Sur les surfaces donnant lieu, dans l'espace réglé, à une suite de Laplace terminée,

par LUCIEN GODEAUX, correspondant de l'Académie.

Étant donnée une surface (x), les surfaces de l'espace à cinq dimensions qui représentent les tangentes aux asymptotiques des deux systèmes de la surface sont consécutives dans une suite de Laplace (1). Dans nos travaux antérieurs, nous avons considéré les surfaces pour lesquelles cette suite de Laplace est illimitée dans les deux sens, ou périodique (2). Nous nous proposons, dans cette note, de commencer l'étude des surfaces pour lesquelles la suite de Laplace est terminée. Nous avons établi antérieurement que la suite de Laplace envisagée est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique qui représente les droites de l'espace contenant la surface (x). Il en résulte que lorsque la suite de Laplace est limitée dans un sens, en présentant le cas de Laplace, elle est limitée dans l'autre sens, mais en présentant le cas de Goursat; et inversement, sous l'hypothèse que la courbe qui termine la suite dans le cas de Laplace n'appartienne pas à un espace linéaire à trois dimensions.

Nous montrons que lorsque la surface (x) possède pour asymptotiques d'un système des courbes appartenant à des

---

(1) BOMPIANI, Sull' equazione di Laplace (*Rend. Circolo Matem. Palermo*, 1912, t. 34, pp. 383-407). — TZITZEICA, *Géométrie différentielle projective des réseaux*. Paris, Gauthier-Villars, 1924.

(2) Voir les notes que nous avons publiées sur ce sujet dans les *Bulletins de l'Académie roy. de Belgique*, depuis décembre 1927. Voir aussi deux notes parues, l'une dans le *Bulletin de la Soc. Math. de France*, 1928; l'autre dans les *Annales de la Soc. polonaise de Mathématiques*, 1928.

complexes linéaires, la suite de Laplace correspondante se termine dans les deux sens dans les conditions indiquées plus haut.

Ajoutons que nous avons utilisé, dans ce qui suit, l'élégante interprétation géométrique de la fermeture d'une suite de Laplace dans le cas de Goursat, due à Bompiani [1].

1. Soit, dans l'espace ordinaire S_3, une surface (x) rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives x_1, x_2, x_3, x_4 du point x de cette surface sont des fonctions analytiques de u, v satisfaisant à un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre, complètement intégrable. En multipliant ces coordonnées par une fonction convenablement choisie de u, v, ce système d'équations peut s'écrire sous la forme (Wilczynski)

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0,$$

où nous posons

$$x^{ik} = \frac{\partial^{i+k} x}{\partial u^i \, \partial v^k}.$$

Soit Q l'hyperquadrique de S_5 qui représente les droites de S_3. Les tangentes aux asymptotiques u, v en un point x de (x) sont représentées sur Q par les points

$$U = | \, x \quad x^{10} \, |, \qquad V = | \, x \quad x^{01} \, |.$$

Les coordonnées de ces points satisfont aux équations

$$U^{10} + 2bV = 0, \qquad V^{01} + 2aU = 0. \tag{1}$$

Ces équations montrent que si l'une des fonctions a, b est identiquement nulle, la surface (x) est réglée. Écartons ce cas. Alors, les points U, V dérivent des surfaces (U), (V) et sont consécutifs dans une suite de Laplace (Bompiani, Tzitzeica).

Désignons par U_1, U_2, ... les transformés successifs de

(1) Bompiani, *loc. cit.*

Laplace de U dans le sens des v, par V_1, V_2, ... ceux de V dans le sens des u. On a les relations de récurrence

$$U_i = U_{i-1}^{01} - U_{i-1}(\log bh_1 \dots h_{i-1})^{01}, \qquad U_i^{10} = h_i U_{i-1},$$
$$V_i = V_{i-1}^{10} - V_{i-1}(\log ak_1 \dots k_{i-1})^{10}, \qquad V_i^{01} = k_i V_{i-1},$$
$$h_i = -(\log bh_1 \dots h_{i-1})^{11} + h_{i-1},$$
$$k_i = -(\log ak_1 \dots k_{i-1})^{11} + k_{i-1}.$$

et les équations aux dérivées partielles

$$U_i^{11} - U_i^{10}(\log bh_1 \dots h_i)^{01} - h_i U_i = 0,$$
$$V_i^{11} - V_i^{01}(\log ak_1 \dots k_i)^{10} - k_i V_i = 0.$$

