ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XVII, no 1.
Séance du 10 janvier 1931, pp. 29-39.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE.

# Sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions,

par LUCIEN GODEAUX,
Correspondant de l'Académie royale de Belgique.

Dans plusieurs travaux antérieurs, nous avons étudié les involutions cycliques, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique [1]. Nous avons en particulier étudié les singularités d'une surface normale, image de l'involution, aux points de diramation (homologues des points unis). Nous nous sommes proposé d'étendre ces recherches aux variétés algébriques à trois dimensions. Nous considérons les involutions cycliques d'ordres deux et trois appartenant à une variété algébrique à trois dimensions et n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Après avoir construit une variété normale, image de cette involution, nous étudions la singularité de cette variété en un point de diramation. Nous parvenons ainsi aux résultats suivants :

*Si une variété algébrique normale à trois dimensions est l'image d'une involution d'ordre deux, appartenant à une variété algébrique à trois dimensions, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, en tout point de diramation, la variété image possède la multiplicité quatre. Les sections hyperplanes du cône tangent en un de ces points sont des surfaces de Véronèse.*

*Si une variété algébrique normale à trois dimensions est*

(1) Nous avons résumé nos recherches sur cet objet dans une communication faite au Congrès national des Sciences (juin-juillet 1930).

*l'image d'une involution cyclique d'ordre trois, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une variété algébrique à trois dimensions, en tout point de diramation, la variété image possède :*

*la multiplicité quatre, les sections hyperplanes du cône tangent en un tel point étant des surfaces réglées rationnelles normales du quatrième ordre, ayant comme directrices une droite et une cubique gauche (homographiques) ;*

*ou la multiplicité neuf, les sections hyperplanes du cône tangent en un tel point étant des surfaces représentant les cubiques d'un plan.*

Dans cet énoncé, on suppose que la variété image appartient à un espace ayant au moins six dimensions dans le cas des involutions d'ordre deux, dix dimensions dans le cas des involutions d'ordre trois. S'il n'en était pas ainsi, les sections hyperplanes des cônes tangents seraient des projections des surfaces envisagées.

**1**. Soient $V_3$ une variété algébrique à trois dimensions, T une transformation birationnelle de période $p$ de cette variété en elle-même, $I_p$ l'involution engendrée par la transformation T sur la variété algébrique $V_3$. Supposons que $I_p$ n'ait qu'un nombre fini de points unis.

Considérons sur la variété $V_3$ un système linéaire simple, de dimension au moins égale à quatre, $|F'|$, de surfaces algébriques $F'$, dont aucun point de l'involution $I_p$ ne soit un point-base (ce qui est toujours possible). Au système $|F'|$, les transformations $T, T^2, \ldots, T^{p-1}$ font correspondre des systèmes linéaires respectivement $|F''|, |F'''|, \ldots, |F^{(p)}|$. Le système linéaire complet

$$|F| = |F' + F'' + \cdots + F^{(p)}|$$

est transformé en lui-même par T; sa dimension est supérieure à quatre et aucun de ses points-base éventuels n'est un point uni de l'involution $I_p$. De plus, il contient un système linéaire de surfaces composé au moyen de l'involution $I_p$ et non au moyen d'une autre involution, n'ayant pas pour points-base des points unis de $I_p$. Ce dernier système peut d'ailleurs coïncider avec $|F|$ lui-même.

Si le système $|F|$ n'est pas composé au moyen de $I_p$, il est simple, puisqu'on est parti pour le construire d'un système simple $|F'|$. Si le système $|F|$ est composé au moyen de $I_p$, il est possible de déterminer un entier positif $\lambda$, tel que le système $|\lambda F|$ soit simple. En effet, s'il en était autrement, les systèmes linéaires $|2F|$, $|3F|$, ... découperaient, sur une surface F, des systèmes linéaires de courbes tous composés au moyen de $I_p$, ce qui est impossible. Le système $|\lambda F|$ contient un système linéaire partiel composé au moyen de $I_p$ et aucun des systèmes n'a comme point-base des points unis de $I_p$.

