Lucien GODEAUX
Correspondant de l'Académie royale de Belgique,
Professeur à l'Université de Liége.

REMARQUE

SUR LA

THÉORIE DES SUITES DE LAPLACE

BRUXELLES
M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
112, Rue de Louvain, 112

1931

Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*
3e série, tome XVI.

Remarque
sur la théorie des suites de Laplace

G. Darboux a mis en évidence le caractère dualistique des suites de Laplace ([1]). Cette propriété a été établie ensuite par M. Tzitzeica en considérant la suite polaire d'une suite de Laplace donnée par rapport à une hyperquadrique ([2]). Nous montrons dans cette note que la propriété en question peut être démontrée en considérant la transformée d'une suite de Laplace par une réciprocité quelconque. Cette démonstration ne fait appel qu'à des propriétés immédiates des suites de Laplace.

Pour éviter des complications d'écriture, nous avons considéré le cas d'une suite de Laplace appartenant à un espace linéaire à cinq dimensions, mais le lecteur verra aisément que la démonstration s'étend aux suites appartenant à un espace linéaire à un nombre quelconque de dimensions.

1. Considérons, dans un espace S_5 à cinq dimensions, un point x sont les coordonnées projectives homogènes dépendent de deux paramètres u, v. Supposons que les

---

([1]) G. Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des Surfaces*, t. II, pp. 183-185. Paris, 1889.

([2]) G. Tzitzeica, *Géométrie différentielle projective des réseaux*, pp. 121-123. Bucarest, 1924.

lignes u, v forment, sur la surface (x), un réseau conjugué. Si l'on convient de poser

$$x^{ik} = \frac{\partial^{i+k} x}{\partial u^i \partial v^k},$$

les coordonnées du point x satisfont donc à l'équation de Laplace

$$x^{11} + a x^{10} + b x^{01} + c x = 0.$$

Le point x appartient à une suite de Laplace dont nous indiquerons les points successifs par

$$\ldots, x_{-i}, \ldots, x_{-1}, x, x_1, x_2, \ldots, \tag{1}$$

chacun d'eux étant le transformé de Laplace du précédent dans le sens des v. Nous supposerons que la suite (1) n'appartient pas à un hyperplan de S_5.

Considérons d'autre part une réciprocité de S_5, d'équation

$$\Omega(x, x') = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x'_k = 0, \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, 5)$$

pour laquelle nous supposerons le déterminant $|\, a_{ik} \,|$ différent de zéro.

Le point y que la réciprocité Ω fait correspondre à l'hyperplan $x_{-2}\, x_{-1}\, x\, x_1\, x_2$, est donné par les équations

$$\Omega(x_{-2}, y) = 0, \quad \Omega(x_{-1}, y) = 0, \quad \Omega(x, y) = 0,$$
$$\Omega(x_1, y) = 0, \quad \Omega(x_2, y) = 0,$$

c'est-à-dire par les équations

$$\left.\begin{array}{l} \Omega(x^{20}, y) = 0, \quad \Omega(x^{10}, y) = 0, \quad \Omega(x, y) = 0, \\ \Omega(x^{01}, y) = 0, \quad \Omega(x^{02}, y) = 0. \end{array}\right\} \tag{2}$$

En dérivant les quatre premières des équations (2) par rapport à v, on obtient

$$\Omega(x^{20}, y^{01}) = 0,\ \Omega(x^{10}, y^{01}) = 0,\ \Omega(x, y^{01}) = 0,\ \Omega(x^{01}, y^{01}) = 0. \quad (3)$$

De même, en dérivant les quatre dernières des équations (2) par rapport à u, on a

$$\Omega(x^{10}, y^{10}) = 0,\ \Omega(x, y^{10}) = 0,\ \Omega(x^{01}, y^{10}) = 0,\ \Omega(x^{02}, y^{10}) = 0. \quad (4)$$

Enfin, en dérivant les trois dernières des équations (3) par rapport à u, ou les trois premières des équations (4) par rapport à v, on obtient

$$\Omega(x^{10}, y^{11}) = 0, \qquad \Omega(x, y^{11}) = 0, \qquad \Omega(x^{01}, y^{11}) = 0.$$

Il en résulte que les points y, y^{10}, y^{01}, y^{11} se trouvent dans le plan que Ω fait correspondre au plan $x_{-1}\,x\,x_1$. Observons que les points y, y^{10}, y^{01} ne peuvent être en ligne droite, car si l'on avait

$$y^{01} = \lambda y + \mu y^{10},$$

on aurait

$$\Omega(x^{20}, y^{01}) = \lambda \Omega(x^{20}, y) + \mu \Omega(x^{20}, y^{10}) = 0,$$

d'où

$$\Omega(x^{20}, y^{10}) = 0.$$

Mais alors, les points $x_{-2}, \ldots, x_2$ appartiendraient à deux hyperplans de S_5 et la suite de Laplace (1) appartiendrait à ces hyperplans, contrairement à l'hypothèse. On a donc une relation de la forme

$$y^{11} + a'y^{10} + b'y^{01} + c'y = 0$$

et le point y décrit un réseau conjugué.

2. Le point y_1, défini par les relations

$$\Omega(x_{-3}, y_1) = 0, \quad \Omega(x_{-2}, y_1) = 0, \ldots, \Omega(x_1, y_1) = 0$$

décrit également un réseau. On a, en raisonnant comme plus haut,

$$\Omega(x_{-2}, y_1^{10}) = 0, \ldots, \Omega(x_1, y_1^{10}) = 0.$$

En tenant compte des relations (2), (3), on voit que les points y, y^{01}, y_1^{10}, y_1 appartiennent à la droite que Ω fait correspondre à l'espace $x_{-2}\, x_{-1}\, x x_1$ ou $x^{20}\, x^{10}\, x x^{01}$. Il en résulte que les points y, y_1 sont consécutifs dans une suite de Laplace, y_1 étant le transformé de y dans le sens des v.

