ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XVII, no 10.
Séance du 10 octobre 1931, pp. 1131-1150.

Géométrie algébrique.

Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique,

par Lucien Godeaux, correspondant de la Classe.

(*Seconde communication.*)

Dans un travail publié l'an dernier sous le même titre (1), nous avons poursuivi l'étude des involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique. Soient F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, et P un de ces points unis. Considérons une transformée birationnelle F' de F choisie de telle sorte qu'au point P corresponde sur F' une courbe exceptionnelle γ. A l'involution I_p correspond sur F' une involution cyclique I'_p pour laquelle γ est une courbe unie. Si tous les points de la courbe γ sont unis pour I'_p, nous disons que P est un point uni parfait pour I_p. Dans le cas opposé, P est un point uni non parfait de I_p. Il existe alors, sur γ, deux points P'_1, P'_2, unis pour I'_p. Ces points peuvent à leur tour être unis parfaits ou non parfaits pour I'_p. Nous avons étudié le cas où P'_1, P'_2 sont unis par-

(1) *Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 1930, pp. 450-467. Voir aussi nos travaux antérieurs : Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de coïncidences appartenant à une surface algébrique. (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1919, pp. 1-16); Recherches sur les involutions cubiques appartenant à une surface algébrique (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 1921, pp. 105-127); Sur les points unis des involutions cycliques d'ordre trois appartenant à une surface algébrique (*idem*, 1929, pp. 553-560); Sur les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*idem*, 1929, pp. 959-965); Sur les correspondances ponctuelles entre surfaces (*idem*, 1929, pp. 408-420).

faits pour I'_p (on a alors $p = 3$ et réciproquement) et le cas où un seul de ces points est uni parfait.

Lorsque le point P'_1 est uni non parfait pour I'_p, on peut transformer birationnellement F' en une surface F'' de manière que à P'_1 corresponde sur F'' une courbe exceptionnelle γ'. Il existe alors sur cette courbe deux points P''_1, P''_2 unis pour l'involution cyclique I''_p correspondant à I'_p. Si l'un des points P''_1, P''_2 est uni non parfait pour I''_p, on peut opérer de la même manière, et ainsi de suite. On parviendra ainsi à disséquer en quelque sorte le point uni P.

Supposons qu'en opérant ainsi sur les points P, P'_1, $P''_1, \ldots$, on obtienne, après k opérations, une surface $F^{(k)}$ sur laquelle on ait un point $P_1^{(k)}$ uni parfait pour l'involution $I_p^{(k)}$ correspondant à I_p. Considérons une courbe C, tracée sur la surface F, contenant ∞^1 groupes de I_p et appartenant à un système linéaire irréductible, ∞^2 en moins. Soient C', $C'', \ldots, C^{(k)}$ les transformées de C sur F', $F'', \ldots, F^{(k)}$ et supposons que ces courbes passent respectivement par les points P'_1, $P''_1, \ldots, P_1^{(k)}$. Dans ces conditions, les courbes $C^{(k)}$ ont une tangente variable (ou des tangentes variables) en $P_1^{(k)}$. Pour le faire voir, supposons que sur la surface $F^{(k-1)}$ le système complet $|C^{(k-1)}|$, ou éventuellement un multiple convenablement choisi de ce système, soit ∞^3 au moins et non composé au moyen de l'involution $I_p^{(k-1)}$. Rapportons projectivement les courbes du système considéré aux hyperplans d'un espace linéaire ayant la même dimension. Nous obtenons dans cet espace un modèle projectif de la surface $F^{(k)}$ sur lequel l'involution $I_p^{(k)}$ est engendrée par une homographie cyclique de période p. Le point $P_1^{(k)}$ appartient à un axe de cette homographie et la courbe $C^{(k)}$ est découpée sur $F^{k)}$ par un hyperplan uni de cette homographie contenant cet axe. Si donc la courbe C n'est pas isolée, la tangente à $C^{k)}$ en $P_1^{(k)}$ est variable, car la surface $F^{(k)}$ ne peut avoir, en ce point, un plan tangent ayant plus d'un point commun avec l'axe en question.

Nous utilisons cette remarque de la manière suivante : Si deux courbes C, D variables et contenant chacune ∞^1 groupes de I_p. passent par P et ont en commun un certain nombre de points fixes infiniment voisins successifs de P; si en outre les courbes C ont un point variable dans le domaine du premier ordre du dernier de ces points, il en est de même des courbes D et ce dernier point est le premier de la suite qui soit uni parfait pour I_p.

On peut construire une surface Φ, image de l'involution I_p, sur laquelle les points de diramation sont isolés. Ces points sont alors singuliers pour la surface et il s'agit de déterminer cette singularité. Dans ce travail, nous posons à priori cette singularité. Nous supposons précisément que la surface Φ possède, en un point de diramation, un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs des points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire, et nous étudions le point uni correspondant de l'involution I_p sur la surface F. Nous admettons que si $|C|$ est un système linéaire tracé sur F, non composé au moyen de I_p mais contenant des systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_p, dont l'un, $|C_0|$, est dépourvu de points-base, les courbes C_0 passant par le point uni considéré de I_p ne passent pas, en conséquence, par un autre point uni de cette involution,

Nous conservons dans ce travail, après les avoir rappelées succinctement au début, les notations de notre premier travail cité plus haut (¹).

