Sur quelques quadriques associées aux points d'une surface,

par Lucien GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

On sait que l'on peut associer à une surface, en chacun de ses points, différentes quadriques : la quadrique de Lie, les quadriques de Darboux, des quadriques introduites par M. Bompiani [1], certaines quadriques signalées récemment par M. Calapso [2]. Nous avons montré [3] que la quadrique de Lie est la première quadrique d'une suite de quadriques associée à chaque point d'une surface. On en conclut l'existence d'une suite de faisceaux analogues au faisceau de Darboux [4]. Dans cette note, nous nous proposons de montrer que l'on peut également associer, à chaque point d'une surface, une infinité de quadriques analogues à celles qui ont été introduites par M. Bompiani.

1. Soit, dans un espace ordinaire S_3, une surface (x) rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 du point x de la surface (x)

(1) *Rendiconti della R. Acad. Lincei*, 1° sem., 1926, pp. 395-400.

(2) *Bull. de l'Acad. roy. de Belg.* (Cl. des Sc.), janvier 1932.

(3) Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, Cl. des Sc., 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-41.)

(4) Sur les quadriques de Darboux d'une surface (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, Cl. des Sc., 1930, pp. 1195-1205); Sur le faisceau des quadriques de Darboux d'une surface (*Idem*, 1931, pp. 888-892).

vérifient deux équations aux dérivées partielles, complètement intégrables, que l'on peut ramener à la forme (Wilczynski)

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2x = 0,$$

où a, b, c_1, c_2 sont des fonctions de u, v, Nous supposerons que a, b ne sont pas identiquement nulles, c'est-à-dire que la surface (x) n'est pas une réglée.

Soit Q l'hyperquadrique d'un espace linéaire S_5 à cinq dimensions qui représente les droites de l'espace S_3. Désignons par U, V les points de Q qui représentent respectivement les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} en un point x de la surface (x). Nous avons

$$U = | x \quad x^{10} |, \qquad V = | x \quad x^{01} |,$$
$$U^{10} + 2bV = 0, \qquad V^{01} + 2aU = 0.$$

Les points U, V sont consécutifs dans une suite de Laplace. Désignons par U_1, U_2, ... les transformés successifs de Laplace de U dans le sens des v, par V_1, V_2, ... ceux de V dans le sens des u. En posant

$$h_n = -(\log bh_1 \dots h_{n-1})^{11} + h_{n-1},$$
$$k_n = -(\log ak_1 \dots k_{n-1})^{11} + k_{n-1},$$

on a

$$U_n = U_{n-1}^{01} - U_{n-1}(\log bh_1 \dots h_{n-1})^{01},$$
$$V_n = V_{n-1}^{10} - V_{n-1}(\log ak_1 \dots k_{n-1})^{10},$$
$$U_n^{10} = h_n U_{n-1},$$
$$V_n^{01} = k_n V_{n-1}.$$

Si l'on représente par

$$\Omega(X, Y) = 0$$

l'équation de la polarité par rapport à Q, on a

$$\Omega(U, U) = 0, \quad \Omega(V, V) = 0, \quad \Omega(U, V) = 0,$$
$$\Omega(U_1, U_1) = -2\Delta, \qquad \Omega(V_1, V_1) = 2\Delta,$$

où

$$\Delta = | x \quad x^{10} \quad x^{01} \quad x^{11} |.$$

Le point U_n est le pôle de l'hyperplan $V_{n-2}\, V_{n-1}\, V_n\, V_{n+1}\, V_{n+2}$ et le point V_n, celui de l'hyperplan $U_{n-2}\, U_{n-1}\, U_n\, U_{n+1}\, U_{n+2}$.

2. Par un point d'une surface d'un espace à cinq dimensions passent cinq hyperplans coupant cette surface suivant des courbes ayant un tacnode au point considéré.

Les tangentes à ces courbes en ce point ont été appelées tangentes principales par C. Segre [1] ; les lignes enveloppées par ces droites sont les lignes principales de la surface. C. Segre a en outre montré que si la surface satisfait à une équation de Laplace, les caractéristiques de cette équation sont des lignes principales.