De tout ceci, il résulte que l'on peut toujours construire sur $V_3$ un système simple, $|F|$, de dimension aussi grande qu'on le veut, n'ayant pas pour points-base des points unis de l'involution $I_p$, transformé en lui-même par T et contenant un système linéaire composé au moyen de l'involution $I_p$, n'ayant lui non plus aucun des points unis de $I_p$ comme points-base.

Désignons par R la dimension du système complet $|F|$ et rapportons projectivement les surfaces de ce système aux hyperplans d'un espace linéaire $S_R$ à R dimensions. A la variété $V_3$ correspond une variété normale, simple, birationnellement identique à $V_3$ et que nous prendrons comme modèle projectif de cette variété. Nous continuerons à désigner par $V_3$ ce modèle projectif et par F ses sections hyperplanes. A la transformation T correspond sur la nouvelle variété $V_3$ une transformation birationnelle déterminée par une homographie H, de période $p$, de $S_R$.

Soit $|F_0|$ le système compris dans $|F|$, composé au moyen de l'involution $I_p$, et n'ayant pas pour points-base des points unis de $I_p$. Les hyperplans découpant sur $V_3$ les surfaces $F_0$ forment



*

un système linéaire $\Sigma_0$. Observons que l'homographie H, étant périodique, est générale. On peut supposer qu'elle possède $p$ axes; s'il n'en était pas ainsi, il suffirait de recommencer les raisonnements précédents en remplaçant $|F|$ par un de ses multiples convenablement choisi. Cela étant, les hyperplans du système $\Sigma_0$, qui sont unis pour H, passent par $p - 1$ des axes de cette homographie. Désignons ces axes par $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ..., $S^{(p-1)}$ et soit $S^{(0)}$ le dernier axe. Seul l'axe $S^{(0)}$ peut rencontrer la variété $V_3$, sans quoi les surfaces $F_0$ passeraient toutes par des points unis de l'involution $I_p$.

Les points unis de l'involution $I_p$ sont donc les points de rencontre de l'axe $S^{(0)}$ de H et de la variété $V_3$. On peut supposer qu'ils sont simples et distincts pour celle-ci, sans restriction. Si plusieurs de ces points étaient infiniment voisins d'un point multiple de $V_3$, il suffirait de projeter celle-ci de ce point sur un hyperplan pour être ramené au cas qui va être considéré ici.

L'axe $S^{(0)}$ et le système $\Sigma_0$ ont même dimension $r$. On peut encore supposer $r$ aussi grand qu'on le veut, quitte à remplacer $|F|$ par un de ses multiples convenablement choisi.

**2.** Rapportons projectivement les surfaces $F_0$ aux hyperplans d'un espace linéaire $S_r$ à $r$ dimensions; à la variété $V_3$ correspond une variété algébrique à trois dimensions, normale, $\Omega_3$. Comme nous l'avons déjà observé, $|F_0|$ n'est composé qu'au moyen de $I_p$; par suite la variété $\Omega_3$, image de l'involution $I_p$, est simple.

Désignons par $\Sigma_i$ le système d'hyperplans de $S_R$, unis pour l'homographie H, passant par tous les axes de cette homographie, sauf par $S^{(i)}$, par $F_i$ les surfaces F découpées sur $V_3$ par les hyperplans de $\Sigma_i$. Les systèmes linéaires $|F_1|$, $|F_2|$, ..., $|F_{p-1}|$ sont composés au moyen de $I_p$ et ont comme points-base tous les points unis de cette involution. Soient $r_1$, $r_2$, ..., $r_{p-1}$ les dimensions respectives de ces systèmes. On a

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_{p-1} + p = R + 1.$$

Aux surfaces $F_0$, $F_1$, ..., $F_{p-1}$ correspondent sur $\Omega_3$ des surfaces que nous désignerons respectivement par $\Phi$, $\Phi_1$, ..., $\Phi_{p-1}$, les premières étant donc les sections hyperplanes de $\Omega_3$.