(¹) Nous avons étudié le problème des points de diramation de Φ dans le cas où la surface F est un plan, I_p étant engendrée par une homographie cyclique non homologique de ce plan. Voir : Sur les homographies planes cycliques (*Mém. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1929, 3e série, t. XV, pp. 1-26); Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies cycliques (*idem*, 1930, 3e série, t. XVI, pp. 1-21); Sur les courbes tracées sur la surface représentant l'involution engendrée par une homographie plane cyclique (*idem*, 1931, 3e série, t.XVI, pp. 1-14). Ce cas particulier montre la grande variété des singularités possibles de la surface Φ en un point de diramation.

1. Soit F une surface algébrique appartenant à un espace linéaire S_R, à R dimensions, transformée en elle-même par une homographie T de cet espace, de période p premier. L'homographie T possède p axes $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, ..., $S^{(p-1)}$ qui sont des espaces linéaires ayant respectivement r, r_1, r_2, ..., r_{p-1} dimensions et ne se rencontrant pas deux à deux. Seul l'espace $S^{(0)}$ rencontre la surface F. On a $r < R$ et l'on peut choisir F de manière que r soit aussi grand que l'on veut.

Sur la surface F, l'homographie T détermine une involution cyclique I_p d'ordre p. Si, comme nous le supposerons, l'espace $S^{(0)}$ rencontre F en un nombre fini de points, l'involution I_p ne possède qu'un nombre fini de points unis.

Nous désignerons par Σ_0, Σ_1, ..., Σ_{p-1} les systèmes linéaires d'hyperplans unis pour T, les hyperplans de Σ_i contenant les axes $S^{(0)}$, ..., $S^{(i-1)}$, $S^{(i+1)}$, ..., $S^{(p-1)}$ de cette homographie. Soit $|C|$ le système des sections hyperplanes de F. Les hyperplans des systèmes Σ_0, Σ_1, ..., Σ_{p-1} découpent sur F des systèmes linéaires partiels composés au moyen I_p. Nous désignerons par $|C_0|$ le système découpé sur F par les hyperplans de Σ_0, par $|C^{(1)}|$, $|C^{(2)}|$, ..., $|C^{(p-1)}|$ les systèmes découpés sur F par les hyperplans de Σ_1, Σ_2, ,.., Σ_{p-1}.

Le système partiel $|C_0|$ est dépourvu de points-base et a la dimension r. Si l'on rapporte projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions, on obtient une surface Φ, image de l'involution I_p. Si n est l'ordre de cette surface Φ et π le genre de ses sections hyperplanes, le système $|C_0|$ et par suite le système complet $|C|$ ont le degré pn et le genre $p\,(\pi - 1) + 1$. La surface F est d'ordre pn.

2. Soit P un point uni de I_p et appelons C_1 les courbes C_0 passant par P. Le plan tangent à la surface F en P ne peut rencontrer l'axe $S^{(0)}$ de T en dehors de P. S'il en était en effet autrement, on pourrait trouver une courbe C_1 tangente en P à l'espace $S^{(0)}$; les hyperplans de Σ_0 découpent, sur cette courbe C_1, des groupes de pn points formés de n groupes de I_p ; ceux de ces hyperplans qui passent par P ne peuvent rencontrer cette courbe C_1 qu'en $p(n-1)$ points variables, formant $n-1$ groupes de I_p; il faut donc que le point P absorbe p intersections de ces hyperplans et de la courbe C_1 envisagée. Cela n'est possible que si la tangente en P à cette courbe appartient à tous les hyperplans de Σ_0 passant par P ; cette tangente ne peut donc appartenir à l'axe $S^{(0)}$.

Le plan ϖ, tangent en P à la surface F, est uni pour l'homographie T. Excluons le cas où P est un point uni parfait de l'involution I_p. Alors le plan ϖ doit s'appuyer en un point sur deux axes de l'homographie T, distincts de $S^{(0)}$; supposons que le plan ϖ s'appuie en un point P'_1 sur l'axe $S^{(1)}$ et en un point P'_2 sur l'axe $S^{(2)}$.

Les courbes C_1 ont en P un point multiple, les tangentes étant confondues avec les droites PP'_1, PP'_2. Appelons C_2 les courbes C_1 assujetties à toucher en P une droite de ϖ distincte de PP'_1, PP'_2. Si les courbes C_2 ont en P des tangentes fixes, appelons C_3 les courbes C_2 assujetties à toucher en P une droite de ϖ distincte de ces tangentes fixes. Et ainsi de suite. Soit $|C_\nu|$ le premier système de courbes ayant en P des tangentes variables obtenu par ce procédé. Les courbes C_ν ont la multiplicité p en P, les p points infiniment voisins de P sur une de ces courbes formant un groupe de I_p.

Les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_i|$, ..., $|C_\nu|$ ont respectivement les dimensions $r-1$, $r-2$, ..., $r-i$, ..., $r-\nu$. En rapportant les courbes C_i aux hyperplans d'un espace S_{r-i}, linéaire, à $r-i$ dimensions, on obtient une surface Φ_i, image de l'involution I_p. Sur cette surface Φ_i, aux courbes C_{i+1} correspondent les sections de la surface par des hyperplans passant par un point Π_i. La surface Φ_{i+1} est projectivement identique à la projection, à partir du point Π_i, de la surface Φ_i sur un hyperplan ne passant pas par Π_i.

Au point uni P correspond, sur la surface Φ, un point de diramation II. La surface Φ_1 est projectivement identique à la projection, à partir de II, de la surface Φ sur un hyperplan ne passant pas par ce point.

La surface Φ_ν est d'ordre $n-p$ et ses sections hyperplanes Γ_ν ont le genre $\pi - \frac{1}{2}(p-1)$.

Nous désignerons par Γ_i les courbes qui correspondent, sur l'une quelconque des surfaces $\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_\nu$, aux courbes C_i. En particulier, les sections hyperplanes de la surface Φ_i seront des courbes Γ_i.

