ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XVII, no 4.
Séance du 11 avril 1931, pp. 527-531.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE.

Sur le Faisceau canonique d'une Surface,

par LUCIEN GODEAUX, correspondant de la Classe.

Dans cette note, nous définissons deux coniques situées dans le plan canonique d'une surface. Nous montrons que ces coniques coïncident si la surface est isothermo-asymptotique et réciproquement.

1. Soit (x) une surface non réglée, rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes de Wilczynski d'un point x de cette surface satisfont au système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0,$$

où a, b, c_1, c_2 sont des fonctions analytiques de u, v, les deux premières n'étant pas identiquement nulles.

Les coordonnées d'un point de l'espace peuvent se mettre sous la forme

$$z_1 x + z_2 x^{10} + z_3 x^{01} + z_4 x^{11},$$

x étant un point de la surface (x). Nous dirons que z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées locales de ce point.

2. Les équations locales

$$\left.\frac{z_2}{(\log b)^{01} - \rho(\log a)^{01}} = \frac{z_3}{(\log a)^{10} - \rho(\log b)^{10}} = \frac{z_4}{-2(1+2\rho)}\right\} \quad (1)$$

représentent, lorsque ρ a une valeur numérique, une droite canonique de la surface (x), attachée au point x. Pour $\rho = 0$, la droite (1) est la première directrice de Wilczynski; pour $\rho = \infty$, la droite (1) est la première droite de Green.

Le plan canonique, lieu de la droite (1) lorsque ρ varie, a pour équation locale

$$\begin{vmatrix} z_2 & z_3 & z_4 \\ (\log b)^{01} & (\log a)^{10} & -2 \\ (\log a)^{01} & (\log b)^{10} & 4 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

La conjuguée de la droite (1), par rapport à la quadrique de Lie

$$z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2abz_4^2 = 0,$$

a pour équations locales

$$\left.\begin{aligned} 2(1+2\rho)z_1 + [(\log a)^{10} - \rho(\log b)^{10}]z_2 \\ +[(\log b)^{01} - \rho(\log a)^{01}]z_3 = 0, \quad z_4 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Lorsque ρ varie, la droite (3) décrit un faisceau de centre

$$\begin{vmatrix} x & x^{10} & x^{01} \\ 2 & (\log a)^{10} & (\log b)^{01} \\ 4 & -(\log b)^{10} & -(\log a)^{01} \end{vmatrix}.$$

Nous appellerons ce faisceau le second faisceau canonique de la surface au point x.

3. Désignons par m, n les points où la droite (3) rencontre respectivement les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} de la surface (x) au point x. Nous avons

$$m = x[(\log a)^{10} - \rho(\log b)^{10}] - 2(1+2\rho)x^{10},$$
$$n = x[(\log b)^{01} - \rho(\log a)^{01}] - 2(1+2\rho)x^{01}.$$

Appelons ensuite μ le plan passant par la droite (3) et par la droite mm^{01}, ν le plan passant par les droites (3) et nn^{10}. Nous avons

$$\begin{aligned} m = x[(\log a)^{11} - \rho(\log b)^{11}] + x^{01}[(\log a)^{10} - \rho(\log b)^{10}] \\ -2(1+2\rho)x^{11}; \end{aligned}$$

par suite le plan μ a pour équation

$$\left|\begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ (\log a)^{10} - \rho(\log b)^{10} & -2(1+2\rho) & 0 & 0 \\ (\log b)^{01} - \rho(\log a)^{01} & 0 & -(1+2\rho) & 0 \\ (\log a)^{11} - \rho(\log b)^{11} & 0 & (\log a)^{10} - \rho(\log b)^{10} & -2(1+2\rho) \end{matrix}\right| = 0. \quad (\mu)$$

De même, on a

$$n^{10} = x[(\log b)^{11} - \rho(\log a)^{11}] + x^{10}[(\log b)^{01} - \rho(\log a)^{01}] \\ - 2(1+2\rho)x^{11}$$

et l'équation du plan ν s'obtient sous une forme analogue à celle du plan μ.

