ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*. Séance du 10 janvier 1925, n° 1, pp. 11-20.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — L'Univers de De Sitter et la métrique cayleyenne elliptique,

par L. GODEAUX, professeur à l'École militaire (*).

Dans un travail récent (**), nous avons montré que la métrique cayleyenne elliptique permettait d'obtenir une représentation commode de l'Univers d'Einstein, d'élément linéaire

$$ds^2 = -dr^2 - \sin^2 \frac{r}{R} [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] + c^2 dt^2,$$

ou, plutôt, des coupes à temps t constants de cet Univers. Dans ce nouveau travail, nous allons utiliser le même procédé pour étudier l'Univers de De Sitter, d'élément linéaire (***)

$$ds^2 = -dr^2 - R^2 \sin^2 \frac{r}{R} [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] + c^2 \cos^2 \frac{r}{R} dt^2.$$

L'utilisation de la métrique cayleyenne elliptique revient au fond à effectuer un changement de variables permettant d'intégrer les équations différentielles des rayons lumineux.

1. Considérons l'espace (D) défini par l'élément linéaire

$$ds^2 = -dr^2 - R^2 \sin^2 \frac{r}{R} [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] + c^2 \cos^2 \frac{r}{R} dt^2. \qquad \text{(D)}$$

Une coupe à temps constant de cet espace est un espace (S) défini par l'élément linéaire

$$d\sigma^2 = +dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \qquad \text{(S)}$$

(*) Présenté par M. Th. De Donder.

(**) *L'Univers d'Einstein et la Métrique cayleyenne elliptique.* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, Classe des Sciences, 1924, pp. 429-433.)

(***) *On the curvature of spaces.* (K. AKAD., Amsterdam, Proceedings, 1917.)

Les géodésiques de l'espace (D) sont données par le système différentiel

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 r}{ds^2} &= \mathrm{R}\sin\frac{r}{\mathrm{R}}\cos\frac{r}{\mathrm{R}}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \mathrm{R}^2\sin\frac{r}{\mathrm{R}}\cos\frac{r}{\mathrm{R}}\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \\
&\qquad + \frac{c^2}{\mathrm{R}}\sin\frac{r}{\mathrm{R}}\cos\frac{r}{\mathrm{R}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2, \\
\frac{d^2\theta}{ds^2} &= \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{2}{\mathrm{R}}\operatorname{cotg}\frac{r}{\mathrm{R}}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds}, \\
\frac{d^2\varphi}{ds^2} &= -\frac{2}{\mathrm{R}}\operatorname{cotg}\frac{r}{\mathrm{R}}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds} - 2\operatorname{cotg}\theta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\varphi}{ds}, \\
\frac{d^2 t}{ds^2} &= \frac{2}{\mathrm{R}}\operatorname{tg}\frac{r}{\mathrm{R}}\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds}.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

Effectuons, dans ces équations, le changement de variables défini par

$$x_0 = \sin\frac{r}{\mathrm{R}}\sin\theta\cos\varphi, \qquad x_1 = \sin\frac{r}{\mathrm{R}}\sin\theta\sin\varphi,$$

$$x_2 = \sin\frac{r}{\mathrm{R}}\cos\theta, \qquad x_3 = \cos\frac{r}{\mathrm{R}}. \qquad (1)$$

Nous avons donc

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \qquad (2)$$

et les équations (I) deviennent

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 x_0}{ds^2} &= \frac{x_0}{\mathrm{R}^2}, \\
\frac{d^2 x_1}{ds^2} &= \frac{x_1}{\mathrm{R}^2}, \\
\frac{d^2 x_2}{ds^2} &= \frac{x_2}{\mathrm{R}^2}, \\
\frac{d^2 x_3}{ds^2} &= \frac{x_3}{\mathrm{R}^2}\left[1 - c^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\right], \\
\frac{d^2 t}{ds^2} &= -\frac{2}{x_3}\frac{dx_3}{ds}\frac{ds}{dt}.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

L'élément linéaire de (D) s'écrit actuellement

$$ds^2 = -R^2(dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - c^2x_3^2dt^2, \tag{D'}$$

et celui de (S)

$$d\sigma^2 = R^2(dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2). \tag{S'}$$

Une coupe à temps t constant de l'Univers (D′) peut donc être considérée comme un espace cayleyen elliptique (S′), l'absolu ayant pour équation

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

et le facteur de proportionnalité des coordonnées homogènes étant fixé par la relation (2).

