Extrait du Bulletin de l'A. E. E. S., nº 6. 1932.

Sur la théorie des polaires réciproques

Un simple raisonnement géométrique permet d'obtenir la plupart des propriétés de la polaire réciproque d'une quadrique ; c'est ce que nous nous proposons de montrer ici.

Soient F et Φ deux quadriques de la première ou de la seconde classe, non coniques, Φ' la polaire réciproque de Φ par rapport à F. Φ' est donc le lieu des pôles, par rapport à F, des plans tangents à la quadrique Φ'.

Théorème I. — *Si la quadrique Φ est réglée, il en est de même de la quadrique Φ'.*

Supposons que la quadrique Φ soit réglée ; elle admet deux systèmes de génératrices rectilignes $/r/$, $/s/$.

Les plans passant par une génératrice r de la quadrique Φ sont tangents à cette quadrique, donc le lieu des pôles de ces plans par rapport à F, c'est-à-dire la droite r' conjuguée de r par rapport à F, appartient à la quadrique Φ'. Cette dernière admet donc un premier système de génératrices rectilignes $/r'/$. Elle en admet de même un second, $/s'/$, formé par les conjuguées s' des droites s par rapport à F. Une droite s' ne peut d'ailleurs jamais coïncider avec une droite r', donc la quadrique admet deux systèmes distincts de génératrices rectilignes.

Théorème II. — *La polaire réciproque de la quadrique Φ' par rapport à F est la quadrique Φ.*

Nous devons démontrer que le plan polaire d'un point de Φ par rapport à F est tangent à la quadrique Φ'.

Supposons en premier lieu que la quadrique Φ soit réglée. Par un point P de Φ passent deux génératrices r, s de cette quadrique.

Leurs conjuguées r', s' par rapport à F appartiennent à Φ' ; le plan polaire du point P par rapport à F est le plan contenant les droites r', s' et ce plan est tangent à Φ' au point commun à ces deux droites, d'où le théorème.

Supposons maintenant que Φ ne soit pas réglée. Soient P un point de Φ, ω le plan tangent à Φ en ce point, P′ le pôle de ω, ω' le plan polaire de P par rapport à F. Le point P′ appartient à ω'. Nous devons démontrer que le plan ω' est tangent à Φ' ; nous démontrerons en outre que le point de contact est P′. Considérons une droite p passant par P et située dans ω. p ne peut appartenir à Φ puisque cette quadrique n'est pas réglée ; elle est tangente à Φ en P. La conjuguée p' de p par rapport à F passe par P′ et est située dans ω'. Si p' n'est pas tangente à Φ' en P′, elle rencontre cette quadrique en un second point R′ au moins, distinct de P′. Le plan polaire ρ de R′ par rapport à F est tangent à Φ et d'autre part passe par p. On pourrait donc mener, par la tangente p à Φ en P, deux plans tangents distincts ω, ρ, ce qui est impossible. Donc la droite p' est tangente à Φ' en P′ et par suite le plan ω' est tangent à Φ' en P′, ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRE. — *La quadrique Φ' ne peut être réglée que si Φ est réglée.*

REMARQUE. — La quadrique Φ' ne peut être un cône (ou un cylindre), car tous ses plans tangents passeraient par un point fixe (le sommet du cône) et leurs pôles par rapport à F appartiendraient tous au plan polaire de ce point fixe, ce qui est absurde.

INTERSECTION DE LA QUADRIQUE Φ' AVEC LE PLAN IMPROPRE. — Désignons par σ le plan impropre (ou plan de l'infini). Si P′ est un point de l'intersection de la quadrique Φ' et du plan σ, son plan polaire ω par rapport à F est un plan diamétral de cette quadrique ; il passe donc par le centre S (unique par hypothèse) de F. Le plan ω est d'autre part tangent à Φ. Les points de Φ' situés dans le plan impropre σ sont donc les pôles des plans tangents à Φ menés par le centre S de F.

Deux cas peuvent se présenter :

1) Le point S n'appartient pas à Φ ;

2) Le point S appartient à Φ.

Plaçons-nous dans le premier cas. Les points de contact des plans tangents à Φ menés par S sont situés sur l'intersection de Φ et du plan polaire σ' de S par rapport à Φ. Ces plans sont tangents au cône projetant du point S la courbe (σ', Φ), ils ne seront donc réels que si ce cône et par suite cette courbe sont réels. Par conséquent, si le plan σ' coupe Φ suivant une conique réelle, la quadrique Φ' coupe le plan impropre σ suivant une conique réelle. Cette conique ne peut être formée de deux droites, car alors il en serait de même de la conique (σ', Φ) et S appartiendrait à Φ. Dans ce premier cas, la quadrique Φ' sera donc de la première classe, non conique, et sera précisément un hyperboloïde.

Si le plan σ' coupe la quadrique Φ suivant une conique imaginaire, Φ' coupera le plan σ suivant une conique imaginaire ou, en d'autres termes, Φ' ne rencontrera pas σ. La quadrique Φ' sera un ellipsoïde.

