Lucien GODEAUX
Professeur à l'Université de Liége.

Sur les Courbes tracées sur la Surface représentant l'Involution engendrée par une Homographie plane cyclique

BRUXELLES
MARCEL HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
112, rue de Louvain, 112

1931

Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*
3e série, tome XVI.

Sur les Courbes tracées sur la Surface représentant l'Involution engendrée par une Homographie plane cyclique

Considérons une homographie cyclique, de période p premier, non homologique, dans un plan ϖ; elle engendre une involution I_p d'ordre p. Dans le système formé par les courbes d'ordre p du plan ϖ, il existe p systèmes linéaires composés au moyen de l'involution I_p; l'un a la dimension $\frac{1}{2}(p+3)$ et est dépourvu de points-base; les autres ont la dimension $\frac{1}{2}(p+1)$ et ont pour points-base les points unis de l'involution. Posons $p = 2n + 1$. En rapportant projectivement les courbes du premier système aux hyperplans d'un espace linéaire S_{n+2} à $n + 2$ dimensions, on obtient une surface F, d'ordre p, image de l'involution I_p. Aux points de l'involution correspondent sur F trois points de diramation qui sont des points multiples de cette surface. Nous avons indiqué, dans deux notes antérieures (1), un procédé permettant de déterminer les singularités des points de diramation pour la surface F.

Aux courbes des $p - 1$ autres systèmes linéaires composés au moyen de I_p, dont il a été question plus haut,

(1) Sur les homographies planes cycliques. (*Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége,* 1929, 3e série, t. XV); Sur les Surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies cycliques (*Idem*, 1930, 3e série, t. XVI).

correspondent, sur la surface F, des courbes gauches d'ordre p, passant par les points de diramation. Il s'agit de déterminer la manière dont se comportent ces courbes en ces points. Ce problème peut être résolu en suivant une marche analogue à celle que nous avons adoptée pour déterminer les singularités des points de diramation, mais il semble difficile d'arriver par cette voie à des résultats généraux ([1]). Il faut donc trouver une autre méthode. La considération des systèmes linéaires de courbes d'ordre $2p$, composés au moyen de l'involution I_p, dans le plan ϖ, permettra probablement de faire un pas vers la solution du problème posé, même dans le cas plus général d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique quelconque. Nous allons montrer, dans cette note, que l'on est conduit à la solution dans le cas où le point de diramation de la surface F est un point double biplanaire, auquel sont infiniment voisins successifs $n - 1$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire.

1. Soit, dans un plan ϖ, l'homographie cyclique non homologique

$$\frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{\varepsilon x_2} = \frac{x_3'}{\varepsilon^{p-1} x_3}, \qquad (1)$$

où ε est une racine primitive d'ordre premier $p > 2$ de l'unité. Elle engendre une involution I_p, d'ordre p, ayant comme points unis les sommets du triangle de référence.

Désignons par $|C|$ le système complet des courbes d'ordre p du plan ϖ, par $|C_1|$ le système de dimension $n + 2$, dépourvu de points-base, composé au moyen

---

([1]) Le cas $p = 5$ a été traité de cette manière par Mlle Dessart, Sur les Surfaces représentant l'involution engendrée par une homographie cyclique de période cinq du plan (*Mémoires de la Société roy. des Sciences de Liége*, 1931, 3e série, t. XVII).

de I_p, où n est donné par $p = 2n + 1$. Les courbes C_1 ont pour équations

$$\left.\begin{aligned}\varphi \equiv \lambda_0 x_1^{2n+1} + \lambda_1 x_1^{2n-1} x_2 x_3 + \cdots + \lambda_i x_1^{2(n-i)+1} x_2^i x_3^i + \cdots \\ + \lambda_n x_1 x_2^n x_3^n + \lambda_{n+1} x_2^{2n+1} + \lambda_{n+2} x_3^{2n+1} = 0.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

