces deux espaces est uni pour θ_1 et cette homographie détermine une homographie harmonique ayant deux axes $\sigma^{(11)}$, $\sigma^{(12)}$. Supposons que le premier de ces axes ait $x < \pi - 2$ dimensions. La droite joignant un point de $S_{\pi-2}^{(1)}$ et le point de $S_{\pi-2}^{(2)}$ que θ_1 lui fait correspondre est unie pour θ_1 et coupe donc $\sigma^{(11)}$ en un point. De telles droites sont en nombre $\infty^{\pi-2}$ et l'espace à $x + \pi - 1 < 2r - 3$ dimensions déterminé par $\sigma^{(11)}$, $S^{(1)}_{\pi-2}$ doit contenir $S^{(2)}_{\pi-2}$. Mais cela est absurde, car alors ces deux espaces se rencontreraient. Par suite les axes $\sigma^{(11)}$, $\sigma^{(12)}$ sont des espaces linéaires $\sigma^{(11)}_{\pi-2}$, $\sigma^{(12)}_{\pi-2}$ à $\pi - 2$ dimensions.

Les transformations T^2, T font correspondre à $\sigma^{(11)}_{\pi-2}$, $\sigma^{(12)}_{\pi-2}$ respectivement des espaces $\sigma^{(21)}_{\pi-2}$, $\sigma^{(22)}_{\pi-2}$ et $\sigma^{(31)}_{\pi-2}$, $\sigma^{(32)}_{\pi-2}$ qui sont, les deux premiers, les axes de l'homographie harmonique déterminée par θ_2 dans $S_{2\pi-3}$, les deux derniers, ceux de l'homographie déterminée par θ_3 dans le même espace. De plus, toute droite déterminée par un point de $S^{(1)}_{\pi-2}$ et par le point que θ_1 lui fait correspondre dans $S^{(2)}_{\pi-2}$, rencontre les six espaces $\sigma^{(11)}_{\pi-2}, \ldots, \sigma^{(32)}_{\pi-2}$.

L'homographie θ_1 transforme en lui-même l'espace $S^{(0)}_{\pi}$. Deux cas peuvent se présenter suivant que θ_1 détermine l'identité ou une homographie harmonique non identique dans cet espace.

Dans le premier cas, les axes de θ_1 sont un des espaces $\sigma^{(11)}_{\pi-2}$, $\sigma^{(12)}_{\pi-2}$, soit, pour fixer les idées, le premier, et l'espace $\Sigma^{(1)}_{2\pi-1}$, linéaire, déterminé par $S^{(0)}_{\pi}$ et $\sigma^{(12)}_{\pi-2}$. L'espace $\Sigma^{(1)}_{2\pi-1}$ coupe la surface F suivant la courbe D_1. De même les axes de θ_2 sont l'espace $\sigma^{(21)}_{\pi-2}$ et l'espace $\Sigma^{(2)}_{2\pi-1}$ déterminé par $S^{(0)}_{\pi}$, $\sigma^{(22)}_{\pi-2}$. Enfin les axes de θ_3 sont $\sigma^{(31)}_{\pi-2}$ et l'espace $\Sigma^{(3)}_{2\pi-1}$ déterminé par $\sigma^{(32)}_{\pi-2}$ et $S^{(0)}_{\pi}$. Les espaces $\Sigma^{(2)}_{2\pi-1}$, $\Sigma^{(3)}_{2\pi-1}$ coupent F respectivement suivant les courbes D_2 et D_3.

Dans le second cas, désignons par $\sigma^{(1)}_{r}$, $\sigma^{(2)}_{\pi-r-1}$ les axes, à r et $\pi - r - 1$ dimensions de l'homographie harmonique déterminée par θ_1 dans $S^{(0)}_{\pi}$. Observons que θ_2, θ_3 déterminent dans cet espace la même homographie. Les axes de θ_1 sont un espace $\Sigma^{(11)}_{\pi+r-1}$ à $\pi + r - 1$ dimensions, déterminé par $\sigma^{(1)}_{r}$ et $\sigma^{(11)}_{\pi-2}$, et un espace $\Sigma^{(12)}_{2\pi-r-2}$ à $2\pi - r - 2$ dimensions, déterminé par $\sigma^{(2)}_{\pi-r-1}$ et $\sigma^{(12)}_{\pi-2}$. Les axes de θ_2 sont l'espace $\Sigma^{(21)}_{\pi+r-1}$, déterminé par $\sigma^{(21)}_{\pi-2}$, $\sigma^{(1)}_{r}$, et l'espace $\Sigma^{(22)}_{2\pi-r-2}$, déterminé par $\sigma^{(22)}_{\pi-2}$ et $\sigma^{(2)}_{\pi-r-1}$. Les axes de θ_3 sont l'espace $\Sigma^{(31)}_{\pi+r-1}$, déterminé par $\sigma^{(31)}_{\pi-2}$, $\sigma^{(1)}_{r}$, et l'espace $\Sigma^{(32)}_{3\pi-r-2}$, déterminé par $\sigma^{(32)}_{\pi-2}$ et $\sigma^{(2)}_{\pi-r-1}$. L'un des espaces $\Sigma^{(11)}_{\pi+r-1}$, $\Sigma^{(12)}_{3\pi-r-2}$ coupe F suivant la courbe D_1 et l'autre ne rencontre pas F. Nous supposerons, pour fixer les idées, que c'est le second espace qui coupe F suivant D_1. Alors $\Sigma^{(22)}_{2\pi-r-2}$ coupe F suivant D_2 et $\Sigma^{(32)}_{2\pi-r-2}$ suivant D_3.