L'équation différentielle des lignes principales de la surface (U_n) est

$$\begin{vmatrix} U_n \\ U_n^{10} \\ U_n^{01} \\ U_n^{20}\, du + U_n^{11}\, dv \\ U_n^{11}\, du + U_n^{02}\, dv \\ U_n^{30}\, du^3 + 3\, U_n^{21}\, du^2\, dv + 3\, U_n^{12}\, du\, dv^2 + U_n^{03}\, dv^3 \end{vmatrix} = 0.$$

En tenant compte des relations vérifiées par les coordonnées de U_n, cette équation s'écrit

$$\begin{vmatrix} U_{n-2} \\ U_{n-1} \\ U_n \\ U_{n+1} \\ U_{n+2} \\ h_{n-2}\, h_{n-1}\, h_n\, U_{n-3}\, du^3 + U_{n+3}\, dv^3 \end{vmatrix} du\, dv = 0. \qquad (1)$$

Les points $U_{n-3}, \ldots, U_{n+2}$ sont indépendants, la suite de

(1) Le linee principali di una superficie di S_5 ed una proprietà caratteristica della superficie di Veronèse (*Rend. R. Acad. dei Lincei*, 1° sem., 1921, pp. 200-203, 227-231). — Voir aussi Bompiani, Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi (*Rend. Circ. Palermo*, 1921.)

Laplace considérée étant supposée ne pas appartenir à un hyperplan de S_5, ou, en d'autres termes, la surface (x) étant supposée ne pas appartenir à un complexe linéaire. Il existe donc une relation linéaire vérifiée par les coordonnées des points $U_{n-3}, \ldots, U_{n+3}$. Écrivons cette équation sous la forme

$$U_{n+3} = A U_{n-3} + B U_{n-2} + C U_{n-1} + D U_n + E U_{n+1} + F U_{n+2}. \quad (2)$$

En portant cette expression de U_{n+3} dans l'équation (1), celle-ci se réduit à

$$(h_{n-2} h_{n-1} h_n \, du^3 + A \, dv^3) \, du \, dv = 0.$$

Nous réserverons le nom de *lignes principales* de la surface (U_n) aux lignes définies par l'équation différentielle

$$h_{n-2} h_{n-1} h_n \, du^3 + A \, dv^3 = 0. \quad (3)$$

3 De la relation (2), on déduit

$$\Omega(U_{n+3}, V_n) = A \Omega(U_{n-3}, V_n),$$

qui va nous permettre de calculer A.

On a la relation

$$\Omega(U_{n+2}, V_n) = 0,$$

qui, dérivée par rapport à v, donne

$$\Omega(U_{n+3}, V_n) + k_n \Omega(U_{n+2}, V_{n-1}) = 0.$$

En appliquant cette formule pour les valeurs décroissantes de n, on en déduit

$$\Omega(U_{n+3}, V_n) = (-1)^{i+1} k_{n-i} \ldots k_n \, \Omega(U_{n+2-i}, V_{n-i-1}).$$

Pour $i = n - 1$, on a

$$\Omega(U_{n+3}, V_n) = (-1)^n k_1 \ldots k_n \, \Omega(U_3, V).$$

Or, on a

$$\Omega(U_3, V) = 4a \Delta ;$$

d'où

$$\Omega(U_{n+3}, V_n) = (-1)^n 4a\, k_1 \dots k_n\, \Delta.$$

De même, en dérivant par rapport à u la relation

$$\Omega(U_{n-3}, V_{n-1}) = 0,$$

on tire

$$\Omega(U_{n-3}, V_n) + h_{n-3}\, \Omega(U_{n-4}, V_{n-1}) = 0\,;$$

d'où

$$\Omega(U_{n-3}, V_n) = (-1)^{i+1} h_{n-3-i} \dots h_{n-3}\, \Omega(U_{n-4-i}, V_{n-1-i}).$$