En posant

$$\left.\begin{aligned}\frac{X_0}{x_1^{2n+1}} = \frac{X_1}{x_1^{2n-1} x_2 x_3} = \cdots = \frac{X_i}{x_1^{2(n-i)+1} x_2^i x_3^i} = \cdots \\ = \frac{X_n}{x_1 x_2^n x_3^n} = \frac{X_{n+1}}{x_2^{2n+1}} = \frac{X_{n+2}}{x_3^{2n+1}}\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

et en interprétant les X comme coordonnées projectives homogènes d'un espace linéaire S_{n+2} à $n+2$ dimensions, on obtient les équations d'une surface F d'ordre p, normale, image de l'involution I_p, à savoir

$$\left\Vert \begin{matrix} X_0 & X_1 & \cdots & X_{n-1} & X_n^2 \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n & X_{n+1} X_{n+2} \end{matrix} \right\Vert = 0.$$

Au point uni O_1 ($x_2 = x_3 = 0$) de l'involution I_p correspond sur la surface F le point de diramation O'_0 ($X_1 = X_2 = \ldots = X_{n+2} = 0$). Ce point est double biplanaire pour la surface F (voir notre note *Sur les Homographies*...), les plans tangents à la surface en ce point étant

$$X_2 = X_3 = \cdots X_n = X_{n+1} = 0,$$
$$X_2 = X_3 = \cdots X_n = X_{n+2} = 0.$$

Projetons la surface F à partir du point O'_0 sur l'hyperplan $X_0 = 0$. Nous obtenons une surface F_1, d'ordre $p - 2$, d'équations

$$\left\Vert \begin{matrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_{n-1} & X_n^2 \\ X_2 & X_3 & \cdots & X_n & X_{n+1} X_{n+2} \end{matrix} \right\Vert = 0.$$

Aux courbes C_1 correspondent les sections hyperplanes Γ_1

de la surface F. Appelons C_{11} les courbes C_1 passant par O_1 et dont l'équation est obtenue en faisant $\lambda_0 = 0$ dans (2). Les courbes C_{11} ont en O_1 la multiplicité deux, les tangentes $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ étant fixes. Aux courbes C_{11} correspondent les sections de F par les hyperplans passant par O'_0 et par suite les sections hyperplanes de F_1.

A l'entourage du point O'_0 sur F correspond sur F_1 l'ensemble des droites

$$X_0 = X_2 = X_3 = \cdots = X_n = X_{n+1} = 0, \qquad (a_{11})$$
$$X_0 = X_2 = X_3 = \cdots = X_n = X_{n+2} = 0, \qquad (a_{12})$$

que nous désignerons respectivement par a_{11}, a_{12}.

Les courbes C_{11}, assujetties à avoir en O_1 une tangente distincte de $x_2 = 0, x_3 = 0$, acquièrent un point quadruple à tangentes fixes $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ en ce point. Nous désignerons ces courbes par C_{12}; elles ont pour équation l'équation (2) où l'on a posé $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0$. A ces courbes C_{12} correspondent les sections de la surface F_1 par les hyperplans passant par le point O'_1 ($X_0 = 0$, $X_2 = \ldots = X_{n+2} = 0$). Ce point O'_1 est double biplanaire pour la surface F_1. La projection de celle-ci sur l'hyperplan $X_1 = 0$ à partir de O'_1 est une surface F_2 dont les équations s'obtiennent en effaçant la première colonne dans les équations F_1. Au domaine de O'_1 sur F_1 correspondent deux droites a_{21}, a_{22} de F_2, à savoir

$$X_0 = X_1 = 0, \quad X_3 = \cdots = X_n = X_{n+1} = 0, \qquad (a_{21})$$
$$X_0 = X_1 = 0, \quad X_3 = \cdots = X_n = X_{n+2} = 0. \qquad (a_{22}).$$

D'une manière générale, nous désignerons par C_{1k} les courbes dont l'équation se déduira de (2) en posant $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0$, ..., $\lambda_{k-1} = 0$. A ce système de courbes, nous associerons la surface F_k d'équations

$$\left\| \begin{matrix} X_k & X_{k+1} & \cdots & X_{n-1} & X_n^2 \\ X_{k+1} & X_{k+2} & \cdots & X_n & X_{n+1} X_{n+2} \end{matrix} \right\| = 0$$

dont les sections hyperplanes correspondent aux courbes C_{1k}.