6. Examinons le premier cas. Le système partiel $|C_0|$ est composé non seulement avec l'involution I_3, mais aussi avec les involutions I'_2, I''_2, I'''_2. Par conséquent, si l'on rapporte projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire S_π à π dimensions, à la surface F correspond une surface Φ, de genres un, d'ordre $2\pi - 2$, image de l'involution I_3, et cette surface Φ est une surface double ayant comme support une surface rationnelle Φ' d'ordre $\pi - 1$. La courbe de diramation Δ de cette surface double correspond à la courbe $D_1 + D_2 + D_3$; si $A'_1, A'_2, \ldots, A'_6$ sont les points de Φ' qui correspondent aux points $A_1, A_2, \ldots, A_6$, la courbe Δ possède donc six points de rebroussement en $A'_1, A'_2, \ldots, A'_6$.

On sait que la surface Φ' a pour sections hyperplanes des courbes rationnelles normales et est une surface réglée ou une surface de Véronèse, ou une projection de cette dernière surface. Mais dans cette dernière hypothèse, cette projection est une réglée cubique de S_4 ou une quadrique de S_3. De plus, le cas où Φ' est une surface de Véronèse se ramène immédiatement au cas où Φ' est un plan double par la considération du système des coniques tracées sur la surface de Véronèse. Nous pouvons donc supposer que Φ' est un plan ($\pi = 2$) ou une surface réglée rationnelle normale.

Écartons tout de suite le cas où Φ est un plan double ($\pi = 2$). Alors, F appartient à un espace S_4 et θ_1, θ_2, θ_3 sont des homologies harmoniques. La surface F existe; nous en avons donné les équations dans un travail rappelé au début de cette note. Nous supposerons donc $\pi > 2$ dans la suite.

D'après la formule de Zeuthen exprimant le genre d'une section hyperplane de Φ en fonction de la section de Φ' par le même hyperplan, la courbe Δ a l'ordre $2\pi + 2$. Par suite, les courbes D_1, D_2, D_3 ont également l'ordre $2\pi + 2$.

7. Les hyperplans de $S_{3\pi-2}$ passant par la courbe D_1 contiennent l'espace $\Sigma^{(1)}_{2\pi-1}$ et sont ∞^2; ils coupent encore F suivant des courbes G_1 d'ordre $4\pi - 8$, de genre $\pi - 2$, formant un système linéaire $|G_1|$ composé au moyen de l'involution I'_2.

Sur une courbe G_1, les hyperplans découpent une série linéaire d'ordre $4\pi - 8$, certainement non spéciale, dont la dimension est par suite égale à $3\pi - 6$. Par suite, il y a ∞^3 hyperplans contenant une courbe G_1 déterminée; ces hyperplans découpent sur F, en dehors de cette courbe G_1, un système linéaire de courbes de genre trois, auquel appartient la courbe D_1. Celle-ci est donc de genre trois et il en est de même des courbes D_2, D_3.

Les courbes D_1, D_2, D_3 ont en commun les six points A_1, A_2, ..., A_3. D'autre part, un système linéaire de genre trois, sur la surface F, a le degré quatre. Par suite les courbes D_1, D_2, D_3 ne sont pas deux à deux équivalentes.

Les courbes G_1 sont hyperelliptiques (ou en particulier elliptiques si $\pi = 3$); la série canonique sur une de ces courbes, lorsque π est supérieur à trois, est composée au moyen de la série d'ordre deux formée des couples de I'_2 appartenant à cette courbe. Il en résulte que chaque courbe G_1 contient $2\pi - 2$ points unis de I'_2, c'est-à-dire que les courbes G_1 coupent la courbe D_1 en $2\pi - 2$ points.

Les hyperplans passant par $\Sigma^{(2)}_{3\pi-1}$ coupent F suivant la courbe D_2 et suivant $\infty^{\pi-2}$ courbes G_2 de genre $\pi - 2$. De même, les hyperplans passant par $\Sigma^{(3)}_{2\pi-1}$ coupent F suivant D_3 et $\infty^{\pi-2}$ courbes G_3 de genre $\pi - 2$. Les systèmes $|G_2|$, $|G_3|$ sont composés respectivement avec I''_2, I'''_2.