2. La dernière des équations (II) donne

$$x_3^2 \frac{dt}{ds} = k. \tag{3}$$

Si nous prenons, dans les quatre premières équations (II), t comme variable indépendante, elles deviennent, en utilisant (3),

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x_0}{dt^2} &= \frac{2}{x_3}\frac{dx_0}{dt}\cdot\frac{dx_3}{dt} + \frac{1}{k^2R^2}x_0x_3^4,\\
\frac{d^2x_1}{dt^2} &= \frac{2}{x_3}\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_3}{dt} + \frac{1}{k^2R^2}x_1x_3^4,\\
\frac{d^2x_2}{dt^2} &= \frac{2}{x_3}\frac{dx_2}{dt}\frac{dx_3}{dt} + \frac{1}{k^2R^2}x_2x_3^4,\\
x_3\frac{d^2x_3}{dt^2} - 2\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 &+ \frac{c^2}{R^2}x_3^2 = \frac{x_3^6}{k^2R^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{III}$$

Ces équations peuvent être considérées soit comme celles des géodésiques de l'espace (D′), soit comme les équations des projections de ces courbes sur l'espace (S′), t étant alors considéré comme un paramètre.

3. Proposons-nous de rechercher les équations du rayon lumineux issu, au temps $t = 0$, du point $Y(y_0, y_1, y_2, y_3)$, perpendiculairement au plan

$$\eta_0 x_0 + \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0,$$
$$(\eta_0^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1).$$

Ces équations seront données par les équations (III), auxquelles il faut joindre l'équation

$$ds^2 = -d\sigma^2 + c^2 x_3^2 dt^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$d\sigma = c x_3 dt. \tag{4}$$

Comparée à l'équation (3), cette dernière équation donne $\frac{1}{k} = 0$ et, par suite, les équations (III) deviennent

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 x_0}{dt^2} &= \frac{2}{x_3} \frac{dx_0}{dt} \cdot \frac{dx_3}{dt}, \\
\frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \frac{2}{x_3} \frac{dx_1}{dt} \cdot \frac{dx_3}{dt}, \\
\frac{d^2 x_2}{dt^2} &= \frac{2}{x_3} \frac{dx_2}{dt} \cdot \frac{dx_3}{dt}, \\
x_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} - 2\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 &+ \frac{c^2}{R^2} x_3^2 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

Les conditions initiales sont

$$t = 0, \qquad x_i = y_i, \qquad \frac{dx_i}{d\sigma} = \frac{\eta_i}{R}; \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

donc, en vertu de (4),

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{c}{R} \eta_i y_3.$$

Les équations (IV) s'intègrent par des procédés élémentaires. On a

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx_0}{dt} = \frac{c}{R} \eta_0 \frac{x_3^2}{y_3}, \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{c}{R} \eta_1 \frac{x_3^2}{y_3}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{c}{R} \eta_2 \frac{x_3^2}{y_3}, \\
&\frac{dx_3}{dt} = \frac{c}{R} \cdot \frac{\eta_3 ch\omega - sh\omega}{ch\omega - \eta_3 sh\omega} \cdot x_3,
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

où l'on a posé

$$\omega = \frac{c}{\mathrm{R}}\, t.$$

On en déduit ensuite

$$\left.\begin{aligned}
x_0 &= \frac{y_0\eta_3 - y_3\eta_0}{\eta_3} + \frac{\eta_0}{\eta_3}\, y_3\, \frac{ch\omega}{ch\omega - \eta_3 sh\omega},\\
x_1 &= \frac{y_1\eta_3 - y_3\eta_1}{\eta_3} + \frac{\eta_1}{\eta_3}\, y_3\, \frac{ch\omega}{ch\omega - \eta_3 sh\omega},\\
x_2 &= \frac{y_2\eta_3 - y_3\eta_2}{\eta_3} + \frac{\eta_2}{\eta_3}\, y_3\, \frac{ch\omega}{ch\omega - \eta_3 sh\omega},\\
x_3 &= y_3\, \frac{1}{ch\omega - \eta_3 sh\omega}.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(V)}$$

Les équations (V) sont les équations paramétriques de la projection du rayon lumineux considéré, sur l'espace, coupe à temps constant (S').