La surface F_k a en O'_k ($X_0 = \ldots = X_{k-1} = 0$, $X_{k+1} = \ldots = X_{n+2} = 0$) un point double biplanaire dont les plans tangents sont

$$X_{k+2} = \cdots = X_n = 0, \quad X_{n+1} = 0,$$
$$X_{k+2} = \cdots = X_n = 0, \quad X_{n+2} = 0,$$

dans l'espace linéaire S_{n-k+2}, à $n-k+2$ dimensions, donné par

$$X_0 = X_1 = \cdots = X_{k-1} = 0.$$

La surface F_k est d'ordre $2(n-k)+1$.

Aux courbes C_{1k} correspondent les sections de la surface F_{k-1} par les hyperplans passant par le point O'_{k-1}, qui est double biplanaire pour la surface. Au domaine du point O'_{k-1} sur la surface F_{k-1} correspond sur la surface F_k l'ensemble de deux droites a_{k1}, a_{k2}, d'équations

$$X_0 = X_1 = \cdots = X_{k-1} = X_{k+1} = \cdots = X_n = X_{n+1} = 0, \quad (a_{k1})$$
$$X_0 = X_1 = \cdots = X_{k-1} = X_{k+1} = \cdots = X_n = X_{n+2} = 0. \quad (a_{k2}).$$

Ces droites passent par O'_k.

En particulier, pour $k = n$, aux courbes C_{1n}

$$\lambda_n x_1 x_3^n x_3^n + \lambda_{n+1} x_2^{2n+1} + \lambda_{n+2} x_3^{2n+1} = 0$$

correspondent les sections planes de la surface cubique F_n

$$X_{n-1} X_{n+1} X_{n+2} = X_n^3,$$

pour laquelle le point O'_{n-1} est biplanaire ordinaire. Les droites a_{n1}, a_{n2} sont mises en évidence dans la représentation plane de la surface F_n obtenue en la projetant de O'_{n-1} sur le plan $X_{n-1} = 0$.

Pour $k = n+1$, les résultats précédents cessent d'être valables. Les courbes C_{1n+1} ont en O_1 un point p-uple à tangentes variables et dégénèrent d'ailleurs en ces p tangentes.

2. Considérons les courbes C_{1k} $(0 < k \leq n)$. Elles ont en O_1 un point multiple d'ordre $2k$, à tangentes fixes $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Par suite, ces courbes ont en commun, outre O_1, un certain nombre de points infiniment voisins (dans les domaines successifs) de O_1. Sur chaque branche d'une de ces courbes, le dernier point fixe du domaine de O_1 est un point uni parfait de l'involution I_p. Au domaine du premier ordre de ce point correspond, sur la surface F_{k-1}, une courbe infiniment petite du domaine de O'_{k-1}, c'est-à-dire sur la surface F_k, une des droites a_{k1}, a_{k2}. On voit donc que ces courbes C_{1k} ont deux branches d'origine O_1 ; le dernier point infiniment voisin de O_1, sur chacune de ces branches, appartenant à toutes les courbes C_{1k}, est simple pour celles-ci.

Précisons ce résultat pour $k = 1$ et pour $k = n$.

Les courbes C_{11} ont en O_1 un point double à tangentes fixes $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Pour mettre en évidence le dernier point commun à toutes les courbes C_{11}, sur la branche tangente à $x_3 = 0$ en O_1, effectuons $2n - 1$ fois la transformation quadratique

$$x_1 : x_2 : x_3 = z_1^2 : z_1 z_2 : z_2 z_3. \tag{4}$$

Aux courbes C_{11} correspondent les courbes

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 z_1^{p(2n-1)} z_3 + \lambda_2 z_2^{p(2n-2)} z_2^{2n} z_3^2 + \cdots + \lambda_n z^{pn} z_2^{2n(n-1)} z_3^n \\ + \lambda_{n+1} z_1^{p(2n-1)} z_2 + \lambda_{n+2} z_2^{p(2n-1)-2n} z_3^p = 0.\end{aligned}\right\}$$

Ces courbes ont, en $z_2 = z_3 = 0$, un point simple à tangente variable

$$\lambda_1 z_3 + \lambda_{n+1} z_2 = 0.$$

Au point infiniment voisin de $z_2 = z_3 = 0$ sur cette courbe correspond le point découpé par l'hyperplan

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_{n+1} X_{n+1} = 0$$

sur la droite a_{12}.