2. — Supposons que la suite de Laplace

$$\dots, U_i, \dots, U_1, U, V, V_1, \dots, V_i, \dots \tag{2}$$

se termine dans le sens des v, au point U_n, en présentant le cas de Laplace. Les tangentes aux lignes v, sur la surface (U_{n-1}), aux différents points d'une courbe u, forment un cône dont le sommet est un point U_n. Les coordonnées de ce point sont indépendantes de u et l'on a $U_n^{10} = 0$; d'où $h_n = 0$. Lorsque v varie, le point U_n décrit une courbe (U_n); nous supposerons que cette courbe n'appartient pas à un espace linéaire à quatre dimensions. Dans ces conditions, les points U_n, U_n^{01}, U_n^{02}, ... U_n^{05} sont indépendants.

Soit

$$\Omega(p, q) = 0$$

l'équation de la polarité de S_5 dont Q est l'hyperquadrique fondamentale, de telle sorte que l'équation de cette hyperquadrique soit

$$\Omega(p, p) = 0.$$

Nous avons établi que la suite de Laplace (2) est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q. D'une manière précise, le point U_i est le pôle de l'hyperplan $V_{i-2}V_{i-1}V_iV_{i+1}V_{i+2}$. Ces conclusions sont encore valables dans le cas actuel pour $i \leq n$ et l'on a

$$\Omega(U_n, V_{n-2}) = 0, \dots, \Omega(U_n, V_{n+1}) = 0, \Omega(U_n, V_{n+2}) = 0,$$

cette dernière relation pouvant d'ailleurs être remplacée par

$$\Omega(U_n, V_{n+1}^{10}) = 0,$$

dans l'hypothèse où les points V_i existent pour $i \leq n + 2$. En dérivant cette dernière relation par rapport à u, on en déduit

$$\Omega(U_n, V_{n+1}^{20}) = 0.$$

En dérivant plusieurs fois de suite par rapport à v les relations précédentes, on trouve successivement

$$\Omega(U_n^{01}, V_{n-1}) = 0, \quad \Omega(U_n^{01}, V_n) = 0, \quad \Omega(U_n^{01}, V_{n+1}) = 0,$$
$$\Omega(U_n^{01}, V_{n+1}^{10}) = 0, \quad \Omega(U_n^{01}, V_{n+1}^{20}) = 0;$$
$$\Omega(U_n^{02}, V_n) = 0, \quad \Omega(U_n^{02}, V_{n+1}) = 0, \quad \Omega(U_n^{02}, V_{n+1}^{10}) = 0, \quad \Omega(U_n^{02}, V_{n+1}^{20}) = 0;$$
$$\Omega(U_n^{03}, V_{n+1}) = 0, \quad \Omega(U_n^{03}, V_{n+1}^{10}) = 0, \quad \Omega(U_n^{03}, V_{n+1}^{20}) = 0.$$

D'après l'hypothèse faite plus haut, les points $U_n, U_n^{01}, U_n^{02}, U_n^{03}$ déterminent un espace linéaire à trois dimensions; la droite conjuguée de cet espace par rapport à Q contient les points $V_{n+1}, V_{n+1}^{10}, V_{n+1}^{20}$. On a donc une relation de la forme

$$V_{n+1}^{20} + A V_{n+1}^{10} + B V_{n+1} = 0. \tag{3}$$

Sur la surface (V_{n+1}), les lignes u sont donc des droites.

Un raisonnement analogue permet de voir que sur la surface (V_n) les courbes u sont planes, que sur la surface (V_{n-1}) les courbes u appartiennent à des espaces à trois dimensions; enfin que sur la surface (V_{n-2}) les courbes u appartiennent à des hyperplans.

