EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*,
N° 4, 1932.

Sur les asymptotiques de la surface de Steiner,

par LUCIEN GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liége.

1. Les asymptotiques de la surface de Steiner ont été, comme on sait, déterminées par Cremona; ce sont des quartiques gauches rationnelles formant un système ∞^1 d'indice deux. Les équations paramétriques d'une surface de Steiner, rapportée à ses asymptotiques u, v, sont (¹).

$$\frac{x_1}{(uv+1)^4} = \frac{x_2}{(uv-1)^4} = \frac{x_3}{(u+v)^4} = \frac{x_4}{(u-v)^4}, \tag{1}$$

le tétraèdre de référence étant formé par les plans qui touchent la surface suivant des coniques.

Les coordonnées d'un point x de la surface envisagée (x) satisfont au système d'équations aux dérivées partielles, complètement intégrable :

$$\left.\begin{aligned} &(u^2-v^2)(1-u^2v^2)\,x^{20}+3u\,(2u^2v^2-1-v^4)\,x^{10} \\ &\qquad +3v\,(1-v^4)\,x^{01}-12\,v^2(u^2-v^2)\,x=0, \\ &(v^2-u^2)\,(1-u^2v^2)\,x^{02}+3v\,(2u^2v^2-1-u^4)\,x^{01} \\ &\qquad +3u\,(1-u^4)x^{10}-12u^2\,(v^2-u^2)\,x=0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(¹) Voir par exemple E. CIANI, *Introduzione alla geometria algebrica*. Padoue, 1931, pp. 366 et suiv.

Désignons par Q l'hyperquadrique de S_5 qui représente les droites de l'espace, par U le point de Q qui représente la tangente asymptotique xx^{10}, par V le point de Q représentant la tangente xx^{01}.

En posant

$$x = [(u^2 - v^2)(1 - u^2 v^2)]^{\frac{3}{4}} y,$$

puis

$$\overline{U} = | y \quad y^{10} |, \qquad V = | y \quad y^{01} |,$$

on a

$$(u^2 - v^2)(1 - u^2 v^2)\,\overline{U}^{10} + 3v(1 - v^4)\,\overline{V} = 0,$$
$$(v^2 - u^2)(1 - u^2 v^2)\,\overline{V}^{01} + 3u(1 - u^4)\,\overline{U} = 0$$

et les points U, V sont consécutifs dans une suite de Laplace.

2. Les coordonnées du point U sont données par

$$\left.\begin{aligned}
\rho\, U_{12} &= 2v(uv+1)^3(uv-1)^3, \\
\rho\, U_{13} &= (uv+1)^3(u+v)^3(1-v^2), \\
\rho\, U_{14} &= (uv+1)^3(u-v)^3(1+v^2), \\
\rho\, U_{23} &= -(uv-1)^3(u+v)^3(1+v^2), \\
\rho\, U_{24} &= -(uv-1)^3(u-v)^3(1-v^2), \\
\rho\, U_{34} &= 2v(u+v)^3(u-v)^3.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

La représentation paramétrique (1) de la surface de Steiner fait correspondre aux sections planes des courbes du huitième ordre

$$\lambda_1(uv+1)^4 + \lambda_2(uv-1)^4 + \lambda_3(u+v)^4 + \lambda_4(u-v)^4 = 0 \tag{4}$$

du plan (u, v). Ces courbes ont des points quadruples à tangentes variables aux points impropres des axes u, v ; elles forment donc un système de degré 32. Mais ce système est composé au moyen de l'involution d'ordre huit engendrée par les opérations involutives

$$u' = -u, \qquad v' = -v, \tag{5}$$

$$u' = v, \qquad v' = u, \tag{6}$$

$$u' = \frac{1}{u}, \qquad v' = \frac{1}{v}. \tag{7}$$

La surface de Steiner représente les groupes de cette involution.

Par les formules (3), la surface (U) est représentée sur le plan (u, v). Aux sections hyperplanes de cette surface correspondent les courbes du treizième ordre

$$\lambda_{12} U_{12} + \lambda_{13} U_{13} + \cdots + \lambda_{34} U_{34} = 0. \tag{8}$$

Ces courbes ont un point d'inflexion à l'origine ($u = v = 0$), la tangente d'inflexion étant $v = 0$. Au point impropre de l'axe des u, elles ont un point quintuple absorbant 30 points d'intersection. Au point impropre de l'axe des v, elles ont un point septuple absorbant 52 points d'intersection. Les courbes (8) forment donc un système de degré 84. Mais ce système est composé au moyen de l'involution d'ordre quatre engendrée par les opérations (5), (7) et la surface (U) représente cette involution. Cette surface est donc d'ordre 21.

Sur la surface (U), les courbes u ($v = c^{te}$) sont des sextiques rationnelles et les courbes v ($u = c^{te}$) sont des courbes rationnelles du huitième ordre.

3. L'opération (6) effectuée sur les seconds membres des formules (3) donne

$$\frac{V_{12}}{U_{12}} = \frac{V_{13}}{U_{13}} = \frac{V_{14}}{-U_{14}} = \frac{V_{23}}{U_{23}} = \frac{V_{24}}{-U_{24}} = \frac{V_{34}}{-U_{34}}.$$

Les surfaces (U), (V) sont donc projectives

On obtient donc *deux surfaces rationnelles d'ordre 21, projectives, se succédant dans une suite de Laplace.*

Observons qu'entre la surface de Steiner et la surface (U), on a une correspondance (1, 2). La courbe de diramation de cette correspondance, sur la surface de Steiner, est la ligne parabolique de cette surface.

La suite de Laplace définie par les surfaces (U), (V) est d'ailleurs illimitée dans les deux sens et les quadriques de Lie de la surface de Steiner ont cinq points caractéristiques.

Liége, le 30 mars 1932.

MARCEL HAYEZ, Imprimeur, 112, rue de Louvain, Bruxelles.