En prenant pour origine des distances sur la courbe (V) le point $\mathrm{Y}(t = 0)$, l'équation (4) donne

$$\frac{\sigma}{\mathrm{R}} = 2\, \frac{y_3}{\sqrt{1 - \eta_3^2}}\ \mathrm{arc\,tg} \left(\frac{th\, \frac{\omega}{2}}{1 - \eta_3\, th\, \frac{\omega}{2}} \sqrt{1 - \eta_3^2} \right). \qquad (6)$$

4. On peut obtenir les équations de la trajectoire (V) du rayon lumineux en fonction du paramètre σ, soit en éliminant ω entre les équations (V) et (6), soit en intégrant le système différentiel

$$\left.\begin{aligned}
x_3\, \frac{d^2 x_0}{d\sigma^2} &= \frac{dx_0}{d\sigma} \cdot \frac{dx_3}{d\sigma},\\
x_3\, \frac{d^2 x_1}{d\sigma_2} &= \frac{dx_1}{d\sigma} \cdot \frac{dx_3}{d\sigma},\\
x_3\, \frac{d^2 x_2}{d\sigma^2} &= \frac{dx_2}{d\sigma} \cdot \frac{dx_3}{d\sigma},\\
x_3\, \frac{d^2 x_3}{d\sigma^2} &- \left(\frac{dx_3}{d\sigma}\right)^2 + \frac{1}{\mathrm{R}^2} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI)}$$

qu'on déduit de (IV) en prenant σ comme variable indépendante.

On obtient ainsi les équations

$$\left.\begin{aligned}
x_0 &= \frac{y_0 - \eta_3(y_0\eta_3 - y_3\eta_0)}{1-\eta_3^2} + \eta_0\left(y_3 \sin\frac{\alpha\sigma}{R} - \frac{\eta_3}{\alpha}\cos\frac{\alpha\sigma}{R}\right),\\
x_1 &= \frac{y_1 - \eta_3(y_1\eta_3 - y_3\eta_1)}{1-\eta_3^2} + \eta_1\left(y_3 \sin\frac{\alpha\sigma}{R} - \frac{\eta_3}{\alpha}\cos\frac{\alpha\sigma}{R}\right),\\
x_2 &= \frac{y_2 - \eta_3(y_2\eta_3 - y_3\eta_2)}{1-\eta_3^2} + \eta_2\left(y_3 \sin\frac{\alpha\sigma}{R} - \frac{\eta_3}{\alpha}\cos\frac{\alpha\sigma}{R}\right),\\
x_3 &= \frac{\eta_3}{\alpha}\sin\frac{\alpha\sigma}{R} + y_3\cos\frac{\alpha\sigma}{R},
\end{aligned}\right\} \quad \text{(VII)}$$

où l'on a posé

$$\alpha = \frac{\sqrt{1-\eta_3^2}}{y_3}.$$

On vérifie aisément que les valeurs de x_0, x_1, x_2, x_3 données par les équations (V) ou (VII) vérifient la relation

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Remarquons que les équations (VII) peuvent s'écrire sous la forme

$$\left.\begin{aligned}
x_0 &= \frac{y_0 - \eta_3(y_0\eta_3 - y_3\eta_0)}{1-\eta_3^2} - \frac{R}{\alpha}\eta_0\frac{dx_3}{d\sigma},\\
x_1 &= \frac{y_1 - \eta_3(y_1\eta_3 - y_3\eta_1)}{1-\eta_3^2} - \frac{R}{\alpha}\eta_1\frac{dx_3}{d\sigma},\\
x_2 &= \frac{y_2 - \eta_3(y_2\eta_3 - x_3\eta_2)}{1-\eta_3^2} - \frac{R}{\alpha}\eta_2\frac{dx_3}{d\sigma},\\
x_3 &= \frac{\eta_3}{\alpha}\sin\frac{\alpha\sigma}{R} + y_3\cos\frac{\alpha\sigma}{R},
\end{aligned}\right\} \quad \text{(VIII)}$$

qui nous sera utile plus loin.