On suppose, dans ce qui précède, $r \geqq \nu + 3$, ce qui n'est pas une restriction, comme on l'a vu.

3. Projetons la surface F du point P sur un hyperplan S'_{R-1} de S_R ne passant pas par P. On obtient ainsi une surface F', d'ordre $pn-1$, transformée en elle-même par T, passant simplement par la droite $P'_1 P'_2$. Sur cette surface F', T engendre une involution I'_p, d'ordre p, projection de I_p, possédant comme points unis P'_1, P'_2. Les surfaces $\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_\nu$ sont évidemment des images de l'involution I'_p. La droite $P'_1 P'_2$ est unie pour T, mais contient ∞^1 groupes de I'_p formés de points distincts, sauf les groupes formés de P'_1, P'_2 comptés chacun p fois.

Supposons que P'_1 ne soit pas un point uni parfait pour I'_p et considérons les courbes $C^{(2)}$, découpées sur F par les hyperplans de Σ_2, contenant tous les axes de T sauf $S^{(2)}$. Aux courbes $C^{(2)}$ correspondent, sur F', des courbes $C'^{(2)}$ découpées par les hyperplans de Σ_2. Ces hyperplans ne passant pas par P'_2 ne peuvent contenir la droite $P'_1 P'_2$. Le plan tangent à F' au point P'_1, que nous désignerons par ϖ'_1, contient la droite $P'_1 P'_2$; par suite, les hyperplans de Σ_2 ne peuvent contenir ϖ'_1.

Le plan ϖ'_1 est uni pour l'homographie T, et dans ce plan on a donc une homographie qui ne peut être une homologie de centre P'_1, puisque ce point n'est pas uni parfait. Les hyperplans de Σ_2 coupent ϖ'_1 suivant une droite p', unie pour T.

Cette droite ne peut appartenir à l'espace $S^{(1)}$, car les hyperplans de Σ_1 découpent sur une courbe $C'^{(2)}$ une série linéaire formée de groupes de I_p et dont l'ordre est, par suite, multiple de p. Les hyperplans de Σ_1 passant par P'_1 découpent sur une courbe $C'^{(2)}$ une série linéaire dont la partie variable est d'ordre multiple de p ; le point P'_1 doit absorber des intersections en nombre multiple de p. Il en résulte que les hyperplans de Σ_1 passant par P'_1 doivent contenir la tangente à une courbe $C'^{(1)}$ en P'_1 et que, par suite, cette tangente ne peut appartenir à $S^{(1)}$. Dans le plan ϖ'_1, seules les droites $P'_1 P'_2$ et p' sont unies pour T, parmi les droites issues de P'_1. Les courbes $C'^{(2)}$ ne peuvent être tangentes à $P'_1 P'_2$; donc elles sont tangentes à p' et ainsi se trouve démontrée notre affirmation.

Les courbes $C'^{(2)}$, étant découpées sur F' par des hyperplans ne contenant pas le plan ϖ'_1 tangent à la surface en P'_1, ont en général un point simple en ce point. D'ailleurs elles sont d'ordre $np-1$ et, par suite, P est simple pour les courbes $C^{(2)}$.

La droite p', unie pour T, doit rencontrer un second axe de l'homographie T. Cet axe ne peut être $S^{(2)}$, car alors P'_1 serait un point uni parfait de I'_p. Supposons que p' coupe l'axe $S^{(3)}$ en un point P''_1. Projetons la surface F' à partir de P'_1 sur un espace S''_{R-2} intersection de S'_{R-1} et d'un hyperplan de Σ_1 ne passant pas par P'_1. Nous obtenons ainsi une surface F'', unie pour T et sur laquelle cette homographie engendre une involution I'', projection de I'_p, ayant comme point uni P''_1 et contenant la droite simple $P'_2 P'_1$. Aux courbes $C'^{(2)}$ correspondent, sur F'', des courbes $C''^{(2)}$ découpées par les hyperplans de Σ_2. Le plan ϖ''_1, tangent à F'' en P''_1, est uni pour T et contient la droite $P_2 P''_1$. Si le point P''_1 est uni parfait pour I''_p, le plan ϖ''_1 coupe l'espace $S^{(2)}$ suivant une droite.

La tangente à la courbe $C''^{(2)}$ varie alors dans le plan ϖ''_1 avec la courbe.

Dans le cas opposé, il existe deux droites issues de P''_1 dans le plan ϖ''_1, unies pour T; l'une est $P'_2 P''_1$, l'autre est une droite p'' qui ne peut appartenir à l'axe $S^{(3)}$. Pour le prouver, il suffit de considérer le système Σ_3 et de recommencer le raisonnement précédent, en remarquant que les courbes $C''^{(2)}$ ont p'' comme tangente en P_1''.

Les courbes $C^{(2)}$ ont donc en P un point simple et y touchent la droite PP_1'. Elles ont en commun une suite de points simples infiniment voisins successifs de P, dont le dernier est un point uni parfait.

4. Nous allons considérer le cas où la surface Φ possède, au point de diramation Π, un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs des points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. Soit m le nombre total de ces points doubles. Les surfaces $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ ont respectivement les ordres $n - 2, n - 4, \ldots, n - 2m$. La surface $\Phi_i (i < m)$ a en Π_i un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs $m - i - 1$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. Pour la surface Φ_m, le point Π_m est simple. La surface Φ_{m-1} est donc d'ordre $n - 2m - 1$.

Les genres des sections hyperplanes, $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{m+1}$ des surfaces $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{m+1}$, sont respectivement $\pi - 1, \pi - 2, \ldots, \pi - m, \pi - m$.

