ACADEMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XVII, n° 4.
Séance du 11 avril 1931, pp. 516-526.

Géométrie.

Sur les Involutions du second ordre de l'Espace,

par Lucien GODEAUX, Correspondant de la Classe.

(*Première note.*)

Dans cette note et dans quelques autres qui lui feront suite, nous nous proposons d'étudier quelques involutions du second ordre de l'espace, en vue d'établir une théorie générale de ces involutions. Nous commençons par considérer les involutions engendrées par un système linéaire ∞^3 de surfaces du quatrième ordre passant simplement par une courbe donnée. Ces involutions ont été considérées récemment par MM. Sharpe et Snyder (1), et l'une d'elles, celle que nous étudions précisément dans cette note, l'avait été antérieurement par Montesano (2). Ce dernier a obtenu cette involution comme celle dont les droites déterminées par les couples de points homologues forment un complexe tétraédral.

L'involution considérée ici est rationnelle et représentable sur un espace linéaire double dont la surface de diramation est du sixième ordre, possède trente-neuf points doubles coniques et un système linéaire ∞^3 de courbes d'ordre 15, le long de chacune desquelles elle est touchée par une surface du cinquième ordre.

Nous apportons quelques compléments aux résultats obtenus par Montesano, d'une part, par MM. Sharpe et Snyder, d'autre part. Pour la facilité du lecteur, nous avons cependant repris la question au début.

(1) Sharpe et Snyder, Certain types of involutorial space transformations. (*Transactions of the american math. Society*, 1919, t. XX, pp. 185-202; 1920, t. XXI, pp. 52-78.)

(2) Montesano, Su la trasformazione involutoria dello spazio che determina un complesso tetraedrale. (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1° sem, 1889, pp. 497-501.)

1. Soit Γ une courbe gauche d'ordre 11 et de genre 14, dans un espace ordinaire Σ. Les surfaces du quatrième ordre découpent, sur la courbe Γ, une série linéaire g_{44}^{30} d'ordre 44 et de rang 30; par suite il y a ∞^3 surfaces du quatrième ordre, F_4, passant par Γ et formant un système linéaire $|F_4|$.

Deux surfaces de système $|F_4|$ ont en commun, outre Γ, une courbe C_5, d'ordre 5 et de genre 2, s'appuyant en dix-huit points sur la courbe Γ.

Trois surfaces du système $|F_4|$, n'appartenant pas à un même faisceau, ont en commun, en dehors de Γ, deux points. Les couples de points obtenus en considérant les ∞^3 réseaux de surfaces du système $|F_4|$ forment une involution I_2, d'ordre 2. Nous désignerons par T la transformation birationnelle involutive de Σ faisant se correspondre les points d'un couple de I_2.

Rapportons projectivement les surfaces de $|F_4|$ aux plans d'un espace linéaire Σ'. A un groupe de I_2 correspond un point de Σ' et entre les espaces Σ', Σ, nous avons donc une correspondance (1, 2).

La jacobienne du système $|F_4|$ est une surface Φ_{12}, d'ordre 12, passant trois fois par la courbe Γ. Une courbe C_5 coupe Φ_{12}, en dehors de Γ, en six points; par suite la surface de diramation, dans l'espace Σ', est une surface Φ'_6, d'ordre six.

2. Considérons une surface F_4. Une courbe C_5, tracée sur cette surface, est située sur une quadrique Q qui coupe encore la surface F_4 suivant une cubique gauche K qui s'appuie en quatre points A_1, A_2, A_3, A_4, sur la courbe Γ. Lorsque la courbe C_5 varie, sur la surface F_4 considérée, la cubique gauche K reste fixe. Les couples de points de l'involution I_2 sont découpés, sur cette surface F_4, par les bisécantes de la cubique K.

Sur toute surface du système $|F_4|$ se trouve une cubique gauche K. Comme deux surfaces de ce système ont en commun une courbe C_5, toutes les cubiques gauches K passent par les mêmes points A_1, A_2, A_3, A_4 de la courbe Γ.

