EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége,*
N° 3, 1932.

Construction d'un plan double de genres un et de rang trois,

par LUCIEN GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liége.

Dans un travail antérieur [1], nous avons déterminé les plans doubles de genres un ($p_a = P_4 = 1$) et de rang trois, c'est-à-dire représentant une involution d'ordre trois appartenant à une surface de genres un. L'un de ces plans doubles possède une courbe de diramation du huitième ordre ayant deux points quadruples et six points doubles de rebroussement. De plus, il existe ∞^1 courbes du quatrième ordre passant doublement par les deux points quadruples et simplement par les six points de rebroussement, touchant la courbe de diramation en deux points (variables).

Ce plan double est birationnellement équivalent à une quadrique double Q_0 ayant une courbe de diramation du huitième ordre, Γ, coupée par les génératrices de chaque mode en quatre points et possédant six points de rebroussement $A_1, A_2, ..., A_6$. Il existe de plus ∞^1 biquadratiques C passant par les points de rebroussement et touchant la courbe Γ en deux points variables.

Nous nous proposons d'indiquer une construction de la quadrique double en question dans le cas où les six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ déterminent une cubique gauche K irréductible et n'appartenant pas à la quadrique Q_0. Nous supposerons de plus, pour plus de simplicité, que cette quadrique n'est pas un cône.

Considérons les ∞ quadriques Q passant par les six points A_1, $A_2, \ldots, A_6$ et rapportons-les projectivement aux plans d'un espace Σ'. Entre l'espace Σ' et l'espace Σ des points $A_1, A_2, \ldots, A_6$, nous obtenons ainsi une correspondance (1, 2) étudiée par Reye et De Paolis [2]. Nous désignerons par I_2 l'involution formée par les couples de points de Σ qui correspondent aux points de Σ'.

---

(1) L. GODEAUX, Sur les plans doubles de genres un et de rang trois. (*Annaes da Academia Polytechnica do Porto*, 1920, t. XV.)

(2) REYE, Ueber Strahlensysteme zweiter Classe und die Kümmer'sche Fläche vierter Ordnung mit zechzehn Knotenpunkten. (*Journal de Crelle*, 1879, t. LXXXVI.)

DE PAOLIS, Alcune proprietà della superficie di Kummer. (*Rendiconti R. Accademia dei Lincei*, juillet 1890.)

A la quadrique Q_0 correspond, dans Σ', un plan α'_0 et aux courbes C correspondent des droites c' de ce plan. A la courbe Γ correspond une courbe Γ' de α'_0. La courbe Γ' doit nécessairement contenir ∞^1 groupes de l'involution I_2, car autrement la courbe Γ' aurait ∞^1 tangentes doubles, ce qui est absurde. Il en résulte que la courbe Γ' est une conique enveloppée par les droites c'.

Désignons par Φ_i le cône qui projette la cubique gauche K du point A_i; ce cône appartient au système $|Q|$ et il lui correspond un plan α'_i. Les six plans α'_1. $\alpha'_2, \ldots, \alpha'_6$ passent d'ailleurs par un même point A' et sont tangents à un cône du second degré.

On sait qu'aux points du plan α'_i correspondent des couples de points de Σ formés d'un point infiniment voisin de A_i et d'un point du cône Φ_i. A une conique de Σ' correspond une courbe d'ordre huit ayant un point double en A_i. Pour que ce point soit cuspidal, il faut que la conique soit tangente au plan α'_i. La conique Γ' est donc tangente aux plans $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_6$.

Examinons de plus près cette question. Soit a_1 la tangente à la courbe Γ au point A_1 ; nous supposerons que cette droite n'appartient pas au cône Φ_1. Si A'_1 est le point de contact de la conique Γ' avec le plan α'_1, aux plans de Σ' passant par A'_1 correspondent les quadriques Q tangentes en A_1 à la droite a_1. Parmi ces quadriques se trouvent Q_0, le cône Φ_1 et ∞^1 quadriques contenant la droite a_1. La base du faisceau formé par ces quadriques est complétée par une cubique gauche K_1 passant par les cinq points $A_2, A_3, \ldots, A_6$ et ayant pour bisécante la droite a'_1. A l'ensemble de la droite a_1 et de la cubique gauche K_1 correspond une droite a'_1 passant par A'_1. Cette droite a'_1 est d'ailleurs une bitangente de la surface de Kümmer lieu des points de diramation de la correspondance entre les espaces Σ', Σ. La cubique gauche K_1 coupe le cône Φ_1 en un point B_1 qui correspond au point A'_1 et forme un groupe de I_2 avec le point de a_1 infiniment voisin de A_1. Le point B_1 appartient également à la quadrique Q_0. La courbe Γ touche, en B_1, le cône Φ_1, la tangente en ce point n'étant pas une génératrice de ce cône.

On sait qu'aux cônes circonscrits à la cubique gauche K correspondent dans Σ' des plans passant par A' et enveloppant un cône du second ordre tangent aux plans $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_6$. Ce cône contient donc la conique Γ' et par suite les biquadratiques C bitangentes à la courbe Γ sont découpées sur la quadrique Q_0 par les cônes projetant la cubique K de ses points.

Les raisonnements précédents s'appliquent également aux points $A_2, A_3, \ldots, A_6$.

De ce qui précède, on conclut à l'existence de la courbe Γ et par suite de la quadrique double envisagée. Observons que les raisonnements que l'on vient de faire subsistent lorsque la quadrique Q_0 est un cône dont le sommet est distinct des points $A_1, A_2, \ldots, A_6$.

On obtient aisément les équations de la courbe Γ. Si la cubique gauche K a pour équations

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \right\| = 0$$

et la quadrique Q_0 l'équation

$$a_x^2 = 0,$$

la courbe Γ a pour équations

$$a_x^2 = 0,$$
$$(x_2x_3 - x_1x_4)^2 - 4(x_2x_4 - x_3^2)(x_1x_3 - x_2^2) = 0.$$

On peut encore remarquer que la courbe Γ contenant ∞^1 groupes d'une involution d'ordre deux et la quadrique Q_0 ∞^2 couples de cette involution, la quadrique double envisagée possède une seconde transformation birationnelle involutive elle-même.

Liége, le 10 mars 1932.

MARCEL HAYEZ, Imprimeur, 112, rue de Louvain, Bruxelles.