En faisant $i = n - 4$ et en tenant compte de

$$\Omega(U, V_3) = -4\, b\, \Delta,$$

on obtient

$$\Omega(U_{n-3}, V_n) = (-1)^n 4\, b h_1 \dots h_{n-3}\, \Delta.$$

Il en résulte que l'on a

$$a\, k_1 \dots k_n = A\, b h_1 \dots h_{n-3}.$$

Par conséquent, l'équation différentielle (3) des lignes principales devient

$$b h_1 h_2 \dots h_n\, du^3 + a\, k_1 k_2 \dots k_n\, dv^3 = 0. \tag{I}$$

Il convient d'observer que le calcul précédent suppose implicitement $n \geq 4$. Mais si l'on refait le calcul pour $n = 0, 1, 2$ ou 3, on retrouve l'équation I pour ces valeurs de n. En particulier, pour $n = 0$ on a

$$b\, du^3 + a\, dv^3 = 0. \tag{I_0'}$$

4. Proposons-nous maintenant de traiter le même problème pour la surface (V_n). On trouve alors pour équation différentielle des lignes principales de cette surface, distinctes des lignes u, v, l'équation

$$A'\, du^3 + k_{n-2}\, k_{n-1}\, k_n\, dv^3 = 0,$$

où A′ est déterminé par

$$\Omega(V_{n+3}, U_n) = A' \, \Omega(V_{n-3}, U_n),$$

c'est-à-dire par

$$b h_1 \dots h_n = A' a k_1 \dots k_{n-3}.$$

On retrouve donc l'équation (I) non seulement pour $n \geq 4$, mais aussi pour $n = 0, 1, 2, 3$. Par suite,

les équations différentielles des lignes principales des surfaces (U_n), (V_n) *sont identiques.*

5. L'hyperplan $U_{n-2}\, U_{n-1}\, U_n\, U_{n+1}\, U_{n+2}$ contient tous les plans osculateurs au point U_n aux courbes tracées sur la surface (U_n) et passant par ce point ; cet hyperplan coupe la surface (U_n) suivant une courbe ayant un point triple en U_n, les trois tangentes à cette courbe en ce point étant les trois tangentes principales données par l'équation (I) (C. Segre, *loc. cit.*). De plus, l'hyperplan en question contient les espaces linéaires à trois dimensions osculateurs en U_n aux trois courbes principales passant par ce point (C. Segre, E. Bompiani, *loc. cit.*). Et de même au point V_n.

M. Bompiani [1], en utilisant ces propriétés pour la surface (U), dans le cas $n = 0$, est arrivé à la construction de quelques quadriques attachées au point x à la surface (x) et à une nouvelle démonstration d'un théorème de M. Cech.

L'équation différentielle (I_0) est celle des lignes de Darboux sur la surface (x). Le plan osculateur en U à une courbe principale de la surface (U) passant par ce point coupe l'hyperquadrique Q suivant une conique qui représente la demi-quadrique osculatrice à la réglée formée par les tangentes aux lignes u aux points d'une ligne de Darboux de la surface (x),

[1] La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato (*Rend. R. Acad. Lincei*, 1° sem., 1926, pp. 395-400). — Voir aussi l'appendice II au traité de MM. Fubini et Cech, *Geometria proiettiva differenziale*, t. II (Bologne, 1927, pp. 671-727).

le long de la droite xx^{10} qui correspond au point U considéré. On obtient ainsi trois quadriques associées au point x et, en considérant de même la surface (V), trois autres quadriques en général distinctes des premières.

Soient γ une ligne de Darboux de la surface (x), Γ_u la réglée lieu des tangentes aux asymptotiques u aux points de γ, Γ_v la réglée lieu des tangentes aux asymptotiques v aux points de γ. La réglée Γ_u est représentée, sur la surface (U), par une ligne principale γ_u de cette surface. De même, Γ_u est représentée sur (V) par une principale γ_v. L'espace à trois dimensions osculateur à γ_u en un de ses points U appartient à l'hyperplan $U_2 \ldots V_1$, polaire de V par rapport à Q ; la conjuguée de cet espace par rapport à Q est donc une droite passant par V. Par suite, la courbe γ est la ligne flecnodale de la surface Γ_u. Et de même de la surface Γ_v. De plus; les génératrices de Γ_v sont les tangentes flecnodales de Γ_u et inversement. C'est là le résultat dû à M. Cech auquel il est fait allusion plus haut.