Soient A un point uni de $I_p$ sur $V_3$, $\alpha$ l'espace linéaire à trois dimensions tangent en A à la variété $V_3$. L'espace $\alpha$ est uni pour l'homographie H et celle-ci détermine, dans $\alpha$, une homographie $h$ dont les points unis appartiennent aux axes de H.

Les hyperplans contenant l'espace $\alpha$ découpent, sur $V_3$, des surfaces ayant un point double en A. Parmi les systèmes $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, ..., $\Sigma_{p-1}$, il en est certainement dont les hyperplans ne contiennent pas $\alpha$ et coupent donc $V_3$ suivant des surfaces ayant en général un point simple en A. Supposons, pour fixer les idées, qu'il en soit ainsi pour les hyperplans de $\Sigma_1$.

Supposons que l'espace $\alpha$ puisse avoir une droite en commun avec l'espace $S^{(0)}$. Alors, les hyperplans de $\Sigma_0$ passant par A découpent $V_3$ suivant des surfaces ayant en général un point simple en A. L'intersection d'une telle surface et d'une surface $F_1$ donnera une courbe ayant un point simple en A. Mais cette courbe contient une involution déterminée par $I_p$ et cette involution n'aurait qu'un point uni A, ce qui est impossible. On démontrerait de même que l'espace $\alpha$ ne peut avoir un plan commun avec l'axe $S^{(0)}$. Par suite, l'espace $\alpha$ rencontre l'espace $S^{(0)}$ suivant le seul point A.

Désignons par A′ le point de diramation qui correspond sur $\Omega_3$ au point A. Nous allons déterminer la singularité du point A′ pour cette variété dans les cas $p = 2$, $p = 3$.

**3**. Supposons $p = 2$. L'homographie involutive H possède deux axes $S^{(0)}$, $S^{(1)}$ dont le premier seul rencontre la variété $V_3$. L'espace $\alpha$ ne pouvant rencontrer l'espace $S^{(0)}$ qu'au seul point A, doit nécessairement rencontrer l'espace $S^{(1)}$ suivant un plan et l'homographie $h$ est une homologie harmonique.

Un hyperplan de $\Sigma_0$, contenant A, passe par $S^{(1)}$ et par suite contient l'espace $\alpha$. Il coupe donc la variété $V_3$ suivant une surface $F_0$ ayant en général un point double conique en A, le cône tangent en ce point appartenant à $\alpha$.

Soit $n$ l'ordre de la variété $\Omega_3$. Alors le système $|F_0|$ a le degré $3n$ et l'ordre de la variété $V_3$ est $3n$ également.

Deux surfaces $F_0$ découpées sur $V_3$ par deux hyperplans de $\Sigma_0$ passant par A ont en commun une courbe C pour laquelle A est un point quadruple à tangentes distinctes en général. Un troisième hyperplan de $\Sigma_0$, passant également par A, mais n'appartenant pas au faisceau déterminé par les deux premiers, coupe $V_3$ suivant une surface $F_0$ rencontrant C en huit points confondus en A. Le système des surfaces $F_0$ passant par A a donc le degré $2n - 8$. Par suite, le système des surfaces $\Phi$ découpées sur $\Omega_3$ par les hyperplans passant par A′ a le degré $n - 4$ et A′ est multiple d'ordre quatre pour $\Omega_3$.

Fixons l'attention sur une surface $F_0$, soit $F'_0$, ayant un point double conique en A et sur la surface $\Phi$, soit $\Phi'$, qui lui correspond. Aux points infiniment voisins de A′ sur $F'_0$ correspondent les points infiniment voisins de A′ sur $\Phi'$; par suite le cône du quatrième ordre, tangent à cette surface en A′, est irréductible. Ce cône est en outre rationnel. Les surfaces $F_0$ passant par A déterminent, sur le cône tangent en A à $F'_0$, $\infty^4$ systèmes de quatre génératrices; par suite, les hyperplans de $S_r$ passant par A′ déterminent, sur le cône tangent à $\Phi'$ en A′, $\infty^4$ systèmes de génératrices. Il en résulte que le cône tangent à $\Phi'$ en A′ appartient en général à un espace linéaire à cinq dimensions.