Sur la surface réglée (V_{n+1}), le point V_{n+2} donne lieu à la relation

$$V_{n+2}^{01} = k_{n+2} V_{n+1}$$

et ce point décrit donc une courbe (V_{n+2}), arête de rebroussement de la surface (V_{n+1}), qui est donc une développable. On voit donc que la suite de Laplace (2) se termine dans le sens des u en présentant le cas de Goursat.

dans l'espace réglé, à une suite de Laplace terminée.

---

3. Supposons maintenant que la suite de Laplace (2) se termine au point V_{n+2} en présentant le cas de Goursat. Le point V_{n+1} a des coordonnées satisfaisant à un système d'équations aux dérivées partielles, complètement intégrable,

$$\begin{aligned} &V^{11}_{n+1} - V^{01}_{n+1}(\log ak_1 \dots k_{n+1})^{10} - k_{n+1} V_{n+1} = 0, \\ &V^{20}_{n+1} + AV^{10}_{n+1} + BV_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Les conditions d'intégrabilité sont

$$\left.\begin{aligned} (\log ak_1 \dots k_{n+1})^{20} + \overline{(\log ak_1 \dots k_{n+1})^{10}}^{2} + A(\log ak_1 \dots k_{n+1})^{10} + B = 0, \\ k_{n+1} + A^{01} = 0, \\ k^{10}_{n+1} + k_{n+1}(\log ak_1 \dots k_{n+1})^{10} + Ak_{n+1} + B^{01} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Supposons que la suite de Laplace (2) ne s'arrête pas avant le point U_n dans le sens des v.

On a alors

$$\Omega(U_{n-1}, V^{20}_{n+1}) + A\Omega(U_{n-1}, V^{10}_{n+1}) = 0.$$

Or, par un calcul simple, on trouve

$$\Omega(U_{n-1}, V^{10}_{n+1}) = (-1)^{n-2} . 4bh_1 \dots h_{n-1}\Delta,$$

$$\Omega(U_{n-1}, V^{20}_{n+1}) = (-1)^{n-1} . 4bh_1 \dots h_{n-1}\left(\log \frac{a^{n+1} k_1^n \dots k_n}{b^n h_1^{n-1} \dots h_{n-1}}\right)^{10}\Delta,$$

où Δ représente le déterminant

$$\Delta = | \, x \quad x^{10} \quad x^{01} \quad x^{11} \, |.$$

On en conclut

$$A = \left(\log \frac{a^{n+1} k_1^n \dots k_n}{b^n h_1^{n-1} \dots h_{n-1}}\right)^{10}.$$

En observant que l'on a

$$A^{01} = h_n - k_{n+1},$$

on voit que la seconde condition d'intégrabilité donne

$$h_n = 0.$$

Par suite, la suite (2) est terminée au point U_n. Le raisonnement qui vient d'être fait montre que si la suite (2) était terminée au point U_n en présentant le cas de Goursat, on aurait $k_{n-2}=0$ et le point V_{n-2} décrirait une courbe, ce qui est incompatible avec les hypothèses.

On voit donc que *si la suite de Laplace* (2) *se termine au point* U_n *en présentant le cas de Laplace, elle se termine au point* V_{n+2} *en présentant le cas de Goursat, et inversement,* sous l'hypothèse que la courbe (U_n) ne soit pas contenue dans un hyperplan.

Observons que de la relation (3), en tenant compte de la première des équations (4), on déduit

$$V_{n+2}^{10} + V_{n+2}\left(\log \frac{a^{n+2} k_1^{n+1} \dots k_{n+1}}{b^n h_1^{n-1} \dots h_{n-1}}\right)^{10} = 0.$$

D'autre part, les conditions (4) donnent

$$\left(\log \frac{a^{n+3} k_1^{n+2} \dots k_{n+2}}{b^n h_1^{n-1} \dots h_{n-1}}\right)^{10} = 0\,;$$

donc

$$V_{n+3} = V_{n+2}^{10} - V_{n+2} (\log a\, k_1 \dots k_{n+2})^{10}$$

ou

$$V_{n+3} = - V_{n+2}\left(\log \frac{a^{n+3} k_1^{n+2} \dots k_{n+2}}{b^n h_1^{n-1} \dots h_{n-1}}\right)^{10} = 0,$$

ce qui montre bien que le point V_{n+3}, ayant toutes ses coordonnées nulles, n'existe pas.