5. Nous allons montrer que les trajectoires des rayons lumineux sont des courbes planes.

Le plan osculateur en un point quelconque (x_0, x_1, x_2, x_3) de la courbe (VII) a pour équation

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \dfrac{dx_0}{d\sigma} & \dfrac{dx_1}{d\sigma} & \dfrac{dx_2}{d\sigma} & \dfrac{dx_3}{d\sigma} \\ \dfrac{d^2x_0}{d\sigma^2} & \dfrac{d^2x_1}{d\sigma^2} & \dfrac{d^2x_2}{d\sigma^2} & \dfrac{d^2x_3}{d\sigma_2} \end{vmatrix} = 0;$$

En utilisant les équations (VIII), cette équation devient

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \dfrac{\alpha}{R}\eta_0 x_3 & \dfrac{\alpha}{R}\eta_1 x_3 & \dfrac{\alpha}{R}\eta_2 x_3 & \dfrac{dx_3}{d\sigma} \\ \eta_0\dfrac{dx_3}{d\sigma} & \eta_1\dfrac{dx_3}{d\sigma} & \eta_2\dfrac{dx_3}{d\sigma} & -\dfrac{\alpha}{R}x_3 \end{vmatrix} = 0;$$

d'où l'on déduit

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Le plan osculateur est donc fixe et, par suite, la courbe (VII) est plane et son plan est déterminé par le point $O(0, 0, 0, 1)$, le point $Y(y_1, y_2, y_3)$ et la tangente en Y à la courbe.

La courbure $\frac{1}{\rho}$ de la courbe (VII) est donnée par la relation (*)

$$\frac{1}{\rho^2} = \sum_{i=0}^{3}\left(R\frac{d^2x_i}{d\sigma^2} + \frac{x_i}{R}\right)^2.$$

En utilisant les formules (VIII), on a

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2 R^2} + (1-\alpha^2)^2 y_3^2\left(\frac{dx_3}{d\sigma}\right)^2 + \frac{(1-\alpha^2)^2}{R^2}x_3^2,$$

(*) Voir BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziali*, 3e éd., vol. II, 2e partie. Bologne, 1924, p. 529.

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2 R^2} + \frac{(1-\alpha^2)^2\alpha^2}{R^2} y_3^2 \left(y_3 \sin\frac{\alpha\sigma}{R} - \frac{\eta_3}{\alpha}\cos\frac{\alpha\sigma}{R}\right)^2 + \frac{(1-\alpha^2)^2}{R^2}\left(\frac{\eta_3}{\alpha}\sin\frac{\alpha\sigma}{R} + y_3\cos\frac{\alpha\sigma}{R}\right)^2.$$

6. Considérons en particulier le cas d'un rayon lumineux issu du point $O(y_0 = y_1 = y_2 = 0,\ y_3 = 1)$, perpendiculairement au plan

$$\eta_0 x_0 + \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 = 0.$$

Les équations (VII) deviennent $(\eta_3 = 0)$

$$x_0 = \eta_0 \sin\frac{\sigma}{R}, \quad x_1 = \eta_1 \sin\frac{\sigma}{R}, \quad x_2 = \eta_2 \sin\frac{\sigma}{R}, \quad x_3 = \cos\frac{\sigma}{R}. \qquad (7)$$

Ce rayon lumineux est donc actuellement une droite joignant le point O au point de coordonnées $(\eta_0, \eta_1, \eta_2, 0)$ Ce point est atteint par la courbe pour $\sigma = R\frac{\pi}{2}$.

