ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences,* 5e série, t. XVII, nos 8-9.
Séance du 1er août 1931, pp. 991-1000.

GÉOMÉTRIE.

Sur les involutions du second ordre de l'espace,

par LUCIEN GODEAUX,
Correspondant de l'Académie.

(*Seconde note.*)

Nous considérons, dans cette seconde note [1], trois involutions du second ordre déjà étudiées par MM. Sharpe et Snyder [2]. Comme la première involution étudiée, celles-ci sont engendrées par des systèmes linéaires triplement infinis, de degré deux, de surfaces du quatrième ordre ayant une seule courbe-base simple.

Nous montrons que les involutions peuvent être définies par la considération de la congruence de quartiques gauches intersections des quadriques homologues de deux réseaux homographiques, ces quartiques admettant une courbe bisécante commune.

Les trois involutions considérées sont rationnelles ; elles sont birationnellement équivalentes à un espace ayant comme surface de diramation une surface du sixième ordre ayant un certain nombre de points doubles. Par un de ces points

(1) La première note est parue dans les *Bull. de l'Acad. roy. de Belg.* (Cl. des Sc.), 1931, pp. 516-526.

(2) SHARPE et SNYDER, Certain types of involutional space transformations. (*Transactions of the amer. math. Society*, 1919, t. XX, pp. 185-202; 1920, t. XXI, pp. 52-78.)

doubles passent des bitangentes à la surface de diramation; quatre, huit, douze ou seize bitangentes suivant les points.

1. Soit Γ une courbe d'ordre n et de genre p par laquelle passent ∞^3 surfaces du quatrième ordre, formant un système linéaire. Désignons par F ces surfaces, par $|F|$ le système linéaire qu'elles forment. Sur une surface F, les surfaces du système $|F|$ découpent des courbes d'ordre $16-n$, C, formant un réseau et par suite de genre deux. Il en résulte que le système $|F|$ a le degré deux, les surfaces F étant de genre $p_a = P_4 = 1$. Les surfaces du quatrième ordre passant par une courbe C sont en nombre ∞^{4n-31}; par suite la courbe Γ est de genre $p = 4n - 30$.

Les courbes C rencontrent la courbe Γ en

$$32 - p = 62 - 4n$$

points. On a d'ailleurs $n \geq 11$, puisque les courbes C, de genre deux, sont d'ordre supérieur à quatre.

Les ∞^3 couples de points communs aux réseaux de surfaces F forment une involution I_2 d'ordre deux. Nous désignerons par T la transformation birationnelle involutive qui fait se correspondre les points d'un couple de I_2.

Appelons Σ l'espace contenant la courbe Γ et le système $|F|$. En rapportant projectivement les surfaces F aux plans d'un espace Σ', on obtient une tranformation (1, 2) entre Σ' et Σ.

La jacobienne du système $|F|$ est une surface Φ_{12}, d'ordre douze, passant trois fois par la courbe Γ. La surface de diramation de Σ' est une surface Φ'_6, d'ordre six, correspondant à Φ_{12}.

2. Considérons un point P de la courbe Γ et une droite p, passant par P, mais n'y touchant pas la surface Φ_{12}. Les surfaces F tangentes en P à la droite p sont tangentes au plan tangent à Γ en P contenant p ; ces surfaces forment un réseau et il leur correspond, dans l'espace Σ', les plans d'une gerbe de sommet P'. Lorsque la droite p varie dans la gerbe de sommet P, les surfaces F passant simplement par Γ, le point P' décrit une droite p'.

Il existe un faisceau de surfaces F ayant un point double en P ; ces surfaces ont en commun une courbe C ayant un point triple en P. Le faisceau appartient à chacun des réseaux de surfaces F qui viennent d'être envisagés et par suite à la droite p' correspond la courbe C base du faisceau. Il en résulte en outre que les surfaces F tangentes en P à la droite p ont encore en commun un point de la courbe C envisagée; par suite T fait correspondre cette courbe aux points infiniment voisins de P. Les trois points de la courbe C infiniment voisins de P sont donc des points de coïncidence de I_2 ; cette courbe C touche par suite les trois nappes de la surface Φ_{12} en P et la droite p' touche la surface Φ'_6 en trois points.

Lorsque P décrit Γ, la droite p' engendre une surface réglée d'ordre $62 - 4n$, égal au nombre de points d'appui des courbes C sur Γ. Cette surface réglée R' est donc circonscrite à la surface de diramation Φ'_6 le long d'une courbe d'ordre $3(62 - 4n)$.

3. Soit Δ_m une courbe d'ordre m s'appuyant en $4m$ points sur la courbe Γ. Les surfaces F passant par un point arbitraire de la courbe Δ_m contiennent cette courbe et par suite tout couple de points de Δ_m est un couple de l'involution I_2. En d'autres termes, la courbe Δ_m est fondamentale, de seconde espèce; pour la transformation T.