4. Le lieu du point d'intersection de la droite (1) et du plan μ, lorsque ρ varie, est la conique Γ_1 d'équations

$$\left\|\begin{matrix} z_1 z_4 - z_2 z_3 & z_4(\log b)^{11} & z_4(\log a)^{11} \\ z_2 & (\log a)^{01} & (\log b)^{01} \\ z_3 & (\log b)^{10} & (\log a)^{10} \\ z_4 & 4 & -2 \end{matrix}\right\| = 0. \quad (\Gamma_1)$$

La quadrique obtenue en supprimant la dernière ligne dans la matrice précédente coupe la quadrique de Lie suivant les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} et suivant une conique située dans le plan

$$\left\|\begin{matrix} -2abz_4 & (\log b)^{11} & (\log a)^{11} \\ z_2 & (\log a)^{01} & (\log b)^{01} \\ z_3 & (\log b)^{10} & (\log a)^{10} \end{matrix}\right\| = 0,$$

passant par le point x. On en conclut que cette quadrique a un contact du second ordre avec la quadrique de Lie au point x. Par suite, la conique Γ_1 oscule la surface (x) au point x.

Il en est de même de la conique Γ_2, lieu du point d'intersection de la droite (1) et du plan ν lorsque ρ varie, conique qui a pour équations

$$\left\| \begin{matrix} z_1 z_4 - z_2 z_3 & z_4 (\log a)^{11} & z_4 (\log b)^{11} \\ z_2 & (\log a)^{01} & (\log b)^{01} \\ z_3 & (\log b)^{10} & (\log a)^{10} \\ z_4 & 4 & -2 \end{matrix} \right\| = 0. \quad (\Gamma_2)$$

5. La droite (3) décrit une congruence harmonique à la surface (x) lorsque les droites mm^{01} et nn^{10} sont dans un même plan, c'est-à-dire lorsque les plans μ et ν coïncident ([1]). Le point de rencontre des droites en question appartient alors à la droite (1) et celle-ci décrit une congruence conjuguée à la surface (x).

La condition pour que les droites mm^{01} et nn^{10} se rencontrent s'exprime par la relation

$$(1+\rho)(1+2\rho)^2 \left(\log \frac{a}{b}\right)^{11} = 0.$$

Cette condition est satisfaite pour $\rho = -\frac{1}{2}$; la droite (1) est la tangente canonique à la surface (x) au point x ([2]). Elle est satisfaite pour $\rho = -1$; la droite (1) est alors la normale projective de M. Fubini ([3]). Si enfin on a

$$(\log a)^{11} = (\log b)^{11},$$

la condition est satisfaite pour toute valeur de ρ et la surface (x) est isothermo-asymptotique, et réciproquement ([4]). Dans ces conditions, les coniques Γ_1, Γ_2 coïncident, et par suite,

Si la surface (x) *est isothermo-asymptotique, les coniques* Γ_1, Γ_2 *coïncident et réciproquement.*

---

(1) Voir notre note « Sur les Congruences conjuguées et harmoniques à une Surface ». (*Bollettino dell' Unione Matematica Italiana*, 1929, pp. 21-33.)

(2) Dans ce cas, les plans μ, ν coïncident avec le plan $z_4 = 0$, tangent à la surface (x) au point x.

(3) Fubini et Cech, *Geometria proiettiva differenziale*, t. I, pp. 155 et suiv. (Bologne, 1926).

(4) Fubini et Cech, *loc. cit.*

En utilisant le théorème que nous avons invoqué plus haut, on voit également que

Une condition nécessaire et suffisante pour que la surface (x) *soit isothermo-asymptotique est que les plans tangents aux points où une droite du second faisceau canonique distincte de la conjuguée de la normale projective par rapport à la quadrique de Lie rencontre les tangentes asymptotiques de la surface, aux surfaces décrites par ces points, et les plans tangents en ces points à la quadrique de Lie passent par un même point.*

Dans tous les cas, les coniques Γ_1, Γ_2 passent par le point

$$[2(\log ab)^{11} + (\log ab)^{10}(\log ab)^{01}]x + 2(\log ab)^{01}x^{10} + 2(\log ab)^{10}x^{01} + 4x^{11},$$

appartenant à la normale projective.

6. Lorsque la surface (x) est isothermo-asymptotique, on peut choisir les paramètres u, v de manière à avoir $a = b$. Le plan canonique a alors pour équation

$$z_2(\log a)^1 - z_3(\log a)^{01} = 0.$$

Les coniques coïncidentes Γ_1, Γ_2 sont découpées sur ce plan par la quadrique

$$(z_1z_4 - z_2z_3)(\log a)^{10} - z_3z_4(\log a)^{11} = 0.$$

Liége, le 7 avril 1931.

Mᵉ HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.