Dans $\alpha$, il y a $\infty^5$ cônes de second ordre, de sommet A, tangents aux surfaces $F_0$ passant par ce point.

Il y a par suite $\infty^5$ cônes de quatrième ordre tangents en A′ aux surfaces $\Phi$ passant par ce point. Deux de ces cônes ont en commun quatre droites appartenant en général à un espace linéaire à trois dimensions; par suite le lieu de ces cônes appartient à un espace linéaire à six dimensions et est un cône à trois dimensions. Entre les surfaces $F_0$ passant par A et les surfaces $\Phi$ passant par A', nous avons une correspondance projective; donc il y a également une correspondance projective entre les cônes du second ordre de $\alpha$ de sommet A et les cônes du quatrième ordre tangents en A' aux surfaces $\Phi$ passant par ce point. Il en résulte que le cône tangent en A' à la variété $\Omega_3$ est le cône projetant de ce point une surface de Véronèse.

Le raisonnement précédent suppose que l'on a $r \geq 6$; nous avons vu que cela n'est pas une restriction.

A une surface F correspond sur $\Omega_3$ une surface $\overline{\Phi}$. Lorsque F se déplace d'une manière continue dans $|F|$ et vient coïncider avec une surface $F_0$, $\overline{\Phi}$ se déplace d'une manière continue et vient coïncider avec une surface $\Phi$ comptée deux fois, on a donc

$$\overline{\Phi} = 2\Phi$$

et la surface $\Phi$ est découpée sur $\Omega_3$ par une hyperquadrique. De même, lorsque la surface F tend vers une surface $F_1$, $\overline{\Phi}$ tend vers une surface $\Phi_1$, comptée deux fois, augmentée d'une surface d'ordre zéro, équivalente, au point de vue des transformations birationnelles, à l'entourage des points de diramation de $\Omega_3$. Il en résulte que le long d'une surface $\Phi_1$ il existe une hyperquadrique tangente à $\Phi_3$. L'hyperplan tangent en A' à cette hyperquadrique coupe le cône tangent à $\Omega_3$ en ce point suivant un cône du second ordre qui est le cône tangent en A' à la surface $\Phi_1$ considérée.

**4.** Supposons $p = 3$. L'homographie H possède trois axes $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ dont le premier seul coupe $V_3$. L'espace $\alpha$, coupant $S^{(0)}$ au seul point A, peut rencontrer les deux espaces $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ ou un seul de ces espaces. Deux cas peuvent se présenter :

1° L'espace $\alpha$ coupe l'un des espaces $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, par exemple $S^{(1)}$, suivant un plan et ne rencontre pas l'autre espace;

2° L'espace $\alpha$ coupe l'un des espaces $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, par exemple $S^{(1)}$, suivant une droite et l'autre espace, $S^{(2)}$, suivant un point.

Dans le premier cas, $h$ est une homologie, dans le second, $h$ est une homographie axiale hyperbolique générale.

Nous étudierons tout d'abord le premier cas.

Les surfaces $F_1$ ont en général un point simple en A. Les surfaces $F_0$ passant par A découpent, sur une surface $F_1$, des courbes ayant un point triple à tangentes variables en A, car pour une surface $F_1$, le point A est un point uni parfait de l'involution cyclique d'ordre trois déterminée par $I_3$ sur cette surface. Il en résulte que les surfaces $F_0$ passant par A ont en général un point triple conique en ce point.

Les surfaces $F_0$ passant par A forment un système linéaire de degré $3n - 27$, si $n$ est l'ordre de la variété $\Omega_3$. Par suite, les surfaces $\Phi$ passant par A' forment un système linéaire de degré $n - 9$ et le point A' est multiple d'ordre neuf pour la variété $\Omega_3$.