3. Soient P un point de Γ, p une droite passant par P et distincte de la tangente à Γ en P. Il existe dans $|F_4|$ un réseau de surfaces touchant la droite p en P. Le plan tangent à ces surfaces en P est fixe, c'est le plan tangent à Γ en P passant par p. Aux surfaces du réseau considéré correspondent dans Σ' les plans d'une gerbe de sommet P'. Lorque la droite p varie dans la gerbe de sommet P, le point P' varie et, puisque les les surfaces F_4 passent simplement par Γ, le lieu du point P' est une droite p'.

Si ϖ_1, ϖ_2 sont deux plans distincts, tangents à la courbe Γ en P, il existe deux réseaux de surfaces F_4 tangentes en P, celles du premier réseau au plan ϖ_1, celles du second au plan ϖ_2. Ces deux réseaux ont en commun un faisceau de surfaces F_4 ayant un point double en P. Aux surfaces de ce faisceau correspondent, dans Σ', les plans passant par la droite p'. A cette droite correspond dans Σ la courbe C_5 qui, avec Γ, forme la base du faisceau. Cette courbe C_5 possède un point triple en P et est située sur le cône du second ordre Q qui la projette de P. Ce cône coupe encore une quelconque des surfaces F_4 du faisceau suivant une cubique gauche K passant par P et par les points A_1, A_2, A_3, A_4. Les bisécantes de K qui contiennent les points de la courbe C_5 envisagée sont les génératrices du cône Q ; par suite la courbe C_5 ne peut posséder de point uni de l'involution I_2 en dehors de P. Aux points infiniment voisins de P, T fait correspondre les points de la courbe C_5. Il en résulte que la courbe C_5 touche, en P, les trois nappes de la surface Φ_{12}. (Cette courbe C_5 rencontre la courbe Γ en 16 points en dehors de P.) La droite p' touche la surface Φ'_6 en trois points.

Lorsque le point P décrit la courbe Γ, la droite p' engendre une surface réglée d'ordre 18, Ψ'_{18}, car une courbe C_5 quel-

*

conque s'appuie en 18 points sur la courbe Γ. Cette surface Ψ'_{18} est circonscrite à la surface Φ'_6 suivant une courbe qui correspond aux points unis de l'involution I_2, infiniment voisins de la courbe Γ.

4. Soit r une quadrisécante de la courbe Γ. Par cette droite passent ∞^2 surfaces F_4 formant un réseau. Aux surfaces de ce réseau correspondent dans Σ' les plans d'une gerbe de sommet R'. Deux surfaces F_4 passant par r ont encore en commun, outre Γ, une courbe du quatrième ordre C_4. Considérons une de ces surfaces $\bar{F}_4$ et une courbe $\bar{C}_4$ tracée sur cette surface. Il existe une quadrique Q contenant $\bar{C}_4$ et r, rencontrant encore $\bar{F}_4$ suivant une cubique gauche K. Supposons que $\bar{C}_4$ ne soit pas une biquadrique et admette donc une infinité de trisécantes. Celles-ci sont des génératrices d'un mode de Q. Si la droite r est une sécante simple de $\bar{C}_4$, c'est une bisécante de K. Les bisécantes de K découpant sur $\bar{F}_4$ des groupes de I_2, celles qui rencontrent $\bar{C}_4$ doivent ou bien rencontrer cette courbe en deux points, ou bien s'appuyer sur r; ces deux cas sont impossibles. Si la droite r est une trisécante de $\bar{C}_4$, c'est une sécante simple de K; les bisécantes de cette courbe s'appuyant sur $\bar{C}_4$ rencontrent r et T fait correspondre les points de $\bar{C}_4$ à ceux de r. Mais les courbes C_4 sont en nombre ∞^2 et le raisonnement tenu pour $\bar{C}$ peut l'être pour ces ∞^2 courbes, ce qui conduit à une absurdité. Il résulte de tout ceci que les courbes C_4 sont des biquadriques gauches s'appuyant en deux points sur la droite r. Cette droite est une bisécante de K et est donc transformée en elle-même sur T.