On sait que le passage de Φ à Φ_1 introduit deux droites simples pour Φ_1 équivalentes au domaine du point Π sur la surface Φ. Ces droites ont le degré -2; nous les désignerons γ_{11}, γ_{21}. Au point de vue des transformations birationnelles, les droites γ_{11}, γ_{21} n'ont aucun point commun si $m > 1$; mais au point de vue projectif, elles passent toutes deux par le point double Π_1 de Φ_1. Le passage de Φ_1 à Φ_2 introduit de même deux droites γ_{12}, γ_{22} de degré -2, et ainsi de suite. On obtient ainsi deux suites de droites $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1m}$ et $\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{2m}$; les droites γ_{1m}, γ_{2m} ont en commun le point simple Π_m de Φ_m. Chacune des droites γ_{1i}, γ_{2i} rencontre une et une seule des droites $\gamma_{1i+1}, \gamma_{2i+1}$. Pour fixer les idées, nous supposerons que dans la suite de droites, ou mieux de courbes rationnelles de degré -2, $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1m}, \gamma_{2m}, \ldots, \gamma_{22}, \gamma_{21}$, chaque courbe rencontre la précédente et la suivante, mais ne rencontre pas les autres.

Il existe des relations fonctionnelles entre les courbes Γ, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m, \gamma_{11}, \ldots, \gamma_{21}$. Pour les obtenir, remarquons que les courbes Γ_2, sections de la surface Φ, par les hyperplans passant par Π_1, rencontrent les droites γ_{12}, γ_{22} chacune en un point, mais ne rencontrent pas les courbes rationnelles γ_{11}, γ_{12}, ni les courbes $\gamma_{13}, \ldots, \gamma_{23}, \ldots$. Faisons les remarques analogues pour les courbes $\Gamma_3, \ldots, \Gamma_m$. On obtient ainsi les relations

$$\Gamma \equiv \Gamma_1 + \gamma_{11} + \gamma_{12} + \cdots + \gamma_{1m} + \gamma_{21} + \cdots + \gamma_{2m},$$
$$\Gamma \equiv \Gamma_2 + \gamma_{11} + \gamma_{21} + 2(\gamma_{12} + \cdots + \gamma_{1m} + \gamma_{22} + \cdots + \gamma_{2m}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\begin{aligned}\Gamma \equiv \Gamma_i + \gamma_{11} + \gamma_{21} + 2(\gamma_{12} + \gamma_{22}) + \cdots + (i-1)(\gamma_{1i-1} + \gamma_{2i-1})\\ + i(\gamma_{1i} + \cdots + \gamma_{1m} + \gamma_{2i} + \cdots + \gamma_{2m}),\end{aligned}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Gamma \equiv \Gamma_m + \gamma_{11} + \gamma_{21} + 2(\gamma_{12} + \gamma_{22}) + \cdots + m(\gamma_{1m} + \gamma_{2m}).$$

Envisageons une courbe Γ_i $(i \leq m)$ et la courbe C_i homologue sur la surface F. La courbe Γ_i n'a que deux branches d'origine Π (sur la surface Φ); donc la courbe C_i ne peut avoir que deux branches d'origine P. Par suite, l'involution engendrée par T sur la courbe C_i n'a que deux points unis dans le domaine du point P. Cette remarque sera précisée plus loin.

5. Considérons, sur la surface Φ_m, les courbes Γ_{m+1} découpées par les hyperplans passant par le point Π_m, simple pour la surface. Dans la correspondance $(1, p)$ existant entre les surfaces Φ_m et F, le point Π_m ne peut être de diramation, car dans la correspondance $(1, p)$ existant entre une courbe Γ_{m+1} générale et la courbe C_{m+1} homologue, il n'y aurait qu'un point de diramation, ce qui est absurde. Il en résulte qu'au point Π_m correspond, sur F, un groupe de I_p nécessairement infiniment voisin de P. Par suite, les courbes C_{m+1} ont en P un point multiple d'ordre p à tangentes variables; elles coïncident donc avec les courbes C_ν. Les surfaces Φ_{m+1} et Φ_ν coïncident donc (ou tout au moins sont projectivement identiques); la première est d'ordre $n - 2m - 1$, la seconde d'ordre $m - p$; on a donc

$$p = 2m + 1, \qquad \nu = m + 1.$$

Le genre des courbes $\Gamma_{m \mp 1}$ est égal à $\pi - m$; celui des courbes C_{m+1} est égal à

$$p(\pi - 1) + 1 - \frac{1}{2} p(p-1) = p(\pi - m - 1) + 1.$$

Dans la correspondance $(1, p)$ entre une courbe Γ_{m+1} et la courbe C_{m+1} homologue il n'y a pas de diramation et la formule de Zeuthen appliquée à cette correspondance donne bien une identité.

Appelons α_i la multiplicité du point P pour les courbes C_i. Les courbes C_i rencontrent une courbe C_{m+1} en $pn - p\alpha_i$ points en dehors de P. Par suite, sur la surface Φ_i, d'ordre $n - 2i$, les courbes Γ_{m+1} sont d'ordre $n - \alpha_i$. Mais ces courbes sont des sections hyperplanes de la surface (passant par le point Π_i); on a donc $\alpha_i = 2i$. On voit donc que les courbes C_1, C_2, ..., C_m ont respectivement au point P les multiplicités 2, 4, ..., $2m = p - 1$.