7. Dans les équations (V) et (6), faisons tendre t vers l'infini. Alors $\omega = \frac{c}{R}t$ tend également vers l'infini et l'on a

$$\lim x_0 = \frac{y_0 - y_0\eta_3 + y_3\eta_0}{1-\eta_3},$$

$$\lim x_1 = \frac{y_1 - y_1\eta_3 + y_3\eta_1}{1-\eta_3},$$

$$\lim x_2 = \frac{y_2 - y_2\eta_3 + y_3\eta_2}{1-\eta_3},$$

$$\lim x_3 = 0,$$

$$\lim \sigma = 2\frac{Ry_3}{\sqrt{1-\eta_3^2}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\eta_3}{1-\eta_3}}. \qquad (8)$$

La *barrière du temps* (*) relative au point Y est donc le plan $x_3 = 0$. En particulier, si le point Y coïncide avec le point O, on a $\lim\sigma = 2R \operatorname{arctg} 1 = R\frac{\pi}{2}$.

(*) Voir, par exemple, J. Becquerel, *Le Principe de Relativité et la Théorie de la Gravitation*. Paris, 1922, pp. 291 et suiv.

Considérons le point de percée de la courbe (VII) avec le plan $x_3 = 0$. Pour ce point, on a, par (8),

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha\sigma}{2R} = \sqrt{\frac{1+\eta_3}{1-\eta_3}};$$

d'où

$$\cos\frac{\alpha\sigma}{R} = -\eta_3, \qquad \sin\frac{\alpha\sigma}{R} = \sqrt{1-\eta_3^2}.$$

La tangente à la courbe (VII) en ce point sera perpendiculaire au plan

$$\left(\frac{dx_0}{d\sigma}\right)X_0 + \left(\frac{dx_1}{d\sigma}\right)X_1 + \left(\frac{dx_2}{d\sigma}\right)X_2 + \left(\frac{dx_3}{d\sigma}\right)X_3 = 0,$$

pour la valeur considérée de σ. En utilisant les formules (VIII), on trouve

$$\frac{dx_0}{d\sigma} = 0, \quad \frac{dx_1}{d\sigma} = 0, \quad \frac{dx_2}{d\sigma} = 0, \quad \frac{dx_3}{d\sigma} = -\frac{1}{R};$$

par suite, les trajectoires des rayons lumineux coupent normalement la barrière du temps $x_3 = 0$.

Nous voyons donc que, pour un observateur placé en O, les rayons lumineux paraissent se rendre tous vers la barrière du temps $x_3 = 0$, qu'ils rencontrent normalement et où la vitesse de la lumière, cx_3, paraît être nulle.

Pour étudier le point de vue d'un second observateur placé en un point O′, nous prendrons comme figure de référence un tétraèdre autopolaire de l'absolu dont un des sommets soit en O′. Si nous désignons par x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 les coordonnées d'un point de S′ par rapport à ce nouveau tétraèdre, nous devrons écrire des formules de transformations

$$x_i = a_{i0}x'_0 + a_{i1}x'_1 + a_{i2}x'_2 + a_{i3}x'_3, \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

les coefficients a_{ik} étant choisis de manière à conserver l'équation de l'absolu; ces coefficients devront donc satisfaire à des relations

$$a_{0i}^2 + a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + a_{3i}^2 = 1,$$
$$a_{0i}a_{0k} + a_{1i}a_{1k} + a_{2i}a_{2k} + a_{3i}a_{3k} = 0,$$
$$(i, k = 0, 1, 2, 3).$$

Si nous avons choisi pour O' le point ($x'_0 = x'_1 = x'_2 = 0$, $x'_3 = 1$), la barrière du temps relative à O' sera le plan $x'_3 = 0$. Par suite,

La barrière du temps relative à un point est le plan polaire de ce point par rapport à l'absolu.

8. Nous terminerons par la remarque suivante : l'introduction de la métrique cayleyenne elliptique permettrait de même d'étudier les trajectoires des rayons lumineux d'un Univers défini par un élément linéaire

$$ds^2 = -dr^2 - R^2 \sin^2 \frac{r}{R} [d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\varphi^2] + c^2 \psi(r, \theta, \varphi) \, dt^2.$$

(où la vitesse de la lumière dépendrait des variables r, θ, φ), d'une manière plus simple qu'en conservant les variables r, θ, φ.

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.