Au système $|G_1|$, T fait correspondre le système $|G_3|$ et T^2 le système $|G_2|$.

Les courbes G_1 rencontrent chacune des courbes D_2, D_3 en $2\pi - 4$ points, les courbes G_2 chacune des courbes G_3, G_1 en $2\pi - 4$ points et enfin les courbes G_3 chacune des courbes D_1, D_2 en $2\pi - 4$ points.

Les courbes G_1 rencontrent les courbes G_2, G_3 en $2\pi - 4$ points et les courbes G_2, G_3 se rencontrent en $2\pi - 4$ points.

8. A un hyperplan passant par D_1, T fait correspondre un hyperplan passant par D_3 et à celui-ci, un hyperplan passant par D_2. Ces deux derniers hyperplans sont homologues dans l'homographie θ_1.

Cela étant, fixons l'attention sur une courbe G_1 et sur les courbes G_3, G_2 que T, T^2 lui font correspondre. Soit P_3 un point commun à G_1, G_2. θ_1 fait correspondre à P_3 un point P'_2 commun à G_1 et à G_3, Il en résulte que les points des groupes de I_3 dont P_3 et P'_2 font partie appartiennent deux par deux aux courbes G_1, G_2, G_3 et que le groupe de sixpoints ainsi formé est transformé en lui-même par T, θ_1, θ_2, θ_3. Les $3\ (2\pi - 4)$ points communs à deux des courbes G_1, G_2, G_3 se distribuent en $\pi - 2$ groupes de six points analogues.

A la courbe G_1 correspond, sur la surface Φ, une courbe de genre $\pi - 2$ et d'ordre $4\pi - 8$, ayant $2\pi - 4$ points doubles variables. D'après ce qui précède, cette courbe est une courbe G' de la surface Φ', comptée deux fois, d'ordre $2\pi - 4$, ayant $\pi - 2$ points doubles. De plus, cette courbe G' est rationnelle. La courbe G' coupe donc la courbe de diramation Δ en $2\pi - 2$ points; ce sont les points qui correspondent aux points communs aux courbes G_1, D_1.

Occupons-nous tout d'abord du cas $\pi = 3$. Φ' est alors une quadrique et les courbes G' sont des coniques, donc des sections planes de cette quadrique.

Si la quadrique Φ' n'est pas conique, les courbes G', ayant un point double, sont dégénérées en deux droites, et par suite, sur la surface F, les courbes G_1, d'ordre quatre, sont dégénérées en deux courbes nécessairement variables. Mais ces courbes ne peuvent être que des coniques et alors la surface F serait rationnelle, contrairement à l'hypothèse. Par suite Φ' doit être un cône et les courbes G' doivent être découpées sur ce cône par ses plans tangents. Mais alors, sur la surface F, les courbes G_1 seraient formées de coniques comptées deux fois (un plan toucherait F le long de chacune des deux courbes) et F serait dans ce cas aussi rationnelle. On en conclut que l'on ne peut avoir $\pi = 3$.

Supposons $\pi > 3$. Les courbes G' appartiennent comme courbes totales à un système linéaire de courbes de genre $\pi - 2$ et d'ordre $2\pi - 4$ supérieur à celui de la surface Φ'. En effet, les courbes G' ne peuvent être réductibles, car alors $|G_1|$ serait réductible également. Or, ce système ne peut avoir de parties fixes, ni être composé au moyen d'un faisceau (celui-ci serait en effet formé de courbes elliptiques et dépourvu de point-base). Cela étant, une courbe de genre $\pi - 2$ et d'ordre $2\pi - 4$ est située dans un espace linéaire ayant en plus $\pi - 2$ dimensions [1]. Les courbes G_1 feraient donc partie de sections hyperplanes de Φ', ce qui est absurde.

De tout ceci, on conclut que θ_1 ne peut déterminer l'identité dans l'espace $S_\pi^{(0)}$ que si $\pi = 2$.

9. Dans le deuxième cas, celui où l'espace $S_\pi^{(0)}$ n'a pas tous ses points unis pour l'homographie harmonique θ^1, il est clair que les systèmes linéaires contenus dans $|C|$ et composés au moyen de I_3 et de I_2', appartiennent à des systèmes plus amples composés au moyen d'une de ces involutions.

Ainsi se trouve démontré le théorème énoncé au début de ce travail.

Liége, 4 avril 1932.

(1) A. COMESSATTI, « Limiti di variabilità della dimensione e dell'ordine d'une g_n^r sopra una curva di dato genere. (*Atti Istituto Veneto*, 1914-1915.)