Les courbes C_i $(i \leq m)$ ne peuvent avoir de tangente variable en P. D'autre part, le nombre des intersections de ces courbes avec les courbes $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, absorbées en P, est multiple de p; les droites PP'_1, PP'_2 sont tangentes aux courbes C_i en P. Le point P est donc l'origine de deux branches au moins d'une courbe C_i. A chacune de ces branches correspond une branche de la courbe homologue Γ_i, de Φ_i, d'origine Π_i. Or il y a deux de ces dernières branches; donc le point P est l'origine de deux branches de chaque courbe C_i.

Les courbes Γ_i sont de genre $\pi - i$ et possèdent deux points de diramation; par suite, pour la formule de Zeuthen, la singularité d'une courbe C_i au point P abaisse le genre de la courbe de $p(i-1)+1$ unités.

6. D'après ce que nous venons de voir, les courbes C_1 ont en P un point double, les tangentes étant PP'_1, PP'_2. Toute courbe $C^{(1)}$ dont la tangente en P est PP'_2 doit avoir avec toute courbe C_1 un certain nombre, multiple de p, de points communs absorbés en P. Il en résulte que les courbes C_1, $C^{(1)}$ ont en commun $\lambda p + p - 2$ points fixes simples, infiniment voisins successifs de P, λ étant en entier. Le dernier de ces points doit être uni parfait et ses points infiniment voisins, dans le domaine du premier ordre, correspondent projectivement aux points de la droite γ_{11}, sur la surface Φ_1. Il en résulte que les courbes $C^{(1)}$ ont pour homologues, sur Φ_1, des courbes $\Gamma^{(1)}$ rencontrant la droite γ_{11} en un point variable et ne rencontrant pas les droites $\gamma_{21}, \gamma_{12}, \gamma_{22}, \dots$.

A une courbe C quelconque correspond sur Φ une courbe $\bar{\Gamma}$ possédant $\frac{1}{2} n p (p-1)$ points doubles, correspondant aux couples de points de cette courbe C appartenant à des groupes de I_p. Lorsque la courbe C varie d'une manière continue sur F et tend vers une courbe C_0, $\bar{\Gamma}$ varie d'une manière continue sur Φ et se réduit à une courbe Γ comptée p fois. Lorsque C tend vers une courbe $C^{(1)}$, $\bar{\Gamma}$ tend vers une courbe $\Gamma^{(1)}$ comptée p fois, augmentée des composantes provenant des points de diramation de la surface Φ. Si l'on tient compte de ces observations, on trouve aisément la relation fonctionnelle liant les courbes Γ, $\Gamma^{(1)}$. On a précisément

$$p\Gamma \equiv p\Gamma^{(1)} + (p-1)\gamma_{11} + (p-2)\gamma_{12} + \cdots + (p-m)\gamma_{1m}$$
$$+ \gamma_{21} + 2\gamma_{22} + \cdots + m\gamma_{2m} + \cdots,$$

les termes non écrits provenant des points de diramation de Φ distincts de Π.

Si l'on combine cette relation avec la relation fonctionnelle donnant Γ_1, on trouve que les courbes Γ_1, $\Gamma^{(1)}$ ont en général $n - 1$ points communs. On a, par suite, $\lambda = 0$ et les courbes C_1, $C^{(1)}$ ont en commun $p - 2$ points simples, infiniment voisins successifs de P.

On arrive aux mêmes conclusions en considérant les courbes $C^{(2)}$. A ces courbes correspondent sur Φ_1 des courbes $\Gamma^{(2)}$ rencontrant la droite γ_{21} en un point variable. On a

$$p\Gamma \equiv p\Gamma^{(2)} + \gamma_{11} + 2\gamma_{12} + \cdots + m\gamma_{1m}$$
$$+ (p-1)\gamma_{21} + (p-2)\gamma_{22} + \cdots + (p-m)\gamma_{2m} + \cdots,$$

les termes non écrits provenant des points de diramation de Φ distincts de Π.

Les courbes C_1 *ont en* P *un point double à tangentes* PP'_1, PP'_2, *auquel sont infiniment voisins successifs, sur chaque branche,* p — 2 *points simples, dont le dernier est un point uni parfait.*

Les plans osculateurs en P aux différentes courbes passant par ce point et tracées sur F forment un espace Ω, linéaire, l'espace osculateur à F en P. On a supposé $r - \nu \geq 3$ et Ω est, comme on sait, un espace à 4 ou à 5 dimensions. Les hyperplans de Σ_0 passant par P ne sauraient contenir Ω, car alors les courbes C_1 auraient un point triple en P; par suite, Ω doit rencontrer $S^{(0)}$ suivant une droite au moins.

Supposons $p > 3$. Alors, sur F', les points P'_1, P'_2 sont des points unis non parfaits de l'involution I'_p. Nous avons vu plus haut que dans le plan ϖ'_1, tangent à F' en P'_1, se trouve, outre $P'_1P'_2$, une seconde droite unie que nous désignerons par p'_1. Nous avons montré que cette droite ne peut rencontrer l'axe $S^{(2)}$ ni appartenir à l'axe $S^{(1)}$; nous avons supposé que p'_1 s'appuyait sur l'axe $S^{(3)}$. La droite p'_1 ne peut en effet s'appuyer sur $S^{(0)}$, car elle appartient à tous les hyperplans de Σ_1 passant par P et ces hyperplans ont en commun un espace linéaire à $R - r$ dimensions, qui ne rencontre $S^{(0)}$ qu'au point P. Dans le plan tangent ϖ_2' à F' en P_2', il y a de même une droite p_2', unie pour T, distincte de $P_1'P_2'$, ne s'appuyant ni sur $S^{(1)}$, ni sur $S^{(0)}$ et n'appartenant pas à $S^{(2)}$. Supposons que la droite p_2' puisse s'appuyer sur $S^{(3)}$. Alors les hyperplans de Σ_3 ne contenant pas Ω, mais seulement le plan ϖ tangent à F en P, les courbes $C^{(3)}$, découpées sur F par ces hyperplans, ont un point double en P. Ce point absorbe 6 intersections des courbes C_1, $C^{(3)}$; or ces courbes, étant transformées en elles-mêmes par T, doivent se rencontrer en un nombre de points variables multiple de p. Nous arrivons donc à une absurdité, et l'on en conclut que la droite p_2' s'appuie sur un axe de T distinct de $S^{(3)}$, par exemple sur $S^{(4)}$.