Les lignes de Segre sur la surface (x) sont données par l'équation différentielle

$$b du^3 - u dv^3 = 0.$$

A ces courbes correspondent, sur les surfaces (U), (V) des courbes définies sur la même équation différentielle. Considérons un point U de la surface (U), une courbe γ_u correspondant à une courbe de Darboux, passant par ce point, et une courbe γ'_u correspondant à une courbe de Segre, passant également par ce point et telle que les tangentes en U à γ_u, γ'_u soient conjuguées par rapport aux lignes u, v. Les plans osculateurs à γ_u, γ'_u en U se coupent suivant une droite et les trois droites ainsi obtenues pour les trois positions possibles de γ_u sont dans un même plan. A la section de Q par ce plan correspond une demi-quadrique attachée à la surface (x) au point x. On obtient une seconde demi-quadrique par les mêmes considérations sur la surface (V). Les deux demi-quadriques ont pour supports des quadriques en général distinctes; ce sont les quadriques de M. Bompiani.

6. Revenons aux surfaces (U_n), (V_n) et supposons $n \geq 2$. Entre les gerbes de sommets U_n, V_n, situées respectivement dans les hyperplans $U_{n-2} \ldots U_{n+2} \ldots$, $V_{n-2} \ldots V_{n+2}$, nous avons une réciprocité déterminée par la polarité par rapport à Q.

Tout point de l'hyperplan $V_{u-2} \ldots V_{u+2}$ peut être représenté par

$$X = \xi_{-2} V_{n-2} + \xi_{-1} V_{n-1} + \xi V_n + \xi_1 V_{n+1} + \xi_2 V_{n+2}$$

et tout point de l'hyperplan $U_{n-2} \ldots U_{n+2}$ par

$$Y = \eta_{-2} U_{n-2} + \eta_{-1} U_{n-1} + \eta U_n + \eta_1 U_{n+1} + \eta_2 U_{n+2}.$$

L'équation de la réciprocité considérée sera

$$\Omega(X, Y) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned} &\xi_{-2}[\eta_1 \Omega(U_{n+1}, V_{n-2}) + \eta_2 \Omega(U_{n+2}, V_{n-2})] + \xi_{-1}\eta_2 \Omega(U_{n+2}, V_{n-1}) \\ &+ \xi_2[\eta_{-1}\Omega(U_{n-1}, V_{n+2}) + \eta_{-2}\Omega(U_{n-2}, V_{n+2})] + \xi_1\eta_{-2}\Omega(U_{n-2}, V_{n+1}) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nous avons [1]

$$\begin{aligned} &\Omega(U_{n+2}, V_{n-1}) = (-1)^{n+1} . 4ak_1 \ldots k_{n-1}\Delta, \\ &\Omega(V_{n+2}, U_{n-1}) = -(-1)^{n+1} 4bh_1 \ldots h_{n-1}\Delta, \\ &\Omega(U_{n+1}, V_{n-2}) = (-1)^n . 4ak_1 \ldots k_{n-2}\Delta, && (2) \\ &\Omega(V_{n+1}, U_{n-2}) = -(-1)^n . 4bh_1 \ldots h_{n-2}\Delta. && (3) \end{aligned}$$

En dérivant la relation (2) par rapport à v, on a

$$\Omega(U_{n+2}, V_{n-2}) + k_{n-2}\Omega(U_{n+1}, V_{n-3}) = (-1)^n 4ak_1 \ldots k_{n-2}\left(\log\frac{ak_1 \ldots k_{n-2}}{bh_1 \ldots h_{n+1}}\right)^{01} \Delta.$$

---

[1] L. Godeaux, Sur les quadriques de Darboux d'une surface. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, Cl. des Sc., 1930, pp. 1195-1205.)