Désignons par F^* les surfaces F contenant la courbe Δ_m. Ces surfaces forment un réseau et il leur correspond dans Σ' les plans d'une gerbe de sommet D'_m.

Les surfaces F^* découpent sur l'une d'entre elles un faisceau de courbes elliptiques C^*, d'ordre $16 - n - m$. A une de ces courbes correspond, dans Σ', une droite passant par le point

*

D'_m. Les courbes C^* contiennent chacune ∞^1 groupes de I_2; par suite les droites passant par D'_m rencontrent encore la surface Φ'_6 en quatre points et le point D'_m est double pour cette surface.

Une courbe C^* coupe la courbe Δ_m en deux points formant un couple de I_2. Les courbes C^* tracées sur une surface F^* marquent donc sur Δ_m une g_2^1; celle-ci possède deux points doubles et par suite D'_m est un point double conique de la surface Φ'_6. Il y a une correspondance biunivoque entre les points du domaine du point D'_m sur la surface Φ'_6 et les points de la courbe Δ_m. Cette courbe est rationnelle et appartient, comme courbe simple, à la surface Φ_{12}.

Il existe ∞^2 surfaces F^* ayant un point double en chaque point d'appui de Δ_m sur Γ ; ces surfaces forment un faisceau ayant pour base les courbes Γ, Δ_m et une courbe C^* ayant un point double au point d'appui considéré. A cette courbe correspond dans Σ' une droite passant par D'_m, appartenant à la réglée R' et par suite touchant la surface Φ'_6 en deux points en dehors de D'_m. Par ce point passent donc $4m$ bitangentes à la surface Φ'_6.

4. Soit μ un plan quelconque. Aux couples de I_2 dont un point appartient à μ correspondent, dans Σ', les points d'une surface M' d'ordre $16 - n$. Il en résulte que T fait correspondre à μ une surface M d'ordre $63 - 4n$ passant $16 - n$ fois par la courbe Γ et m fois par la courbe Δ_m.

La surface M coupe le plan μ suivant une courbe formée d'une courbe d'ordre 12, section de la jacobienne Φ_{12} et suivant une courbe d'ordre $51 - 4n$, passant $13 - n$ fois par les points où μ coupe Γ. Cette courbe contient ∞^1 couples de I_2 et il lui correspond, sur M', la courbe double de cette surface. Une surface F coupe la première courbe suivant $\frac{1}{2}(12 - n)(17 - n)$ couples de I_2; par suite la surface M' possède une courbe double d'ordre $\frac{1}{2}(12 - n)(17 - n)$.

Le plan μ contient $\binom{m}{2}$ couples de points de I_2 situés sur la courbe Δ_m; par suite la courbe double de cette surface M′ passe $\frac{1}{2}m(m-1)$ fois par le point D'_m.

Considérons maintenant une droite s et soit S la courbe que T lui fait correspondre. A la courbe $s+S$ correspond, dans Σ', une courbe du quatrième ordre; par suite la courbe $s+S$ est d'ordre $4(16-n)$. Il en résulte que la courbe S est d'ordre $63-4n$; elle s'appuie en $4(62-4n)$ points sur la courbe Γ. Les couples de points de I_2 étant en nombre ∞^3, la droite s ne contient pas en général de couple de cette involution ; par suite la courbe S ne rencontre la droite s qu'aux douze points communs à celle-ci et à la surface Φ_{12}. La quartique S′, qui correspond dans Σ' à la droite s, est rationnelle et en général dépourvue de point double; c'est donc une quartique de seconde espèce.

Les quartiques S′ sont tangentes en douze points (variables) à la surface Φ'_6 et les surfaces M′ sont inscrites dans cette même surface, la courbe de contact étant d'ordre $3(16-n)$.

5. La courbe Γ étant supposée irréductible, quatre cas peuvent se présenter :

$$
\begin{aligned}
&a)\quad n=11, \quad p=14;\\
&b)\quad n=10, \quad p=10;\\
&c)\quad n=9, \quad p=6;\\
&d)\quad n=8, \quad p=2.
\end{aligned}
$$

Le premier cas, étudié par Montesano, a été considéré dans notre première note.

Dans les trois autres cas, le nombre des courbes Δ_m s'appuyant en $4m$ points sur Γ (quadrisécantes, coniques octosécantes, ect.), a été déterminé par MM. Sharpe et Snyder [1].

---

[1] *Loc. cit.* Le nombre des coniques octosécantes peut également être déterminé en appliquant les formules très générales de M. Severi et de Tanturri. Voir SEVERI, *Atti della R. Accad. di Torino*, 27 mai et 18 novembre 1900.

