EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, N° 2, 1932.

Sur quelques droites associées aux points d'une surface,

par LUCIEN GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liége.

Nous indiquons dans cette note la construction de quelques droites associées aux points d'une surface, d'une manière intrinsèque. Nous avons rencontré l'une de ces droites dans un travail antérieur (¹).

1. Soit (x) une surface, non réglée, n'appartenant pas à un complexe linéaire, rapportée à ses asymptotiques u, v. A un point non parabolique x de cette surface, associons la réglée R_u formée par les tangentes aux lignes u aux points de la courbe v passant par x et la réglée R_v lieu des tangentes aux lignes v aux points de la ligne u passant par x. Considérons ensuite le complexe linéaire Γ_u osculateur à la réglée R_u le long de la génératrice passant par x et le complexe linéaire Γ_v osculateur à la réglée R_v le long de la génératrice passant par le point x. Les plans focaux du point x

(¹) Sur quelques éléments associés aux points d'une surface. (*Mémoires de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, sous presse.)

par rapport à ces complexes ont en commun une droite l_2, et le plan tangent à la surface (x) au point x contient une droite l'_2 appartenant à ces deux complexes. Ces droites l_2, l'_2 sont liées d'une manière intrinsèque au point x de la surface (x).

Les coordonnées projectives homogènes du point x satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles, complètement intégrable, que l'on peut ramener à la forme

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0,$$

a et b n'étant pas identiquement nulles (¹). Tout point de l'espace peut être représenté par

$$z_1 x + z_2 x^{10} + z_3 x^{01} + z_4 x^{11}.$$

Les droites l_2, l'_2 sont représentées respectivement par les équations

$$\frac{z_2}{(\log b^2 h_1)^{01}} = \frac{z_3}{(\log a^2 k_1)^{10}} = \frac{z_4}{-2}, \qquad (l_2)$$

$$2z_1 + z_2 (\log a^2 k_1)^{10} + z_3 (\log b^2 h_1)^{01} = z_4 = 0. \qquad (l'_2)$$

Ces droites sont conjuguées par rapport à la quadrique de Lie de la surface (x) relative au point x.

2. Désignons par Q l'hyperquadrique représentant, dans un espace linéaire à cinq dimensions, les droites de l'espace. Soient U, V les points de Q représentant les droites xx^{10}, xx^{01}. Les points U, V appartiennent à une suite de Laplace

$$\ldots, U_2, U_1, U, V, V_1, V_2, \ldots, \qquad (1)$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u (Bompiani). Le point V_2 est la seconde image du complexe Γ_u, le point U_2 celle du complexe Γ_v (²).

De même que l'on a considéré les droites l_2, l'_2 associées aux complexes U_2, V_2, on peut considérer les droites l_n, l'_n associées aux complexes U_n, V_n. La droite l_n est la droite passant par le point x et la droite l'_n celle qui appartient au plan tangent à la surface (x) au point x, faisant partie des deux complexes linéaires.

(¹) Voir, pour les notations et les indications bibliographiques, notre note Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, Cl. des Sc., 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-41). — Voir aussi la note Sur les tangentes de Darboux et de Segre en un point d'une surface (*Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1932, n° 1).

(²) Sur les lignes... (*loc. cit.*).

La droite l_3 a pour équations

$$\left.\begin{aligned}&[2z_2 + z_4(\log b)^{01}](\log b^3 h_1^2 h_2)^{01} - 2a[2z_3 + z_4(\log a)^{10}]\\ &\qquad - z_4[\beta + (\log bh_1)^{02} - (\log bh_1)^{01}(\log bh_1 h_2)^{01}] = 0,\\ &[2z_3 + z_4(\log a)^{10}](\log a^3 k_1^2 k_2)^{10} - 2b[2z_2 + z_4(\log b)^{01}]\\ &\qquad - z_4[\alpha + (\log ak_1)^{20} - (\log ak_1)^{10}(\log ak_1 k_2)^{10}] = 0,\end{aligned}\right\} (l_3)$$

et la droite l'_3,

$$\begin{vmatrix} 2z_1 + z_2(\log a)^{10} + z_3(\log b)^{01} & z_2 & z_3 \\ -\beta - (\log bh_1)^{02} + (\log bh_1)^{01}(\log bh_1 h_2)^{01} & (\log b^3 h_1^2 h_2)^{01} & 2a \\ -\alpha - (\log ak_1)^{20} + (\log ak_1)^{10}(\log ak_1 k_2)^{10} & 2b & (\log a^3 k_1^2 k_2)^{10} \end{vmatrix} = 0. \quad (l'_3)$$

On a posé

$$h_i = -(\log bh_1 \dots h_{i-1})^{11} + h_{i-1}, \quad k_i = -(\log ak_1 \dots k_{i-1})^{11} + k_{i-1},$$
$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1),$$
$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2).$$

Les équations des droites l_4, l'_4, .. peuvent s'obtenir par des formules récurrentes.

Observons encore que les plans focaux du point x par rapport aux complexes linéaires représentés par les points U_1, V_1 coïncident avec le plan tangent au point x à la surface (x); les droites l'_1, l'_1 sont donc indéterminées.

3. Les équations différentielles des développables des congruences (l_2), (l'_2) coïncident en l'équation

$$\alpha_1 du^2 + 2(h_2 - k_2)\,du\,dv - \beta_1 dv^2 = 0,$$

moyennant

$$\alpha_1 = \alpha + (\log ak_1)^{20} + (\log ak_1)^{10}(\log a^2 k_1)^{10} - 2b(\log bh_1)^{01},$$
$$\beta_1 = \beta + (\log bh_1)^{02} + (\log bh_1)^{01}(\log b^2 h_1)^{01} - 2a(\log ak_1)^{10}.$$

On établit que la condition nécessaire et suffisante pour que les développables des congruences (l_2), (l'_2) correspondent aux courbes u, v est que les quadriques de Lie de la surface (x) n'aient que deux points caractéristiques. En d'autres termes, les conditions $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$ entraînent $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et réciproquement. Les droites l_2, l'_2 coïncident alors avec les directrices de Wilczynski.

On arrive aux mêmes conclusions, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, lorsqu'on exprime que la droite l_3 coïncide avec l_2 ou avec la première directrice de Wilczynski.

La considération des droites l_n, l'_n permet d'écrire les conditions pour que la suite de Laplace (1) soit périodique, comme nous le prouverons dans un travail plus étendu.

Liége, le 2 février 1932.

MARCEL HAYEZ, Imprimeur, 112, rue de Louvain, Bruxelles.