En appliquant cette relation en remplaçant successivement n par $n-1$, $n-2$ ..., on trouve

$$\Omega(\mathrm{U}_{n+2}, \mathrm{V}_{n-2}) = (-1)^n 4ak_1 \ldots k_{n-2}\left(\log \frac{a^{n-1}k_1^{n-2}\ldots k_{n-3}^2 k_{n-2}}{b^{n+2}h_1^{n+1}\ldots h_n^2 h_{n+1}}\right)^{01}\Delta.$$

De même, en dérivant la relation (3) par rapport à u, et en appliquant la formule obtenue par les valeurs $n-1$, $n-2$, ..., on arrivera à la relation

$$\Omega(\mathrm{V}_{n+2}, \mathrm{U}_{n-2}) = -(-1)^n 4bh_1 \ldots h_{n-2}\left(\log \frac{b^{n-1}h_1^{n-2}\ldots h_{n-2}}{a^{n+3}k_1^{n+1}\ldots k_{n+1}}\right)^{10}\Delta.$$

La relation (1) devient donc

$$\left.\begin{aligned} &ak_1k_2\ldots k_{n-2}\left[\left(\log\frac{a^{n-1}\ldots k_{n-2}}{b^{n+2}\ldots h_{n+1}}\right)^{01}\xi_{-2}\eta_2 + \xi_{-2}\eta_1 - k_{n-1}\xi_{-1}\eta_2\right] \\ &-bh_1\ldots h_n\left[\left(\log\frac{b^{n-1}\ldots h_{n-2}}{a^{n+2}\ldots k_{n+1}}\right)^{10}\xi_2\eta_{-2} + \xi_1\eta_{-2} - h_{n-1}\xi_2\eta_{-1}\right] = 0. \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

7. Soit γ_u une ligne principale de la surface(U_n). Considérons, sur la surface (V_n), la ligne principale correspondante γ_v. Si U_n est un point de γ_u, V_n le point correspondant de γ_v, les coefficients $\frac{du}{dv}$, donnés par l'équation (I), des tangentes à ces courbes en ces points, sont égaux.

Le plan osculateur à la courbe γ_u en U_n est déterminé par ce point et par les points

$$h_n \mathrm{U}_{n-1} du + \mathrm{U}_{n+1} dv, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &h_{n-1}h_n\mathrm{U}_{n-2}du^2 + (h_n^{10}du^2 + h_n d^2u)\,\mathrm{U}_{n-1} \\ &+ [(\log h_{n+1})^{01}dv^2 + d^2v]\,\mathrm{U}_{n+1} + \mathrm{U}_{n+2}dv^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Le plan osculateur à la courbe γ_v en V_n est déterminé par les points V_n et

$$\mathrm{V}_{n+1}du + k_n\mathrm{V}_{n-1}dv, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{V}_{n+2}du^2 + [(\log k_{n+1})^{10}du^2 + d^2u]\,\mathrm{V}_{n+1} \\ &+ (k_n^{01}dv^2 + k_n d^2v)\,\mathrm{V}_{n-1} + k_nk_{n-1}\mathrm{V}_{n-2}dv^2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Les points (1) et (3) sont conjugués par rapport à la réciprocité (II). Si l'on exprime que les points (1) et (5), puis (2) et (3) sont conjugués par rapport à la réciprocité (II), on trouve

$$b h_1 \dots h_n du^3 + a k_1 \dots k_n dv^3 = 0,$$

c'est-à-dire une identité.

Par contre, les points (2) et (5) ne sont pas en général conjugués par rapport à (II). Il en résulte donc que le plan conjugué par rapport à Q du plan osculateur en U_n à la courbe γ_u est distinct du plan osculateur à la courbe γ_v en V_n, mais passe par la tangente à cette courbe en ce point. Ce plan osculateur coupe Q suivant une conique qui représente une demi-quadrique ayant comme support une quadrique que nous désignerons par Ψ_n. De même, le plan osculateur en V_n à la courbe γ_v coupe Q suivant une conique représentant une demi-quadrique de support Ψ'_n distinct de Ψ_n,

Les quadriques Ψ_n, Ψ'_n passent par les droites représentées par les points où Q est rencontrée par les tangentes à γ_u en U_n et γ_v en V_n, formant un quadrilatère gauche. Ce quadrilatère appartient à la quadrique Φ_{n-1}, représentée par les sections de Q par les plans conjugués $U_{n-1} U_n U_{n+1}$, $V_{n-1} V_n V_{n+1}$.

On arrive donc à l'existence de *trois couples de quadriques attachées d'une manière intrinsèque au point* x *de la surface* (x), *les quadriques de chaque couple se coupant suivant quatre droites appartenant à la quadrique* Φ_{n-1}.