Les courbes C_4 étant en général elliptiques, contiennent quatre points unis de l'involution I_2. Par suite les droites de Σ' passant par R' rencontrent encore la surface Φ'_6 en quatre points et le point R' est double pour cette surface. D'autre part, les courbes C_4 s'appuient en quatorze points sur Γ; ces courbes rencontrent donc Φ_{12} en six points en dehors de Γ

et deux de ces points doivent appartenir à la droite r, sur laquelle ils forment un couple de l'involution I_2. A ce couple correspond, dans Σ', le point infiniment voisin de R' sur la droite qui correspond à la courbe C_4 envisagée.

La droite r appartenant à la surface Φ_{12}, les ∞^2 courbes C_4 ne peuvent donner, sur cette droite, une involution de couples de points, car cette involution aurait quatre points unis, aux points d'appui de r sur Γ. Il en résulte que tout couple de points de r est un groupe de l'involution I_2 et que cette droite est fondamentale de seconde espèce pour la transformation T. Cela étant, les surfaces F_4 passant par r découpent, sur l'une d'entre elles, ∞^1 courbes C_4 dont les points de rencontre avec r forment un γ_2^1. Par suite, le point R est double conique pour la surface Φ'_6 et aux points de cette surface infiniment voisins de R' correspondent les couples de l'involution I_2 formés de deux points confondus de r.

Soit P un des points d'appui de r sur Γ. Il existe ∞' surfaces F ayant un point double en P et ces surfaces formant un faisceau dont la base est constituée par la courbe Γ, la droite r et par une courbe C_4 ayant un point double en P, les deux branches de cette courbe touchant en P deux nappes de la surface Φ_{12}. A cette courbe correspond dans Σ' une droite passant par R' et touchant encore Φ'_6 en deux points. Il existe quatre droites analogues; elles appartiennent à la réglée Ψ'_{18}.

On sait que la courbe Γ possède 35 quadrisécantes; on obtient donc 35 points doubles coniques R'_1, R'_2, ..., R'_{35} de la surface Φ'_6.

5. Fixons l'attention sur une courbe C_5, soit C_5^*, générale, et soit Q^* la quadrique qui la contient. Les surfaces F_4 passant par C_5^* découpent sur Q^* un faisceau de cubiques gauches. Parmi celles-ci, il y en a quatre dégénérées en une conique passant par trois des points A_1, A_2, A_3, A_4, et en une droite passant par le quatrième. Désignons par α_1, α_2, α_3, α_4 les faces du tétraèdre A_1 A_2, A_3, A_4, respectivement opposées à A_1, A_2, A_3, A_4, et considérons la cubique dégénérée en une conique γ_1 de α_1 et en une droite c_1 passant par A_1. Soit F_4^* la surface F_4 contenant C_5^* et cette cubique. La conique γ_1 passe par A_2, A_3, A_4 et l'on peut toujours supposer C_5^* choisie de telle sorte que cette conique ne rencontre pas Γ en dehors de ces trois points. Cela étant, la surface F_4^* rencontre le plan α_1 suivant une seconde conique σ_1 qui s'appuie en huit points sur la courbe Γ. Sur la surface F_4^*, il existe une courbe C_5 contenant σ_1 comme partie; elle est découpée par une quadrique formée du plan α_1 et d'un plan passant par c_1. Celui-ci découpe sur F_4^* une cubique plane s'appuyant en deux points sur σ_1, en un point sur la conique γ_1 et qui, avec σ_1, forme une courbe C_5. Cette cubique est en général elliptique et contient donc quatre points unis de l'involution I_2. Désignons cette cubique par C_3^*.

Les bisécantes de la cubique gauche $\gamma_1 + c_1$ découpent, sur la courbe $\sigma_1 + C_3^*$, des couples de I_2. Par suite, les ∞^2 couples de points de la conique σ_1 appartiennent à l'involution I_2. Il en résulte que la surface Φ_{12} contient cette conique σ_1 et que cette courbe est fondamentale de seconde espèce pour la transformation T. Les droites passant par le point de rencontre de la cubique C_3^* et de la conique γ_1, et s'appuyant sur C_1, découpent sur C_3^* les couples de l'involution I_2 appartenant à cette courbe.