6. Examinons le cas $n = 10$, $p = 10$. Les courbes C sont des sextiques de genre deux qui s'appuient en 22 points sur la courbe Γ.

La courbe Γ possède 31 quadrisécantes, 11 coniques octosécantes et une cubique gauche la rencontrant en 12 points. La surface Φ'_6 possède 43 points doubles coniques.

Fixons l'attention sur la cubique gauche Δ_3, s'appuyant en 12 points sur Γ. Les surfaces du quatrième ordre F^* contenant Γ et Δ_3 se coupent encore deux à deux suivant les cubiques elliptiques C^*, c'est-à-dire suivant des cubiques planes. Les cubiques planes C^* s'appuient en dix points sur la courbe Γ et en deux points sur la cubique gauche Δ_3. Sur une surface F^* se trouvent ∞^1 cubiques C^* formant un faisceau ; les plans de ces cubiques forment également un faisceau dont l'axe d appartient à la surface et s'appuie en un point Q sur la cubique gauche Δ_3. Deux surfaces F^* ont en commun une cubique C^*; par suite les plans des ∞^2 cubiques C^* passent par le point Q.

Considérons en particulier une surface F^* contenant une conique Δ_2 octosécante de Γ. Cette conique Δ_2 fait partie d'une cubique C^* et par suite les plans des onze coniques octosécantes de la courbe Γ passent par le point Q.

La congruence bilinéaire formée par les cubiques planes C^* apparaît comme un cas particulier de la congruence engendrée par les intersections des plans d'une gerbe et des surfaces cubiques d'un réseau homographique à la gerbe, que nous avons rencontrée autrefois (1).

A un plan μ de Σ correspond dans Σ' une surface M' d'ordre six, ayant une courbe double d'ordre sept ; si en particulier le plan μ est celui d'une cubique C^*, la courbe double de la surface M' correspondante dégénère et comprend comme partie la droite passant par le point D'_3, homologue de la courbe C^* considérée.

(1) Sulle congruenze lineari di curve piane dotate di una sola curva singolare. (*Rend. Circolo mat. di Palermo*, 1912, t. 34, pp. 288-300.)

7. Envisageons maintenant une conique octosécante Δ_2 de Γ. Désignons maintenant par F^* les surfaces F contenant Δ_2 et par C^* les biquadratiques elliptiques qui, avec Δ_2, forment des courbes C. Les biquadratiques C^* s'appuient en 14 points sur la courbe Γ et en deux points sur la conique Δ_2.

Soit Ψ une quadrique passant par une courbe C^*. Cette quadrique coupe encore une surface F^* contenant C^* suivant une biquadrique K et les quadriques passant par K découpent, sur la surface F^* envisagée, les courbes C^* appartenant à cette surface. La courbe K rencontre la courbe Γ en six points et la conique Δ_2 en deux points. Désignons par A ce groupe de 8 points. En considérant toutes sur les surfaces F^* passant par la biquadratique C^* choisie, on voit que les courbes C^* se trouvent sur les quadriques passant par le groupe de points A.

En choisissant une seconde quadrique Ψ_1, passant par la même courbe C^* que Ψ, on déterminera un second groupe de points A_1, analogue à A. Il est clair que les courbes C^* seront les intersections de quadriques passant par A et par A_1, homologues dans une homographie entre les deux réseaux formés par ces quadriques.

On voit donc que la congruence linéaire formée par les quartiques C^* est un cas particulier de la congruence engendrée par les intersections des quadriques homologues de deux réseaux homographiques, congruence dont la courbe singulière est d'ordre 12.

Les groupes A, A_1 peuvent être choisis de la manière suivante : Il existe ∞^1 surfaces F^*, formant un faisceau, contenant la cubique Δ_3. La base de ce faisceau est complétée par une droite r, située dans le plan de Δ_2, bisécante commune de Δ_3 et de Γ. La courbe $\Delta_3 + r$ est une biquadratique C^*. Il suffira donc, pour déterminer les groupes A, A_1, de prendre les intersections avec Γ et Δ_2, de deux quadriques passant par Δ_3 et par r.

8. Passons au cas $n=9$, $p=6$. Les courbes C sont d'ordre sept et de genre deux; elle s'appuient en 26 points sur la courbe Γ.

La courbe Γ, d'ordre 9 et de genre six, possède 30 quadrisécantes, 12 coniques octosécantes et cinq cubiques gauches la rencontrant chacune en 12 points. La surface de diramation Φ'_6 possède donc 47 points doubles coniques. Les surfaces M', qui correspondent dans Σ' aux plans de Σ, sont d'ordre sept, possèdent une courbe double d'ordre 12 et touchent Φ'_6 le long de courbes d'ordre 21.