Les droites p_1', p_2' appartiennent à l'espace Ω et déterminent, dans cet espace, un espace linéaire à 3 dimensions qui ne rencontre pas $S^{(0)}$. D'autre part, Ω doit avoir au moins une droite en commun avec $S^{(0)}$. On en conclut que *l'espace osculateur à la surface* F *au point* P *est un espace à cinq dimensions coupant l'axe* $S^{(0)}$ *suivant une droite.*

Nous avons déjà établi cette propriété dans le cas $p=3$ [1].

7. Passons à l'étude des courbes C_m. Nous avons vu qu'elles ont au point P la multiplicité $p-1=2m$ et des tangentes confondues avec les droites PP_1', PP_2'. Observons qu'une courbe C_m et une courbe $C^{(1)}$ doivent avoir p points d'intersection confondus en P; ces courbes ont, par suite, en commun un point simple infiniment voisin de P sur la droite PP_2'. De même, les courbes C_m et $C^{(2)}$ ont un point simple en commun, infiniment voisin de P sur la droite PP_1'. En d'autres termes, dans la projection de F sur F', à partir de P, aux courbes C_m correspondent des courbes C_m' passant simplement par les points P_1', P_2', sans y toucher respectivement les droites p_1', p_2'. Comme les courbes C_m' sont transformées en elles-mêmes par T, elles doivent toucher, en P_1', P_2', la droite $P_1'P_2'$ (sauf dans

[1] Sur les involutions cycliques d'ordre trois... (*loc. cit.*).

le cas $p=3$, déjà étudié entièrement et dans lequel P'_1, P'_2 sont des points unis parfaits de I'_p). De plus, les courbes C'_m ont, en P'_1, P'_2, des contacts avec la droite $P'_1P'_2$, dont la somme des ordres vaut $p-3$.

L'ordre de la surface Φ_m étant égal à $n-2m$, deux courbes C_m ont $p(p-1)$ intersections absorbées en P. On en conclut que les courbes C'_m ont en commun β ($\beta < p-3$) points simples de la droite $P'_1P'_2$, infiniment voisins de P'_1 et $p-3-\beta$ points simples de la même droite, infiniment voisins de P'_1. Les deux derniers points de ces deux suites sont des points unis parfaits de I'_p. Au domaine d'un de ces points correspond sur Φ_m la droite γ_{2m} et au domaine de l'autre point, la droite γ_{1m}.

Observons que les courbes Γ_{m+1} sont découpées, sur Φ_m, par les hyperplans passant par le point Π_m. A ces courbes correspondent sur F les courbes C_{m+1} ayant en P un point multiple d'ordre p à tangentes variables. En particulier, parmi les courbes C_{m+1} se trouvent des courbes ayant leurs p tangentes en P confondues avec PP'_1 ou PP'_2 ; ces courbes ont un point multiple d'ordre p infiniment voisin de P. A ces courbes correspondent, sur la surface Φ_m, des sections faites par des hyperplans passant par l'une des droites γ_{1m}, γ_{2m}. Si nous supposons $p>3$, de manière que P'_1 et P'_2 soient des points unis non parfaits de l'involution I'_p, les sections de Φ_m par des hyperplans contenant γ_{1m} (ou γ_{2m}) sont des courbes d'ordre $n-p$ ayant un contact d'ordre $p-1$ avec cette droite, en un point fixe. Ainsi se trouvent précisées les considérations du n° 7 de notre première note.

8. Considérons un hyperplan de Σ_0 ne passant pas par P, un hyperplan de Σ_1 et un hyperplan de Σ_2. Ces trois hyperplans ont en commun un espace linéaire à $R-3$ dimensions que nous désignerons par A. Si nous choisissons un hyperplan de Σ_1 ne passant pas par P'_1 et un hyperplan de Σ_2 ne passant pas par P'_2, A ne rencontrera pas le plan ϖ, tangent à F en P.

Projetons la surface F à partir de A sur le plan ϖ. Puisque A est uni pour T, à l'involution I_p correspondra sur ϖ une involution engendrée par une homographie T' dont les points unis ne peuvent être que P, P'_1, P'_2. Les poins unis de I_p, appartenant à l'axe $S^{(0)}$, auront tous pour projection le même point P.

Envisageons une courbe C_i ($1 < i < m$, ce qui suppose $p \geq 7$). Cette courbe ne passe en général que par un seul point uni I_p, précisément par P; par suite, sa projection $\overline{C}_i$ sur le plan ϖ aura la même multiplicité en P et les tangentes PP'_1, PP'_2 en ce point comptées le même nombre de fois. Le même raisonnement est d'ailleurs valable pour les courbes C_0, C_1, C_m, quel que soit p premier supérieur à deux.