Les surfaces F_4 passant par un point de σ_1 n'appartenant pas à Γ contiennent cette conique et se rencontrent deux à deux suivant des cubiques planes C_3 dont les plans passent par A_1. A ces surfaces correspondent dans Σ' les plans d'une gerbe de sommet S_1'. Nous avons vu que les courbes C_3 contenant quatre points unis de I_2, donc les droites passant par S_1', coupent encore Φ_6' en quatre points et S_1' est donc double pour cette surface. C'est d'ailleurs un point double conique. Aux points de Σ' infiniment voisins de S_1' correspondent les couples de points de σ_1 et en particulier, aux points de Φ'_6 infiniment voisins de S'_1 correspondent les couples de points de σ_1 formés de deux points confondus.

Si P est un des points d'appui de σ_1 sur Γ, les ∞^1 surfaces F_4 ayant un point double en P ont en commun, outre Γ et σ_1, une cubique C_3 ayant un point double en P et y touchant deux nappes de la surface Φ_{12}; à cette courbe correspond dans Σ' une bitangente de Φ'_6 passant par S'_1 et appartenant à la réglée Ψ'_{18}. Il existe donc huit droites de cette réglée, bitangentes de Φ'_6, passant par le point S'_1.

Dans les plans α_2, α_3, α_4 existent de même des coniques octosécantes de Γ, que nous désignerons respectivement par σ_2, σ_3, σ_4. Elles donnent naissance à trois points doubles coniques de Φ'_6, soient S'_2, S'_3, S'_4.

6. Il existe ∞^1 surfaces F, formant un faisceau, contenant les coniques σ_1, σ_2. La courbe-base de ce faisceau est formée des courbes Γ, σ_1, σ_2 et de la droite $a_{34} = A_3 A_4$. Cette droite est donc transformée en elle-même par T. Les surfaces F_4 contenant a_{34} contiennent nécessairement les coniques σ_1, σ_2; donc les surfaces F_4 découpent, sur a_{34}, les couples d'une série g^1_2. A la droite a_{34} correspond dans Σ' une droite $a'_{34} = S'_1 S'_2$.

De même, aux droites $a_{12} = A_1 A_2$, $a_{13} = A_1 A_3$, ..., $a_{24} = A_2 A_4$ correspondent respectivement les droites $a'_{12} = S'_3 S'_4$, $a'_{13} = S'_2 S'_4$, ..., $a'_{24} = S'_1 S'_3$.

Considérons le faisceau formé par les surfaces F_4 ayant un point double en A_1. Il comprend une surface passant par la conique σ_2 et que nous désignerons par F^*_4. Cette surface est rencontrée par la droite $A_1 A_3$ en un point double et trois points simples; donc elle contient cette droite. Elle contient par suite la conique σ_4 et par suite la droite $A_1 A_2$, donc aussi la conique σ_3. A cette surface F^*_4 correspond donc, dans Σ', le plan $S'_2 S'_3 S'_4$.

