ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XVII, n° 7.
Séance du 4 juillet 1931, pp. 888-892.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE.

Sur le faisceau des quadriques de Darboux d'une surface,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Dans une note récente (1), nous avons cherché à établir des correspondances homographiques entre le faisceau des quadriques de Darboux d'une surface et les faisceaux de quadriques déterminés par les quadriques analogues à la quadrique de Lie, que nous avons introduites il y a quelques années (2). La méthode que nous avons utilisée n'était pas valable dans tous les cas, par exemple lorsque la surface considérée à la courbure projective — 2. Nous avons donc cherché à établir ces correspondances d'une autre manière, que nous exposons dans ce travail. Nous conservons les notations de notre première note citée plus haut.

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. On sait que les quadriques de Darboux peuvent s'introduire de la manière suivante (3) : Fixons l'attention sur un point x de la surface (x), ordinaire, et supposons, ce qui ne diminue en rien la généralité, que ce point x corresponde aux valeurs $u = 0$, $v = 0$ des cordonnées curvilignes. Considérons, sur la surface (x), la courbe définie par l'équation

$$u = -\frac{\theta}{2b} v^2 + \cdots, \tag{1}$$

(1) Sur les quadriques de Darboux d'une surface. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, Cl. des Sc., 1930, pp. 1195-1205.)

(2) Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, Cl. des Sc., 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-41.)

(3) FUBINI et CECH, *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces* (Paris, Gauthier-Villars, 1931). Voir n° 20.

où θ est une constante, les termes non écrits contenant v à une puissance supérieure à deux. La courbe (1) est tangente au point x à l'asymptotique v passant par ce point. La quadrique osculatrice le long de la génératrice passant par le point x à la surface réglée engendrée par les tangentes aux lignes u aux différents points de la courbe (1) est la quadrique de Darboux

$$z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2abz_4^2 + \theta z_4^2 = 0. \tag{2}$$

On trouve la même quadrique en intervertissant les rôles des coordonnées u, v et en partant de la courbe

$$v = -\frac{\theta}{2a} u^2 + \cdots. \tag{3}$$

Lorsque la courbe (1) possède un point d'inflexion au point x, il en de même de la courbe (3) et la quadrique (2) devient la quadrique de Wilczynski-Bompiani,

$$z_1 z_4 - z_2 z_3 = 0,$$

correspondant à la valeur $\theta = -2ab$ $(u = 0, v = 0)$.

Lorsque la courbe (1) possède un point stationnaire en x, il en de même de la courbe (3); on a $\theta = -\dfrac{2ab}{3}$ et la quadrique (3) est la quadrique de Fubini

$$3(z_1 z_4 - z_2 z_3) + 4abz_4^2 = 0.$$

2. Considérons maintenant, sur la surface (x), la courbe

$$u = \varphi v^2 + \cdots. \tag{4}$$

A cette courbe correspond, sur la surface (U_n), une courbe ayant même équation et passant par le point U_n $(u = v = 0)$ en y touchant la courbe v passant par ce point. Le plan osculateur à cette courbe en ce point est déterminé par les points

$$U_n, \quad U_{n+1}, \quad U_{n+2} + 2\varphi h_n U_{n-1}, \tag{5}$$

pour $u = v = 0$.

En considérant de même la courbe

$$v = \varphi' u^2 + \cdots$$

sur la surface (x) et sur la surface (V_n), on obtient comme plan osculateur le plan déterminé par les points $(u = v = 0)$

$$V_n, \quad V_{n+1}, \quad V_{n+2} + 2\varphi' k_n V_{n-1}. \tag{6}$$

Les sections de l'hyperquadrique Q par les plans (5), (6) représentent, dans l'espace de la surface (x), deux demi-quadriques. Pour que ces deux demi-quadriques aient même support, il faut et il suffit que les points

$$U_{n+2} + 2\varphi h_n U_{n-1}, \qquad V_{n+2} + 2\varphi' k_n V_{n-1}$$

soient conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q. Cela exige que l'on ait

$$b h_1 h_2 \dots h_n \varphi = a k_1 k_2 \dots k_n \varphi'.$$

Si donc nous posons

$$\varphi = \frac{k_1 k_2 \dots k_n \theta_n}{2b}, \qquad \varphi' = \frac{h_1 h_2 \dots h_n \theta_n}{2a},$$

c'est-à-dire si nous partons des courbes

$$u = \frac{k_1 k_2 \dots k_n \theta_n}{2b} v^2 + \cdots, \tag{7}$$

$$v = \frac{h_1 h_2 \dots h_n \theta_n}{2a} u^2 + \cdots \tag{8}$$

tracées sur la surface (x), les plans (5) et (6) seront conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q et représenteront deux demi-quadriques ayant pour support commun une quadrique Θ_n du faisceau déterminé par les quadriques Φ_{n-1}, Φ_n.

Dans les équations (7), (8), on peut supposer que θ_n dépend de u, v, mais il faut naturellement prendre, pour valeurs des coefficients de v^2, u^2, ce que l'on obtient en y posant $u = 0$, $v = 0$.

3. Si maintenant nous supposons que les paramètres θ, θ_n sont liés par une correspondance homographique, nous aurons établi une correspondance homographique entre les quadriques de Darboux Θ et les quadriques Θ_n.

En particulier, si nous posons $\theta = \theta_n$, dans la correspondance ainsi établie, à la quadrique $z_4^2 = 0$ correspondra la quadrique Φ_{n-1} et à la quadrique de Lie Φ, la quadrique Φ_n.

Les correspondances ainsi établies sont valables pour toutes les surfaces (non réglées),

4. Envisageons en particulier la correspondance établie entre les quadriques Θ et Θ_1. A la quadrique Θ donnée par la valeur θ dans l'équation (1) correspond la quadrique Θ_1 d'équation

$$\left.\begin{aligned} &[4z_1 + 2z_2(\log a)^{10} + 2z_3(\log b)^{01} + z_4\{8ab + (\log a)^{10}(\log b)^{01}\}]^2 \\ &\quad + \alpha[2z_2 + z_4(\log b)^{01}]^2 + \beta[2z_3 + z_4(\log a)^{10}]^2 + \alpha\beta z_4^2 \\ &\quad + \frac{2b\beta(\log b^2\beta)^{01} - 4h_1k_1\theta}{ab}(z_1z_4 - z_2z_3 + 2abz_4^2) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Pour

$$\theta = \frac{b\beta(\log b^2\beta)^{01}}{2h_1k_1} = \frac{a\alpha(\log a^2\alpha)^{10}}{2h_1k_1},$$

la quadrique (9) admet pour tétraèdre autopolaire le tétraèdre formé par les plans tangents à la quadrique de Lie, menés par les directrices de Wilczynski. La quadrique Θ correspondante est définie d'une manière intrinsèque; elle se réduit à la quadrique de Lie lorsque les asymptotiques sont conservées sur les nappes de l'enveloppe de la quadrique de Lie. On a, en effet, dans ce cas,

$$(\log b^2\beta)^{01} = (\log a^2\alpha)^{10} = 0, \qquad \theta = 0.$$

On voit que *la condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotiques se correspondent sur les nappes de l'enveloppe* *des quadriques de Lie d'une surface, est que le tétraèdre formé par les plans tangents à la quadrique de Lie menés par les directrices de Wilczynski soit autopolaire par rapport à la quadrique* Φ_1.

Cette propriété avait été rencontrée, sous une forme un peu différente, dans notre note sur les quadriques de Darboux citée au début.

Liége, le 2 juillet 1931.

Marcel HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, 112, rue de Louvain, Bruxelles