Cela étant, rapportons le plan ϖ au triangle de référence $PP'_1P'_2$, de manière que les droites $P'_1P'_2$, P'_3P, PP'_1 aient respectivement pour équations $x'_0 = 0$, $x'_1 = 0$, $x'_2 = 0$. L'homographie T' sera représentée par les équations

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{\varepsilon x_1} = \frac{x'_2}{\varepsilon^\alpha x_2},$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité et α un entier supérieur à l'unité et inférieur à p. Aux courbes C_0 de F correspondront des courbes $\overline{C}_0$ de ϖ d'ordre pn, transformées en elles-même par T' et ne passant pas en général par P. Le terme de degré le plus élevé en x_0 dans l'équation de ces courbes sera donc x_0^{pn}. Les courbes $\overline{C}_1$, $\overline{C}_m$, projections des courbes C_1, C_m, sont des courbes $\overline{C}_0$ particulières.

Nous savons, d'après la remarque faite plus haut, que les courbes $\overline{C}_1$ ont un point double en PP'_1, PP'_2; que les courbes $\overline{C}_m$ ont un point multiple d'ordre $p - 1 = 2m$ en P, les tangentes étant : m confondues avec PP'_1, m avec PP'_2. On en conclut que l'équation de $\bar{C}_0$ est de la forme

$$\lambda_0 x_0^{pn} + \lambda_1 x_0^{pn-2} x_1 x_2 + \cdots + \lambda_m x_0^{pn-2m} x_1^m x_2^m + \cdots = 0.$$

Cette courbe étant unie pour T'_1, on doit avoir

$$1 + \alpha \equiv 0, \qquad m(1 + \alpha) \equiv 0. \qquad (\text{mod.}\, p).$$

On a donc $\alpha = p - 1$ et, par suite, l'équation des courbes $\bar{C}_i$ commence par le terme

$$\lambda_i x_0^{pm-2i} x_1^i x_2^i.$$

On en conclut que *les courbes* C_i *ont en* P *la multiplicité* 2i ; i *des tangentes sont confondues avec* PP'_2, *les* i *autres avec* PP'_2.

9. Supposons $p \geq 7$ et considérons les courbes C_2. D'après les expressions fonctionnelles des courbes Γ_2, $\Gamma^{(1)}$, on voit que celles-ci ont $n - 1$ points variables en commun ; par suite, le point P absorbe p des intersections d'une courbe C_2 et d'une courbe $C^{(1)}$. Il en résulte que les courbes C_2 et $C^{(1)}$ ont en commun un certain nombre de points, infiniment voisins successifs de P, absorbant $p - 4$ intersections. Une observation analogue peut être faite par les courbes $C^{(2)}$.

Une Γ_2 est de genre $\pi - 2$ et possède deux points de diramation. En appliquant la formule de Zeuthen on trouve donc que le genre d'une courbe C_2 est égal à $p(\pi - 2)$. Par suite, la singularité de la courbe C_2 en P abaisse le genre de $p + 1$ unités.

Les points infiniment voisins de P sur les courbes C_2 sont au plus doubles, puisque ces courbes ont deux tangentes doubles en P. Les points communs aux courbes C_2, $C^{(1)}$ dans le voisinage de P ne peuvent être tous doubles, car $p - 4$ est impair ; il y a au plus $\frac{1}{2}(p - 5)$ points doubles. Il y a de même en plus $\frac{1}{2}(p - 5)$ points doubles des courbes C_2, infiniment voisins successifs de P, appartenant aux courbes $C^{(2)}$. On voit par un simple calcul que ces maxima doivent être atteints pour que P abaisse le genre de $p+1$ unités. Par suite, les courbes C_2 et $C^{(1)}$ (ou $C^{(2)}$) ont en commun $\frac{1}{2}(p-3)$ points infiniment voisins successifs de P, les $\frac{1}{2}(p-5)$ premiers étant doubles et le dernier simple pour les courbes C_2.

Observons que le dernier point simple commun aux courbes C_2, $C^{(1)}$ dans le domaine de P, ne peut être uni parfait, car alors les courbes C_1, $C^{(1)}$ n'auraient que $\frac{1}{2}(p-3)$ point communs, infiniment voisins successifs de P, alors qu'elles en ont $p-2$. Par suite, à ce dernier point simple doit faire suite un point au moins commun à toutes les courbes C_2, mais n'appartenant pas aux courbes $C^{(1)}$.

L'ordre de la surface Φ_2 étant égal à $m-4$, le point P absorbe $4p$ unités dans l'intersection de deux courbes C_2, On en déduit que

Les courbes C_2 ont en P un point quadruple et possèdent deux branches ayant ce point comme origine. Sur chacune de ces branches elles ont en commun $\frac{1}{2}(p-1)$ points fixes infiniment voisins successifs dont les $\frac{1}{2}(p-5)$ premiers sont doubles et les deux derniers simples. Les $\frac{1}{2}(p-3)$ premiers de ces points appartiennent également aux courbes C_1 et le dernier point est uni parfait pour l'involution Ip.

10. Reprenons les courbes $C^{(3)}$ découpées sur F par les hyperplans de Σ_3. Ces hyperplans contenant le plan tangent ϖ, mais non l'espace osculateur Ω à la surface F au point P, les courbes $C^{(3)}$ ont en général un point double en P.

Les courbes $C^{(3)}$, C_1, C_2 étant transformées en elles-mêmes par T, les intersections de deux de ces courbes absorbées en P doivent s'exprimer par un nombre multiple de p.