Les surfaces F_4 découpent sur F^*_4, des courbes C_5 passant par A_1 et s'appuyant encore en deux points, formant des couples I_2, sur chacune des droites a_{12}, a_{13}, a_{14}. Une quadrique passant par une de ces courbes est le cône la projetant à partir de A_1. Les courbes C_5 de la surface F_4^* sont donc découpées sur celles-ci par les cônes du second ordre, Q, passant par les droites a_{12}, a_{13}, a_{14}. Parmi ces courbes C_5, il y a une qui possède un point triple en A_1 et qui est commune à toutes les surfaces ayant un point double en A_1. Désignons-la par C_5^*. Une de ces dernières surfaces, distinctes de F_4^*, ne peut contenir aucune des droites a_{12}, a_{13}, a_{14}, car alors elle contiendrait également les coniques σ_2, σ_3, σ_4, ce qui est impossible. Une telle surface rencontre la droite a_{12}, par exemple, en un point au plus en dehors de A_1, A_2 et ce point doit être uni pour I_2. De plus, il appartient à la courbe C_5^*. Mais tous les points de C_5 unis pour I_2 sont infiniment voisins de A_1. On en conclut que les surfaces F_5 ayant un point double en A_1 touchent la droite a_{12} et de même les droites a_{13}, a_{14} en A_1. Par suite, les droites a_{12}, a_{13}, a_{14} sont tangentes à la surface Φ_{12} en A_1 (et de même, respectivement, en A_2, A_3, A_4). Aux points infiniment voisins de A_1 correspondent dans Σ' les points d'une droite a_1' de la réglée Ψ_{18}'. Cette droite appartient au plan $S_2'S_3'S_4'$ et elle est tangente à la surface Φ_6' aux points où elle rencontre les droites a_{12}', a_{13}' et a_{14}'.

Nous avons vu que les cônes de second ordre passant par les droites a_{12}, a_{13}, a_{14} découpent sur la surface F_4^* les courbes C_5 appartenant à cette surface. Ces courbes sont en général de genre deux et le plan $S_2'S_3'S_4'$ coupe donc la surface Φ_6' suivant une courbe de sixième ordre.

7. Considérons un plan quelconque μ et soit M la surface que T lui fait correspondre. Aux couples de points de l'involution I_2 situés sur la surface $\mu + M$ correspondent, dans Σ', les points d'une surface du cinquième ordre M_5'. Il en résulte que la surface $\mu + M$ est d'ordre 20 et que par suite la surface M est d'ordre 19; nous la désignerons par M_{19}. La surface M_{19} passe cinq fois par la courbe Γ, une fois par chacune des quadrisécantes de cette courbe, deux fois par chacune des coniques σ_1, σ_2, σ_3, σ_4. Par suite, la surface M'_5 passe par les 35 points R'_1, R'_2, ..., R'_{35} et, doublement, par les points S'_1, S'_2, S'_3, S'_4.

La surface M_{19} coupe le plan μ suivant une courbe d'ordre 19 qui comprend la courbe d'ordre 12, section de la surface Φ_{12}, par le plan μ. Le restant est une courbe du septième ordre contenant ∞^1 couples de l'involution I_2. A cette courbe correspond, dans Σ', une courbe double K' de la surface M'_5. Nous avons vu que les couples de points de I_2 appartenant à une surface F_4 sont découpés sur celle-ci par les bisécantes d'une cubique gauche K appartenant à la surface. Il en résulte qu'il y a trois de ces couples situés dans un plan quelconque μ. Par suite, la courbe K' est une cubique gauche. Cette cubique gauche K' passe par les points S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, car les points où le plan μ coupe la conique σ_1, par exemple, forment un couple de I_2.

La surface M'_5 touche la surface Φ'_6 le long d'une courbe d'ordre 15 qui correspond point par point à la courbe suivant laquelle le plan μ coupe la surface Φ_{12}.

8. A une droite *d* de l'espace Σ, T fait correspondre une courbe Δ_{19} d'ordre 19. A l'ensemble des courbes *d*, Δ_{19} correspond dans Σ' une quartique rationnelle Δ'_4.

Les droites joignant les deux points d'un groupe de l'involution I_2 sont en nombre ∞^3; donc *d* ne contient pas en général de couple de I_2. La droite *d* rencontre Φ_{12} en douze points appartenant à la courbe Δ_{19}. La courbe Δ'_4 touche la surface Φ'_6 en douze points et est en général dépourvue de point double.

La quartique Δ'_4 est de seconde espèce; aux trisécantes de cette courbe correspondent des courbes C_5 s'appuyant en trois points sur *d* et en trois points (homologues des trois premiers dans T) sur la courbe Δ_{19}. Le lieu de ces quintiques est une surface de huitième ordre passant doublement par la courbe Γ.