Il suffit maintenant de reprendre pas à pas le raisonnement fait plus haut dans le cas $p = 2$ pour arriver à la conclusion que le cône tangent en A' à la variété $\Omega_3$ est le cône projetant de ce point une surface d'un espace linéaire à neuf dimensions dont les sections hyperplanes représentent les cubiques d'un plan. On suppose donc $r \geq 10$.

Par un raisonnement analogue à celui qui a également été fait plus haut, on démontre qu'il existe, dans $S_2$, une hypersurface cubique ayant avec la variété $\Omega_3$ un contact du second ordre en tout point d'une surface $\Phi_1$ ou d'une surface $\Phi_2$. L'hyperplan tangent en A' à cette hypersurface coupe le cône tangent en ce point à la variété $\Omega_3$ suivant le cône tangent à la surface $\Phi_1$ ou $\Phi_2$ envisagée.

Comme nous l'avons vu, les surfaces $F_1$ ont en général un point simple en A et ce point est un point uni parfait pour l'involution déterminée par $I_3$ sur la surface. Par conséquent, les surfaces $\Phi_1$ ont en A' un point triple à cône tangent rationnel et irréductible.

Sur une surface $F_1$, les surfaces $F_2$ découpent des courbes ayant un point double en A; par suite les surfaces $F_2$ ont en général un point double conique en A. Il en résulte que les surfaces $\Phi_2$ ont un point sextuple en A′, le cône tangent étant en général irréductible et rationnel.

5. Passons à l'étude du second cas.

Désignons par $a$ la droite commune à l'espace $\alpha$ et à l'axe $S^{(1)}$ de l'homographie H, par $A_1$ le point commun à l'espace $\alpha$ et à l'axe $S^{(2)}$.

Les surfaces $F_2$ ont en général un point simple en A, le plan tangent étant $Aa$. Dans ce plan, l'homographie H détermine une homologie de centre A et d'axe $a$; donc A est un point uni parfait pour l'involution déterminée par $I_3$ sur chaque surface $F_2$. Il en résulte que les surfaces $F_0$ passant par A découpent sur les surfaces $F_2$ des courbes ayant un point triple à tangentes variables en A.

Les surfaces $F_1$ ont en général un point simple en A, le plan tangent en ce point passant par la droite $AA_1$ et coupant le plan $Aa$ suivant une droite variable $a_1$. Dans ce plan tangent, H détermine une homographie non homologique dont les points unis sont A, $A_1$ et $aa_1$. Par suite, pour les surfaces $F_1$, le point A est un point uni non parfait. Par suite, les surfaces $F_0$ passant par A découpent sur les surfaces $F_1$ des courbes ayant un point double ordinaire en A; l'une des tangentes coïncide avec la droite $AA_1$, l'autre tangente appartient au plan $Aa$.

Il résulte de ce qui précède que les surfaces $F_0$ passant par A ont un point double en ce point, une tangente étant la droite $AA_1$ et trois tangentes variables appartenant au plan $Aa$. Les cônes tangents doivent être transformés chacun en lui-même par l'homographie $h$; par suite ils se composent du plan $Aa$ et d'un plan variable passant par la droite $AA_1$. Les surfaces $F_0$ passant par A y ont donc un point double biplanaire.

Deux surfaces $F_0$ passant par A ont en commun une courbe

C ayant un point quadruple en A, l'une des tangentes étant la droite $AA_1$, les trois autres tangentes appartenant au plan $Aa$. Une troisième surface $F_0$ passant par A, n'appartenant pas au faisceau déterminé par les deux premières, coupe la courbe C suivant douze points confondus en A. Si $n$ est l'ordre de la variété $\Omega_3$, $3n$ est celui de la variété $V_3$ et le système formé des surfaces $F_0$ passant par A a donc le degré $3n - 12$. Il en résulte que le point $A'$ est quadruple pour la variété $\Omega_3$.