Les courbes $C^{(3)}$ ne peuvent avoir de tangente variable en P. Trois cas peuvent se présenter :

1° Les courbes $C^{(3)}$ ont comme tangentes en P les droites PP'_1 PP'_2. Ces courbes ne peuvent avoir plus d'un point simple, infiniment voisin de P, sur la droite PP'_1, commun avec les courbes C_1. En effet, si nous projetons les courbes $C^{(3)}$ en $C'^{(3)}$ sur la surface F', à partir de P, les courbes $C'^{(3)}$ ne peuvent être tangentes en P'_1 à la droite p'_1, puisque les hyperplans de Σ_3 ne contiennent pas cette droite. Il en résulte que sur la branche des courbes C_1 tangente à PP'_2 il y a au moins $p - 5$ points simples, infiniment voisins successifs de P, appartenant aux courbes $C^{(3)}$. Mais alors, l'intersection en P des courbes C_2, $C^{(3)}$ absorbe exactement $p + 6$ points. Mais ce nombre n'est pas multiple de p, puisque $p \geq 7$. Nous arrivons donc à une absurdité et le premier cas ne peut se présenter.

2° Les courbes $C^{(3)}$ ont leurs deux tangentes en P confondues avec PP'_1. Alors, le point P absorbe 5 ou 6 points d'intersection d'une courbe C_1 et d'une courbe $C^{(3)}$, ce qui est impossible.

3° Les courbes $C^{(3)}$ ont leurs deux tangentes en P confondues en PP'_2. Ces courbes doivent avoir en commun avec les courbes C_1 un certain nombre de points infiniment voisins successifs de P absorbant $p - 4$ intersections, et avec les courbes C_2, des points absorbant $p - 8$ intersections. Il y a donc au plus $\frac{1}{2}(p - 5)$ points infiniment voisins successifs de P appartenant à la fois aux courbes C_1, C_2 et $C^{(3)}$. Cela exige que les $\frac{1}{2}(p - 5)$ premiers de ces points soient doubles pour les courbes $C^{(3)}$ et que le dernier soit simple. En outre, le dernier point fixe du domaine de P commun à toutes les courbes C_2 appartient, comme point simple, aux courbes $C^{(3)}$. Le point P absorbe alors p des intersections des courbes C_1, $C^{(3)}$ et $2p$ des intersections des courbes C_2, $C^{(3)}$.

Le domaine du dernier point commun à toutes les courbes C_2 dans l'entourage de P, sur la branche de ces courbes tangente à PP'_2, est représenté sur Φ par la droite γ_{12}. Les courbes $\Gamma^{(3)}$ qui correspondent sur cette surface aux courbes $C^{(3)}$ coupent donc γ_{12} en un point variable. On en déduit la relation fonctionnelle

$$p\Gamma \equiv p\Gamma^{(3)} + (p-2)\gamma_{11} + 2(p-2)\gamma_{12} + 2(p-3)\gamma_{13} + \cdots + 2(p-m)\gamma_{1m}$$
$$+ 2(\gamma_{21} + 2\gamma_{22} + \cdots + m\gamma_{2m}) + \cdots,$$

les termes non écrits provenant des points de diramation de Φ distincts de Π.

Le même raisonnement montre qu'aux courbes $C^{(4)}$ découpées sur F par les hyperplans de Σ_4 correspondent sur Φ des courbes $\Gamma^{(4)}$ donnant lieu à la relation fonctionnelle

$$p\Gamma \equiv p\Gamma^{(4)} + 2(\gamma_{11} + 2\gamma_{12} + \cdots + m\gamma_{1m})$$
$$+ (p-2)\gamma_{21} + 2(p-2)\gamma_{22} + 2(p-3)\gamma_{23} + \cdots + 2(p-m)\gamma_{2m} + \cdots$$

11. On peut, par des discussions de caractère arithmétique, déterminer de proche en proche les singularités des courbes C_3, C_4, ..., C_i, ... au point P. Observons, toutefois, que cette singularité dépend du reste de la division de p par i. Ainsi, pour les courbes C_3, on arrive aux résultats suivants :

Les courbes C_3 ont en P la multiplicité six, trois des tangentes en ce point étant confondues avec PP'_1, les trois autres avec PP'_2. Le point P est l'origine de deux branches sur chacune de ces courbes.

Si $p = 6\mu + 1$ $(\mu \geq 1)$, il existe, sur chaque branche des courbes, $2\mu + 1$ points infiniment voisins successifs de P, communs à toutes les courbes C_3. Les $2\mu - 2$ premiers de ces points sont triples; les trois autres sont simples. Les $2\mu - 1$ premiers points appartiennent également aux courbes C_1, C_2.

Si $p = 6\mu + 5$ $(\mu \geq 1)$, il existe, sur chaque branche des courbes, $2\mu + 2$ points infiniment voisins successifs de P, communs à toutes les courbes C_3. Les $2\mu - 1$ premiers de ces points sont triples, le suivant est double et les deux derniers sont simples. Les 2μ premiers points appartiennent également à toutes les courbes C_1, C_2.

Dans chaque cas, le dernier point est uni parfait par l'involution I_p.

La détermination des singularités en P des courbes $C^{(5)}$, $C^{(6)}$, ... découpées sur F par les hyperplans des systèmes Σ_5, Σ_6, ... exige au préalable l'étude des points d'appui sur les axes de l'homographie T des espaces osculateurs aux courbes $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ au point P.

Observons que les courbes $C^{(1)} + C^{(2)}$ ont le même comportement, au point P, que les courbes C_1. De même les courbes $C^{(3)} + C^{(4)}$ ont le même comportement au point P que les courbes C_2. Il paraît vraisemblable que l'on trouvera, dans les systèmes $|C^{(5)}|$, $|C^{(6)}|$, ..., $|C^{(p-1)}|$, deux systèmes dont la somme sera formée de courbes ayant le même comportement en P que les courbes C_i. C'est ce que nous avons démontré avoir lieu dans le cas où F est un plan et où T est une homographie non homologique de ce plan.

Liége, le 23 septembre 1931.