9. Considérons le plan α_1 et la surface $M_5'^{(1)}$ qui lui correspond dans Σ'. Les surfaces F_4 découpent, sur les droites a_{23}, a_{35}, a_{52} des couples I_2; par suite la surface $M_5'^{(1)}$ passe doublement par les droites a'_{23}, a'_{34}, a'_{42} (passant par S_1').

A une droite p_1 passant par S_1' correspond une courbe C_5 formée de la conique σ_1 et d'une cubique plane C_3^* dont le plan passe par A_1. Nous avons vu que les couples de I_2 situés sur C_3^* sont découpés par les droites de son plan passant par le point où cette courbe rencontre α_1 en dehors de σ_1. On en conclut que la droite p' rencontre $M_5'^{(1)}$ en un seul point en dehors de S_1'; donc ce point est quadruple pour cette surface.

La surface $M_5'^{(1)}$ touche la surface Φ_6' le long d'une courbe d'ordre 15 qui correspond point par point à la courbe d'ordre 10 qui, avec la conique σ_1, forme l'intersection du plan α_1 et de la surface Φ_{12}.

Aux droites du plan α_1 correspondent, dans Σ', des quartiques ayant un point double en S_1' et découpées, sur la surface $M_5'^{(1)}$, par les cônes quadriques passant par les droites a'_{23}, a'_{35}, a'_{42}.

Soit P un des points d'appui de la conique σ_1 sur la courbe Γ. La base du faisceau des surfaces F_4 ayant un point double en P se compose de Γ, de σ_1 et d'une cubique plane ayant un point double en P. Les points de cette cubique correspondent, dans la transformation T, aux points infiniment voisins de P. Par suite, cette cubique appartient à la surface $M_{19}^{(1)}$ que T fait correspondre au plan α_1. A cette cubique correspond dans Σ' une droite passant par S_1', bitangente de Φ_6' et appartenant à la réglée Ψ_{18}'. Cette droite appartient à la surface $M_5'^{(1)}$.

10. Soit μ un plan passant par la quadrisécante r_1 de Γ.

Cette droite appartient à la surface M_{19} que T fait correspondre à μ; par suite la cubique gauche K'_1 double pour la surface M'_5, correspondant à μ dans Σ', passe par le point R'_1.

A une droite p' passant par R'_1 correspond une courbe C_4 ayant r_1 comme bisécante. Sur cette courbe se trouvent encore deux groupes de I_p dont un point appartient à μ. On en conclut que p' coupe M'_5 en deux points en dehors de R'_1 et que par suite ce point est triple pour cette surface.

De plus, la surface M'_5 contient les quatre génératrices de la réglée Ψ'_{18} passant par le point R'_1. Elle touche la surface Φ'_6 le long d'une courbe du quinzième ordre qui a un point triple en R'_1.

11. A un point P de Γ, T fait correspondre une courbe C_5 ayant un point triple en P. Le lieu de ces courbes, lorsque P décrit Γ, est la transformée de la réglée Ψ'_{18}; c'est donc une surface Ψ_{72} d'ordre 72. C'est la surface fondamentale de la transformation T, associée à la courbe fondamentale Γ.

A une surface d'ordre 20 passant cinq fois par Γ, T fait correspondre une surface de même ordre, passant le même nombre de fois par Γ. Dans le système complet formé par ces surfaces, T agit comme une homographie involutive. Il y a deux systèmes composés au moyen de l'involutive I_2. L'un est formé des surfaces d'ordre 20 qui correspondent aux surfaces du cinquième ordre de Σ'. L'autre système comprend la surface Φ_{12} comme partie fixe; il est donc formé de surfaces d'ordre huit, transformées des quadriques de Σ'. On en conclut que les surfaces d'ordre 20 passant cinq fois par la courbe Γ sont en nombre ∞^{65}.

On trouve de même que les surfaces d'ordre $4n$ $(n > 2)$, passant n fois par la courbe Γ, forment un système linéaire de dimension $\frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 13)$.

Liége, le 31 mars 1931.

MARCEL HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.