On déduit en outre de ces formules $k_{n+3} = 0$.

4. Dans nos travaux antérieurs, nous avons défini une suite de quadriques

$$\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \dots$$

dont la première est la quadrique de Lie relative au point x de la surface (x). Deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points dont le lieu fait partie de l'enveloppe de chacune des quadriques. Les génératrices des deux modes de la quadrique Φ_i sont représentées, sur Q, par les sections de cette hyperquadrique par les plans $U_i\, U_{i+1}\, U_{i+2}$, $V_i\, V_{i+1}\, V_{i+2}$ conjugués par rapport à Q.

Dans le cas actuel, la quadrique Φ_{n-1} existe et dépend des deux paramètres u, v ; la quadrique Φ_n existe également, mais ne dépend plus que du paramètre v ; elle termine la suite des quadriques.

Désignons par L_1, L_2 les points de rencontre de la droite $U_n U_n^{01}$ avec l'hyperquadrique Q, par L_1', L_2' ceux de la droite $V_n V_{n+1}$, enfin par l_1, l_2, l_1', l_2' les droites de S_3 représentées respectivement par ces points. Les droites $U_n U_n^{01}$ et $V_n V_{n+1}$ étant conjuguées par rapport à Q, les droites l_1, l_2, l_1', l_2' forment un quadrilatère gauche, les deux premières de ces droites rencontrant chacune des deux dernières.

La quadrique Φ_{n-1} est représentée dans S_5 par les plans $U_{n-1} U_n U_n^{01}$ et $V_{n-i} V_n V_{n+1}$. Les sommets du quadrilatère gauche formé par les droites l sont des points caractéristiques de cette quadrique (et de la quadrique Φ_n). Lorsque u varie seule, les points L_1, L_2 et les droites l_1, l_2 restent fixes ; les points L_1', L_2' et les droites l_1', l_2' varient ; par suite les droites l_1, l_2 font partie de la partie commune de l'enveloppe des quadriques Φ_{n-1}, Φ_n. On voit donc que la partie considérée de l'enveloppe des quadriques Φ_{n-1} est une surface réglée, représentée sur Q par la section de cette quadrique par le lieu de la tangente à la courbe (U_n).

Passons à la quadrique Φ_n, représentée par les plans $U_n U_n^{01} U_n^{02}$ et $V_n V_{n+1} V_{n+2}$ conjugués par rapport à Q. L'équation de cette quadrique peut s'écrire [1]

$$\Sigma x_i x_k \begin{vmatrix} V_n \\ V_{n+1} \\ V_{n+2} \end{vmatrix} = 0.$$

En dérivant par rapport à v, on a

$$\Sigma x_i x_k \begin{vmatrix} k_n V_{n-1} \\ V_{n+1} \\ V_{n+2} \end{vmatrix} = 0,$$

[1] Voir la seconde de nos notes : Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 1928, pp. 31-51.)

et des deux quadriques se rencontrent suivant la courbe caractéristique de la première. La seconde quadrique est représentée sur Q par les sections de cette hyperquadrique par le plan $V_{n-1}\ V_{n+1}\ V_{n+2}$ et par le plan conjugué du premier par rapport à Q. Si l'on désigne $M_1\ M_2$, les points de rencontre de la droite $V_{n+1}\ V_{n+1}^{10}$ avec Q, par m_1, m_2 les droites de S_3 représentées par ces points, on en conclut que ces droites font partie de la courbe caractéristique de la quadrique Φ_n. Cette courbe est complétée, comme on l'a vu plus haut, par les droites l_1, l_2. On voit donc que l'enveloppe de la quadrique Φ_n se compose de deux réglées représentées sur Q, l'une par l'intersection de Q et de la développable d'arête de rebroussement (U_n), l'autre par l'intersection de Q avec la surface (V_{n+1}).

5. Appliquons ce qui précède au cas $n=1$. Le point U_1 décrit une courbe (U_1) et l'on a $h_1=0$. La surface (V_2) est une développable dont l'arête de rebroussement est la courbe (V_3), les droites de la surface (V_2) étant les lignes u.