Les points qu'une réciprocité Ω fait correspondre aux hyperplans déterminés par cinq points consécutifs d'une suite de Laplace, forment également une suite de Laplace.

3. On conclut de ce théorème que le point z défini par

$$\Omega(z, x_{-2}) = 0, \ldots, \Omega(z, x_2) = 0,$$

décrit un réseau et que ses transformés successifs dans chaque sens ont pour homologues dans Ω, les hyperplans déterminés par cinq points consécutifs de la suite (1).

Nous dirons que la suite de Laplace

$$\ldots, y_{-1}, y, y_1, y_2, \ldots \tag{5}$$

est la transformée de la suite (1) par Ω, tandis que la suite

$$\ldots, z_{-1}, z, z_1, z_2, \ldots \tag{6}$$

et la transformée de la suite (1) par Ω^{-1}. Dans ces suites (5), (6), chaque point est le transformé du précédent dans le sens des v.

Les points y_i, z_i correspondent, respectivement dans Ω, Ω_{-1}, à l'hyperplan

$$x_{-i-2}x_{-i-1}x_{-i}x_{-i+1}x_{-i+2},$$

i pouvant prendre toutes les valeurs entières.

4. Supposons que les suites (4) et (5) coïncident, c'est-à-dire que le point y soit un des transformés de Laplace du point x. Pour fixer les idées, supposons que le point y soit précisément un des transformés de Laplacc de x dans le sens des v.

Au point x_i, la réciprocité Ω fait correspondre l'hyperplan $y_{i-2}\, y_{i-1}\, y_{-i}\, y_{-i+1}\, y_{-i+2}$, donc, parmi les points x, x_1, x_2, ..., y, on en rencontrera un au moins qui appartiendra à son hyperplan homologue dans Ω. Soit x_ν le dernier de ces points n'appartenant pas à son hyperplan homologue.

L'hyperplan homologue du point

$$\begin{array}{lll} x_\nu & \text{est} & x_{\nu+1}x_{\nu+2}x_{\nu+3}x_{\nu+4}x_{\nu+5}, \\ x_{\nu+1} & \text{est} & x_\nu x_{\nu+1}x_{\nu+2}x_{\nu+3}x_{\nu+4}, \\ x_{\nu+2} & \text{est} & x_{\nu-1}x_\nu x_{\nu+1}x_{\nu+2}x_{\nu+3}, \\ x_{\nu+3} & \text{est} & x_{\nu-2}x_{\nu-1}x_\nu x_{\nu+1}x_{\nu+2}. \end{array}$$

Par suite, il y a deux points, $x_{\nu+1}$, $x_{\nu+2}$, appartenant à leur hyperplan homologue.

L'hyperplan homologue du point $x_{\nu+i}$ est $x_{\nu-i+1} \ldots x_{\nu-i+5}$. En particulier, l'hyperplan homologue du point x, obtenu en faisant $i = -\nu$, est $x_{2\nu+1}\, x_{3\nu+2}\, x_{2\nu+3}\, x_{2\nu+4}\, x_{2\nu+5}$. Par suite, le point y coïncide avec le point $x_{2\nu+3}$. Le point y est donc le $(2\nu + 3)$ -ième transformé du point x dans le sens des v et par suite, le point x est le $(2\nu + 3)$ -ième transformé $y_{-2\nu-3}$ du point y dans le sens des u.

Observons maintenant qu'à l'hyperplan $x_{2\nu+1} \ldots x_{2\nu+5}$ qui vient d'être considéré, Ω fait correspondre le point $y_{-2\nu-3}$, c'est-à-dire, ainsi qu'on vient de le voir, le point x.

Il en résulte que l'homographie Ω^2 transforme le point x en lui-même. Comme ce point engendre une surface qui ne peut être contenue dans un hyperplan sans quoi il en serait de même de la suite (1), on a nécessairement $\Omega^2 = 1$ et la réciprocité Ω est involutive (polarité ou système-nul).

Si une réciprocité fait se correspondre à elle-même une suite de Laplace, cette réciprocité est une polarité ou un système-nul.

5. Reprenons la suite (1) et désignons la par L. Ω fait correspondre à la suite (1) la suite (5) que nous désignons par L_1. A la suite L_1, Ω fait correspondre une suite L_2, à L_2 une suite L_3, et ainsi de suite. A la suite (1), Ω^{-1} fait correspondre la suite (6) que nous désignerons par L_{-1}. A cette suite L_{-1}, Ω^{-1} fait correspondre une suite L_{-2}, et ainsi de suite. Nous avons ainsi une série de suites de Laplace ..., L_{-1}, L, L_1, ... qui se déduisent l'une de l'autre par Ω.

Si la suite L_{2k+1} coïncide avec la suite L, et si ce fait ne se présente pas pour une suite L_{2i+1} pour laquelle $o < i < k$, la réciprocité Ω^{2k+1} est involutive. On a

$$\Omega^{4k+2} = 1,$$

les suites L_{2i+1}, $L_{2k+2i+1}$ coïncident.

On peut observer que si les suites L_{-1}, L_1 coïncidaient, le point z serait un des transformés du point y et la suite L_1 serait antoprojective. Il en serait de même de la suite L, qui coïnciderait alors avec L_2 et avec L_{-2}.

Liége, le 14 février 1931.