En reprenant les notations de nos travaux cités plus haut, on voit que les courbes C_{11} ont en commun les $2n - 1$ points O_{12}, O_{122}, ..., $O_{12\cdots 2}$ infiniment voisins successifs de O_1.

On verrait de même que les courbes C_{11} passent par les $2n - 1$ points O_{13}, O_{133}, ..., $O_{13\cdots 3}$ infiniment voisins successifs de O_1, sur l'autre branche des courbes. Aux points infiniment voisins du dernier correspondent les points de la droite a_{11} découpés par les hyperplans

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_{n+2} X_{n+2} = 0.$$

Examinons maintenant les courbes C_{1n}, d'équation

$$\lambda_n x_1 x_2^n x_3^n + \lambda_{n+1} x_2^{2n+1} + \lambda_{n+2} x_3^{2n+1} = 0.$$

La transformation (4), effectuée sur ces courbes, donne

$$\lambda_n z_1^{n+2} z_3^n + \lambda_{n+1} z_1^{2n+1} z_2 + \lambda_{n+2} z_2 z_3^{2n+1} = 0. \tag{5}$$

Le point O_{12} est donc simple pour ces courbes.

Effectuons sur les courbes (5), $n - 1$ fois la transformation

$$z_1' : z_2' : z_3' = z_1^2 : z_2 z_3 : z_1 z_3.$$

On obtient

$$\lambda_n z_1^p z_3 + \lambda_{n+1} z_1^p z_2 + \lambda_{n+2} z_2 z_3^p = 0.$$

Ces courbes ont en $z_2 = z_3 = 0$ un point simple à tangente variable

$$\lambda_n z_3 + \lambda_{n+1} z_2 = 0$$

et au point infiniment voisin du point considéré correspond le point découpé sur la droite a_{n2} par

$$\lambda_n X_n + \lambda_{n+1} X_{n+1} = 0.$$

Les courbes C_{1n} ont n points O_{12}, O_{123}, $\dots_3$ simples infiniment voisins successifs de O_1. On verrait de même qu'elles ont également en commun les n points simples O_{13}, O_{132}, ..., $O_{132\dots2}$ infiniment voisins successifs de O_1, le domaine du dernier point ayant pour homologue la droite a_{n1}.

On ne peut utiliser la même méthode pour les courbes C_1^k, parce qu'elle conduit à des complications de notation. Ainsi les courbes C_{1k} ont en commun λ points O_{12}, O_{122}, ..., $O_{12\dots2}$ infiniment voisins successifs de O_1, λ étant le plus grand entier contenu dans $\frac{2n-k+1}{k}$. Au dernier de ces points font suite des points $O_{12\cdots23}$, ... communs à toutes les courbes.

3. Considérons le système complet $|2C|$ des courbes d'ordre $2p$ du plan ϖ. Il contient p systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_p; l'un d'eux, que nous désignerons $|\overline{C}_1|$, est dépourvu de points-base et a la dimension $2p+3$. Les $p-1$ autres ont pour points-base les points unis de I_p et ont la dimension de $2p+2$.

Les courbes $\overline{C}_1$ ont pour équation

$$x_1^p \varphi(x_1, x_2, x_3) + \dots = 0, \tag{6}$$

les termes non écrits contenant x_1 à une puissance inférieure à p.

En rapportant projectivement les courbes $\overline{C}_1$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_{2n+3} à $2n+3$ dimensions, on obtient une surface $\overline{F}$, d'ordre $4p$, image de l'involution I_p. Il suffit de comparer les équations (2) et (6) pour voir que la surface F est la projection de $\overline{F}$ à partir d'un espace linéaire à n dimensions, coupant $\overline{F}$ en $3p$ points.