8. Considérons sur la surface (U_n) les courbes définies par l'équation différentielle

$$b h_1 \dots h_n \; u^3 - a k_1 \dots k_n dv^3 = 0, \tag{III}$$

et soit γ'_u celle de ces courbes passant par U_n, conjuguée de γ_u. Les plans osculateurs en U_n aux courbes γ_u, γ'_u ont en commun une droite définie par les équations

$$\rho\eta_{-2} = h_{n-1} h_n du^2 dv,$$

$$\rho\eta_{-1} = h_n [(\log h_n)^{10} du^2 dv + dv d^2u - du d^2v],$$

$$\rho\eta_1 = (\log h_{n+1})^{01} du dv^2,$$

$$\rho\eta_2 = du dv^2.$$

Cette droite appartient au plan représenté par

$$3h_{n+1}\eta_{-1} - 3(\log h_n)^{10}\eta_{-2} - \left(\log\frac{ak_1\ldots k_n}{bh_1\ldots h_n}\right)^{10}\eta_{-2}$$

$$+ h_n h_{n+1}\left(\log\frac{bh_1\ldots h_n}{ak_1\ldots h_n}\right)^{01}\eta_2 = 0,$$

$$\eta_1 - \eta_2(\log h_{n+1})^{01} = 0.$$

Ce plan coupe l'hyperquadrique Q suivant une conique qui représente une demi-quadrique de support B_n, analogue à la quadrique de Bompiani dont il a été question plus haut. Il contient les trois droites formées en partant des trois courbes γ_u passant par le point U_n.

En partant du point V_n, on obtient de même une quadrique B'_n en général distincte de la première.

On voit sans peine que les quadriques B_n, B'_n coupent la quadrique Φ_{n-2} chacune suivant quatre droites.

9. Considérons maintenant les surfaces (U_1), (V_1). Tout point de l'hyperplan $UV\ldots V_3$ étant représenté par

$$\xi_{-2}U + \xi_{-1}V + \xi V_1 + \xi_1 V_2 + \xi_2 V_3$$

et tout point de l'hyperplan $VU\ldots U_3$ par

$$\eta_{-2}V + \eta_{-1}U + \eta U_1 + \eta_1 U_2 + \eta_2 U_3,$$

la réciprocité entre ces deux hyperplans est représentée par

$$\left.\begin{array}{l} \xi_2\eta_{-2}(\log a_3k_1^2k_2)^{10} - \xi_1\eta_{-2} - 2b\xi_2\eta_{-1} - \xi_{-2}\eta_2(\log b^3h_1^2h_2)^{01} \\ \qquad + \xi_{-2}\eta_1 + 2a\xi_{-1}\eta_2 = 0. \end{array}\right\} \quad (\mathrm{II}')$$

On parvient, comme dans le cas $n \geq 2$, à l'existence de trois couples de quadriques Ψ_1, Ψ'_1, les quadriques d'un même couple coupant la quadrique de Lie Φ suivant un même quadrilatère gauche.

Les quadriques B_1, B'_1 se définissent comme dans le cas $n \geq 2$, les formules trouvées dans ce cas étant applicables.

Dans le cas des surfaces (U), (V), si l'on représente les points des hyperplans $U_1 \dots V_2$, $V_1 \dots U_2$ respectivement par

$$\xi_{-2}U_1 + \xi_{-1}U + \xi V + \xi_1 V_1 + \xi_2 V_2,$$
$$\eta_{-2}V_1 + \eta_{-1}V + \eta U + \eta_1 U_1 + \eta_2 U_2,$$

la réciprocité entre les gerbes de sommets V, U dans ces hyperplans est représentée par

$$\xi_2\eta_{-2}(\log ak_1)^{10} - \xi_1\eta_{-2} + \xi_2\eta_{-1} - \xi_{-2}\eta_2(\log bh_1)^{01}\xi_{-2}\eta_1 - \xi_{-1}\eta_2 = 0.$$

Les trois couples de quadriques Ψ, Ψ^1 et les deux quadriques B, B′ s'obtiennent de la même manière.

Liége, le 8 janvier 1932.