Sur la surface (V_1), les lignes u sont planes ; sur la surface (V), elles appartiennent à des espaces linéaires à trois dimensions ; sur la surface (U), elles appartiennent à des hyperplans. D'une manière plus précise, une courbe (u) sur la surface (U) est la section de cette surface par l'hyperplan polaire par rapport à Q du point U_1 correspondant.

On en conclut que sur la surface (x), les lignes u appartiennent à des complexes linéaires. Inversement, si la surface (x) présente cette propriété, les lignes u sur la surface (U) appartiennent à des hyperplans et la suite (2) est terminée en V_3, en présentant le cas de Goursat [1]. Il en résulte qu'elle est terminée, au point U_1, en présentant le cas de Laplace.

Les points U_1 sont les secondes images des complexes linéaires auxquels appartiennent les lignes u de la surface (x).

---

[1] Cela résulte d'un théorème de M. BOMPIANI, *loc. cit.*

Les droites $U_1 U_1^{01}$ sont les secondes images des congruences linéaires caractéristiques de la famille ∞^1 de ces complexes linéaires. Par conséquent, les points de rencontre des droites $U_1 U_1^{01}$ avec Q représentent les directrices de ces congruences. On voit donc que *si les asymptotiques d'une famille d'une surface appartiennent à des complexes linéaires, l'enveloppe des quadriques de* Lie *de cette surface se compose de la surface elle-même et de la réglée lieu des directrices des congruences linéaires caractéristiques de la famille formée par les complexes linéaires* (1).

Quant aux quadriques Φ_1, elles ont pour enveloppe les deux réglées représentées sur Q par les courbes découpées sur cette hyperquadrique par les développables dont les arêtes de rebroussement sont les courbes (U_1), (V_3).

6. Nous avons fait plus haut l'hypothèse que la courbe (U_n) n'appartenait pas à un hyperplan de l'espace S_5. Voyons ce qui se passe lorsqu'on laisse tomber cette hypothèse.

Des relations qui ont été établies plus haut, on déduit

$$\Omega(U_n^{04}, V_{n+1}^{10}) = 0, \qquad \Omega(U_n^{05}, V_{n+1}^{20}) = 0.$$

Si la courbe (U_n) appartient à un hyperplan (mais non à un espace linéaire à trois dimensions), on a, en outre,

$$\Omega(U_n^{05}, V_{n+1}^{10}) = 0.$$

Le point V_{n+2} est par suite le pôle, par rapport à l'hyperquadrique Q, de l'hyperplan contenant la courbe (U_n); la surface (V_{n+1}) est donc un cône ayant ce point pour sommet.

Si la courbe (U_n) appartient à un espace linéaire à trois dimensions, mais non à un plan, on démontre de même que les points V_{n+1}, V_{n+1}^{10}, V_{n+1}^{20} appartiennent à la droite conju-

(1) Si l'on suppose $n = 0$, le point U décrit une courbe, la surface (x) est réglée et l'on a $b = 0$. La suite de Laplace (2) se termine au point V_2, en présentant le cas de Goursat, dans l'hypothèse où la surface (x) n'appartient pas à un complexe linéaire.

guée par rapport à Q de l'espace de la courbe (U_n). La surface (V_{n+1}) se réduit actuellement à cette droite fixe.

Si la courbe (U_n) est plane, le point V_n appartient toujours au plan conjugué, par rapport à Q, du plan de cette courbe. Il en est par suite de même de toute la suite (2); il est facile d'en conclure que le plan de la courbe (U_n) appartient tout entier à Q.

Si la courbe (U_n) se réduit à une droite, toute la suite de Laplace (2) appartient à l'espace à trois dimensions conjugué de cette droite par rapport à Q.

Si, enfin, le point U_n est fixe, toute la suite de Laplace (2) appartient à l'hyperplan polaire de U_n par rapport à Q. Le point U_n appartient en particulier à l'hyperplan et par suite à l'hyperquadrique Q. La surface (x) appartient à un complexe linéaire.

De ce qui précède, on peut conclure que *si la suite de Laplace* (2) *est terminée dans un sens en présentant le cas de Goursat, elle est terminée dans l'autre sens en présentant le cas de Laplace.*

Liége, le 9 mai 1931.