Au point uni O_1 de I_p correspond sur $\overline{F}$ un point de diramation qui est un point double biplanaire de la surface, auquel sont infiniment voisins $n - 1$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. Cette singularité correspond à la singularité du point O'_0 pour la surface F, dans la projection dont il vient d'être question.

On peut considérer les systèmes linéaires $|\bar{C}_{11}|$, $|\bar{C}_{12}|$, ..., $|\bar{C}_{1n}|$ définis comme les systèmes $|C_{11}|$, $|C_{12}|$, ..., $|C_{1n}|$. Les courbes $\bar{C}_{1k}$ seront représentées par l'équation (6), où l'on aura posé, dans φ, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0$, ..., $\lambda_{k-1} = 0$. Et tout ce qui a été dit pour les courbes C_{1k} pourra être dit pour les courbes $\bar{C}_{1k}$, au sujet du comportement au point uni O_1 de ces courbes, et au sujet du comportement des courbes correspondantes sur la surface $\bar{F}$, vis-à-vis du point de diramation correspondant à O_1.

Aux courbes $\bar{C}_{11}$, $\bar{C}_{12}$, ..., $\bar{C}_{1k}$, ..., $\bar{C}_{1n}$ correspondent sur F des courbes d'ordre $2p$, découpées par des hyperquadriques, se comportant vis-à-vis des droites a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, ..., a_{n1}, a_{n2} respectivement comme les courbes C_{11}, C_{12}, ..., C_{1k}, ..., C_{1n}.

4. Revenons aux systèmes linéaires de courbes d'ordre p du plan ϖ, distincts de $|C_1|$, composés au moyen de l'involution I_p. Ils sont au nombre de $p - 1 = 2n$ et nous les désignerons par $|C_2|$, $|C_3|$, ..., $|C_p|$.

Considérons en particulier les systèmes représentés par les équations

$$\left.\begin{aligned}\varphi_k(x_1, x_2, x_3) \equiv x_2^k \sum_i \mu_i x_1^{2(n-i)-k+1} x_2^i x_3^i \\ + x_3^{2n-k+1} \sum_j \nu_j x_1^{k-2j} x_2^j x_3^j = 0,\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{2n-k+1}(x_1, x_2, x_3) = x_3^k \sum_i \mu'_i x_1^{2(n-i)-k+1} x_2^i x_3^i \\ + x_2^{2n-k+1} \sum_j \nu'_j x_1^{k-2j} x_2^j x_3^j = 0,\end{aligned}\right\}$$

où $1 \leq k \leq n$, i prenant toutes les valeurs depuis 0 jusqu'au plus grand entier compris dans $\frac{1}{2}(2n - k + 1)$, et j toutes les valeurs de 0 au plus grand entier contenu dans $\frac{1}{2}k$.

On a

$$\varphi_k(x_1, \varepsilon x_2, \varepsilon^{2n} x_3) = \varepsilon^k \varphi_k(x_1, x_2, x_3),$$
$$\varphi_{2n-k+1}(x_1, \varepsilon x_2, \varepsilon^{2n} x_3) = \varepsilon^{2n-k+1} \varphi_{2n-k+1}(x_1, x_2, x_3).$$

Désignons ces systèmes respectivement par $|C_k|$, $|C_{2n-k+1}|$.

Le terme de φ_k ayant la puissance la plus élevée en x_1 est

$$\mu_0 x_1^{2n-k+1} x_2^k;$$

donc les courbes C_k ont en O_1 la multiplicité k, les k tangentes étant confondues avec $x_2 = 0$. De même, les courbes C_{2n-k+1} ont la multiplicité k en O_1, toutes les tangentes étant confondues avec $x_3 = 0$. Par conséquent, le système $|C_k + C_{2n-k+1}|$ est formé de courbes d'ordre $2p$ ayant en O_1 la multiplicité $2k$, avec k tangentes confondues avec $x_2 = 0$ et k tangentes confondues avec $x_3 = 0$. Ces courbes se comportent donc, au point O_1, comme les courbes $\overline{C}_{1k}$ et par suite comme les courbes C_{1k}.