Puisque toute surface $F_0$ passant par A est tangente à la droite $AA_1$, au point de cette droite infiniment voisin de A doit correspondre une variété simplement infinie de points de $\Omega_3$, infiniment voisins de $A'$, cette variété étant rencontrée par tout hyperplan de $S_r$ passant par $A'$. A une surface $F_1$ correspond une surface $\Phi_1$ le long de laquelle une hypersurface cubique a un contact du second ordre avec la variété $\Omega_3$. On sait que $\Phi_1$ a, en $A'$, un point double biplanaire ordinaire et qu'au point de cette surface $F_1$, infiniment voisin de A sur la droite $AA_1$, correspondent les points infiniment voisins de $A'$ dans un des plans tangents à $\Phi_1$. On en conclut qu'au point infiniment voisin de A sur $AA_1$ correspondent les points infiniment voisins de $A'$ situés dans un plan $\tau$.

Une surface $F_2$ ayant en A un point uni parfait pour l'involution déterminée par $I_3$ sur cette surface, la surface $\Phi_2$ correspondante a un point triple à cône tangent rationnel et irréductible en $A'$. Le plan tangent en A à toutes les surfaces $F_2$ étant fixe, le cône cubique qui vient d'être rencontré est fixe et ses génératrices correspondent projectivement aux droites passant par A et situées dans le plan $Aa$. Nous désignerons ce cône par $(k)$.

Reprenons la considération d'une surface $F_1$; son plan tangent en A coupe le plan $Aa$ suivant une droite $a_1$. La surface $\Phi_1$ correspondante a en $A'$ un point double biplanaire ordinaire dont un plan tangent est $\tau$; les points infiniment voisins de $A'$, situés dans l'autre plan tangent $\tau_1$, correspondent au point de $V_3$, infiniment voisin de A sur la droite $a_1$. Si $a'_1$ est la génératrice du cône $(k)$ correspondant à $a_1$, le plan $\tau_1$ passe par $a'_1$. Il coupe d'autre part le plan $\tau$ suivant une droite $\tau\tau_1$ qui varie avec la surface $F_1$. Considérons la surface $F_0$ passant par A et tangente au plan $A_1a_1$ ; il lui correspond une surface $\Phi_0$ découpée sur la variété $\Omega_3$ par un hyperplan passant par la droite $\tau\tau_1$. Il en résulte qu'il y a une projectivité entre les droites du plan $\tau$, passant par A', et les plans de $\alpha$ passant par $AA_1$, c'est-à-dire que les faisceaux de rayons (A', $\tau$) et (A, A$a$) sont projectifs. Il existe enfin une projectivité entre le faisceau de rayons (A', $\tau$) et le cône cubique rationnel $(k)$.

Soit $\xi$ un hyperplan de $S_r$ ne passant pas par A'. Il coupe le plan $\tau$ suivant une droite $t$ et le cône cubique $(k)$ suivant une cubique gauche $k$. Les plans $\tau_1$ déterminent sur la droite $t$ et la cubique gauche $k$ des ponctuelles projectives. Le lieu de la droite joignant les points homologues est une réglée du quatrième ordre et le cône tangent à la variété $\Omega_3$ en A' est le cône projetant cette réglée de ce point. En général, la droite $t$ et la cubique $k$ déterminent un espace linéaire à cinq dimensions, et l'on est donc conduit à supposer $r \geq 6$.

Un hyperplan de $S_r$ passant par A' coupe la variété $\Omega_3$ suivant une surface $\Phi_0$ ayant en général en A' un cône tangent, du quatrième ordre, rationnel et irréductible. Sur ce cône se trouvent une droite du faisceau (A, $\tau$) et trois génératrices du cône $(k)$ qui correspondent respectivement à la tangente $AA_1$ et aux trois tangentes d'osculation situées dans le plan A$a$.

Ainsi se trouvent établis les théorèmes énoncés au début de cette note.

Liége, le 27 décembre 1930.

Marcel HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.