Considérons une cubique gauche Δ_3 s'appuyant en 12 points sur Γ. Désignons encore par F^* les surfaces de quatrième ordre, formant un réseau, passant par les courbes Γ, Δ_3, par C^* les quartiques elliptiques suivant lesquelles les surfaces F^* se rencontrent deux à deux en dehors de la base du réseau $|F^*|$.

Les courbes C^* s'appuient en 14 points sur Γ et en deux points sur Δ_3. Une quadrique passant par une courbe C^* rencontre encore, en dehors de cette courbe, Γ en 4 points et Δ_3 en quatre points également.

Le raisonnement qui a été fait plus haut (n° 7) peut être reproduit dans le cas actuel. Choisissons une courbe C^* et menons par cette courbe deux quadriques Ψ, Ψ_1. Soient A, A_1, le groupe des points de rencontre, en dehors de C^*, des courbes Γ, Δ_3 respectivement avec ces quadriques. Par toute courbe C^* passent une quadrique contenant le groupe A et une quadrique contenant le groupe A_1 ; ces quadriques se correspondent dans dans une homographie existant entre les réseaux de quadriques ayant respectivement pour bases les groupes A, A_1. Dans le cas étudié, la congruence des courbes C^* rentre dans le même type que celle qui a été étudiée précédemment (n° 7). On pourrait d'ailleurs également choisir des positions particulières des groupes A, A_1 en considérant une courbe C^* comprenant comme partie une quadrisécante, ou une conique octosécante de Γ, ou une seconde cubique gauche s'appuyant en 12 points sur Γ.

9. Envisageons enfin le cas $n = 8$, $p = 2$. Les courbes C sont d'ordre huit et de genre deux; elles s'appuient en 30 points sur la courbe Γ.

La courbe Γ, d'ordre huit et de genre deux, possède 31 quadrisécantes, 10 coniques octosécantes, 9 cubiques gauches la rencontrant en 12 points, et une quartique rationnelle la rencontrant en 16 points. La surface Φ'_6 possède donc 51 points doubles coniques.

Les surfaces M', qui correspondent dans Σ' aux plans de Σ, sont d'ordre huit; elles possèdent une courbe double d'ordre 18 et touchent Φ'_6 le long de courbes d'ordre 24.

Soient F^* les surfaces du quatrième ordre passant par la courbe Γ et par la courbe rationnelle du quatrième ordre Δ_4 s'appuyant en 16 points sur Γ; C^* les quartiques elliptiques intersections variables des surfaces F^*. Les courbes C^* s'appuient en 14 points sur la courbe Γ et en deux points sur la courbe Δ_4.

Une quadrique passant par une courbe C^* coupe encore, en dehors de cette courbe, Γ en deux points et Δ_4 en six points. Désignons par A le groupe de huit points ainsi obtenu et soit A_1 un groupe analogue. En raisonnant comme précédemment, on voit que les courbes C^* sont les intersections des quadriques de deux réseaux homographiques ayant pour bases respectivement les groupes de points A, A_1.

10. De ce qui précède, nous pouvons déduire la construction suivante des trois involutions étudiées.

Soient $|\Psi|$, $|\Psi_1|$ deux réseaux de quadriques ayant respectivement pour bases les groupes de huit points A, A_1. Établissons une homographie Ω entre les réseaux.

Deux quadriques homologues dans Ω ont en commun une quartique gauche C^*. Les courbes C^* communes aux quadriques de deux faisceaux homologues engendrent une surface du quatrième ordre F^*. On a ainsi un réseau de surfaces $|F^*|$.

Les surfaces F^* ont en commun une courbe G, d'ordre 12, lieu des points qui appartiennent à toutes les quadriques de deux faisceaux homologues dans Ω. Les courbes C^* s'appuient en 16 points sur la courbe G.

Pour qu'il existe une transformation birationnelle involutive dont les courbes C^* soient des courbes unies, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer rationnellement, sur chaque courbe C^*, une série linéaire g_2^1. Pour cela, il faut que la courbe G se scinde en deux parties, les courbes C^* s'appuyant en 14 points sur l'une des composantes, en deux points sur l'autre. C'est ce qui se présente dans les involutions étudiées ici. Il en est d'ailleurs de même pour l'involution étudiée dans notre première note ($n = 11$, $p = 16$), où la courbe G dégénère en une courbe du onzième ordre et une de ses quadrisécantes.

Il est évident que les seules involutions qui peuvent être obtenues par ce procédé sont les quatre involutions étudiées et leurs cas particuliers obtenus par dégénérescences de la courbe Γ.

Liége, le 18 juillet 1931.