Plaçons-nous maintenant dans le second cas, où S appartient à Φ. Soit σ' le plan tangent à Φ au point S. Deux cas peuvent se présenter suivant que Φ est réglée ou non.

Si Φ est réglée, le plan σ' contient deux génératrices r, s de cette quadrique et ces droites se coupent en S. Les conjuguées r', s' de r, s, par rapport à F, appartiennent d'une part au plan σ et d'autre part à la quadrique Φ'. Par suite la quadrique Φ' est un paraboloïde hyperbolique.

Si Φ n'est pas réglée, le pôle S′ du plan σ' par rapport à F est le point de contact du plan impropre σ avec la quadrique Φ' et le plan σ ne contient aucun autre point de cette quadrique. Par suite, celle-ci est un paraboloïde elliptique.

En résumé :

La polaire réciproque, par rapport à une quadrique F de centre unique S, d'une quadrique Φ ne passant pas par S, est une quadrique Φ' de la première classe (non conique).

Si le plan polaire σ' du point S par rapport à Φ ne coupe pas cette dernière quadrique, la quadrique Φ' est un ellipsoïde. Si le plan σ' coupe la quadrique Φ, la quadrique Φ' est un hyperboloïde à une ou à deux nappes suivant que Φ est une quadrique réglée ou non.

La polaire réciproque, par rapport à une quadrique F de centre unique S, d'une quadrique Φ passant par S, est un paraboloïde hyperbolique ou elliptique suivant que Φ est une quadrique réglée ou non.

REMARQUES. — Si la quadrique Φ est un paraboloïde ne passant pas par S, la quadrique Φ' passe par S.

Si la quadrique Φ est un paraboloïde passant par S, Φ' passe par S.

Si la quadrique Φ est de la première classe et passe par S, Φ' ne passe pas par S. Le plan polaire σ'' de S par rapport à Φ' coupe cette quadrique suivant une conique réelle ou imaginaire suivant que Φ est un hyperboloïde ou un ellipsoïde.

POLAIRE RÉCIPROQUE D'UNE CONIQUE PAR RAPPORT A UNE QUADRIQUE. — Soient Γ une conique, γ son plan. Nous appellerons polaire réciproque de la conique Γ par rapport à une quadrique F, non conique (de la première ou de la seconde classe) le lieu des pôles par rapport à cette quadrique, des plans passant par les tangentes à la conique Γ.

Si p est une tangente à Γ, les pôles par rapport à F des plans passant par p sont situés sur la conjuguée p' de p. La droite p appartenant au plan γ, la droite p' passe par le pôle C' de ce plan par rapport à F. La polaire réciproque de Γ est donc un cône Γ' de sommet C'.

On peut toujours considérer la conique Γ comme l'intersection du plan γ et d'une quadrique non conique Φ. Soit Φ' la polaire réciproque de Φ par rapport à F. Les plans tangents à Φ aux points de Γ passent par un point fixe C, pôle de γ par rapport à Φ. Les pôles de ces plans par rapport à F sont situés sur Φ', sur Γ' et dans le plan polaire γ' du point C par rapport à F. Il en résulte que γ' coupe Γ' suivant une conique et que ce cône est la projection de cette conique du point C'. Le cône Γ' est donc du second ordre.

La polaire réciproque d'une conique est un cône du second ordre.

Soit ω' un plan passant par C' ; son pôle P par rapport à F appartient au plan γ. Suivant que par P on peut mener deux tangentes, ou une tangente, ou qu'on peut ne mener aucune tangente à Γ, le plan ω' coupera le cône Γ' suivant deux droites, ou suivant une seule droite, ou ne contiendra aucune droite de ce cône. On en conclut en particulier que les plans polaires des points de Γ par rapport à F sont les plans tangents au cône Γ'.

Pour que le cône Γ' soit un cylindre, il faut que son sommet C' appartienne au plan impropre σ et que par suite le plan γ soit un plan diamétral de la quadrique F. Si par le centre S de F passent deux tangentes de Γ, le plan σ contient deux génératrices de Γ' et ce cylindre est hyperbolique. Si S appartient à Γ, le plan σ est tangent au cylindre Γ' et celui-ci est parabolique. Si enfin par S ne passe aucune tangente réelle de Γ, le cylindre Γ' n'a aucune génératrice dans le plan σ et est elliptique.

Pour que Γ' soit un cône proprement dit, il faut que le plan γ ne soit pas un plan diamétral de la quadrique F.

La polaire réciproque d'une conique par rapport à une quadrique F non conique à centre unique S, est un cône proprement dit si le plan de la conique ne passe pas par le point S ; c'est un cylindre hyperbolique, parabolique ou elliptique si le plan de la conique passe par S et si par ce point on peut mener respectivement deux, une ou aucune tangentes à la conique.

Liége, le 31 décembre 1931.

Lucien GODEAUX,
Professeur à la Faculté des Sciences.