Si l'on compare le premier membre de l'équation

$$\varphi_k(x_1, x_2, x_3)\,\varphi_{2n-k+1}(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x_1, à l'équation (6), où l'on a posé $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{k-1} = 0$, on voit que l'on a effectivement

$$\overline{C}_{1k} \equiv C_k + C_{2n-k+1}.$$

Comme nous l'avons vu, les courbes C_{1k} ont deux branches d'origine O_1, et sur chacune de ces branches il y a un certain nombre de points infiniment voisins successifs de O_1, communs à toutes les courbes C_{1k}, le dernier de ces points étant simple. Désignons par A_2 le dernier de ces points situé sur la branche tangente à $x_2 = 0$ en O_1, par A_3 le dernier point situé sur la branche tangente en O_1 à $x_3 = 0$. Au domaine du point A_2 correspond, sur la surface F_k, l'une des droites a_{k1}, a_{k2}, par exemple a_{k2}. Au domaine du point A_3 correspond sur F_k la droite a_{1k}. Les courbes $\overline{C}_{1k}$ se comportent en O_1 et dans le voisinage de ce point comme les courbes C_{1k}, car on a

$$\overline{C}_{1k} \equiv C_{1k} + C.$$

Les courbes C_{k1} passent donc simultanément par les points A_2, A_3 et ont des points variables simples infiniment voisins de ces points. Pour en conclure que les courbes C_k passent simplement par A_2 et les courbes C_{2n-k+1} simplement par A_3, il faut encore prouver que l'on ne peut trouver de courbes $\overline{C}_{1k}$ particulières passant doublement par un de ces points. C'est ce que nous allons faire.

Rapportons projectivement les courbes $\overline{C}_{1k}$ aux hyperplans d'un espace linéaire ayant la même dimension que $|\overline{C}_{1k}|$; nous obtenons une surface $\overline{F}_k$, image de l'involution I_p, analogue à la surface F_k. Aux courbes $\overline{C}_{1k+1}$ correspondent les sections de $\overline{F}_k$ par les hyperplans passant par un point $\overline{O}'_k$ double biplanaire pour la surface. Aux domaines des points A_2, A_3 correspondent sur $\overline{F}_k$ des droites $\overline{a}_{k2}$, $\overline{a}_{k1}$ se coupant en $\overline{O}'_k$. Cela étant, s'il existe une courbe $\overline{C}_{1k}$ passant doublement par A_2 par exemple, il lui correspond sur $\overline{F}_k$ la section de cette surface par un hyperplan contenant la droite $\overline{a}_{k2}$ et passant par suite par $\overline{O}'_k$. Mais alors, cette courbe $\overline{C}_{1k}$ serait une courbe $\overline{C}_{1k+1}$ et aurait en O_1 la multiplicité $2(k+1)$, contrairement à l'hypothèse. (On aurait $\lambda_k = 0$). On en conclut que

Les courbes C_k (*ou* C_{2n-k+1}) *se comportent, dans le voisinage du point* O_1, *exactement comme les branches des courbes* C_{1k} *tangentes à la droite* $x_2 = 0$ (*ou* $x_3 = 0$) *en* O_1.

Appelons respectivement Γ_k, Γ_{2n-k+1} les courbes qui correspondent, sur la surface F_k, aux courbes C_k, C_{2n-k+1}. Les courbes Γ_k, Γ_{2n-k+1} rencontrent respectivement les droites a_{k2}, a_{k1} en un point variable. Nous avons donc le résultat suivant :

La singularité de la surface F *au point* O'_0 *est équivalente, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble* p — 1 *droites* [1]. *Il existe sur la surface* p — 1 *systèmes linéaires de courbes d'ordre* p; *les courbes d'un de ces systèmes rencontrent une des droites en un point variable, mais ne rencontrent pas les autres droites.*

Liége, le 6 janvier 1931.

---

(1) On peut préciser en observant que deux droites consécutives de la suite

$$a_{11},\ a_{21},\ \ldots,\ a_{k1},\ \ldots,\ a_{n1},\ a_{n2},\ \ldots,\ a_{k2},\ \ldots,\ a_{12}$$

se coupent en un point, une droite de la suite ne rencontrant que la précédente et la suivante.