RÉSULTATS RÉCENTS DANS LA THÉORIE DES MODULES DES COURBES ALGÉBRIQUES (1);

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

La théorie des courbes algébriques a reçu, dans ces dernières années, des contributions importantes. Citons, par exemple, les belles et profondes recherches de M. Severi sur la classification de ces courbes et sur le théorème d'existence de Riemann (2). Un excellent exposé de ces travaux a été fait ici même par M. Comessatti (3). Les résultats dont nous allons rendre compte et qui sont dus pour une bonne part à M. B. Segre se rattachent directement aux idées développées par M. Severi.

1. *La variété des courbes planes de genre p.* — L'équation cartésienne d'une courbe plane algébrique d'ordre n a

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = N+1$$

coefficients homogènes. Interprétons ces coefficients comme coordonnées projectives homogènes d'un espace linéaire S_N à

$$N = \frac{1}{2}n(n+3)$$

dimensions. La condition pour qu'une courbe plane d'ordre n

(1) Travail écrit à l'occasion d'une communication faite le 27 janvier 1931, au séminaire de M. Hadamard.

(2) F. SEVERI, *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema d'esistenza di Riemann* (*Rend. della R. Accad. dei Lincei*, 1° sem. 1915, p. 877-888, 1011-1020). *Vorlesungen über algebrische Geometrie* (Leipzig, 1921). *Voir* p. 307 et suiv.

(3) A. COMESSATTI, *Sur la classification des courbes algébriques et sur le théorème d'existence de Riemann* (*à propos d'un Ouvrage de M. Severi*) (*Bull. des Sc. math.* janvier 1922).

possède d points doubles est algébrique, d étant un nombre entier positif ou nul, au plus égal à $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Par conséquent, les points de S_N qui représentent les courbes planes d'ordre n ayant d points doubles, forment une variété algébrique V' dont la dimension est d'ailleurs égale à $3n+p-1$,

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)-d$$

étant le genre des courbes envisagées.

La variété V' n'est pas en général irréductible, comme le montre l'exemple simple des quartiques planes ayant trois points doubles. Les points qui représentent ces courbes dans l'espace S_{11} forment une variété V' de dimension 11, réductible en deux variétés de même dimension. Les points de l'une représentent les quartiques irréductibles ayant trois points doubles; les points de l'autre les quartiques formées d'une droite et d'une cubique.

Mais la variété V' contient la variété V_p des courbes *irréductibles* d'ordre n et de genre p et cette variété V_p est irréductible. Une démonstration géométrique de cette irréductibilité a été donnée par M. Enriques (¹). En voici les grandes lignes.

Supposons la propriété établie pour une certaine valeur de p, c'est-à-dire supposons que les courbes planes irréductibles d'ordre $n=2p$ et de genre p forment une variété V_p irréductible. Cette variété V_p est contenue dans la variété V_{p-1} des courbes planes d'ordre $2p$ et de genre $p+1$, ayant un point double de moins. Si la variété V_{p+1} est réductible, c'est-à-dire composée d'un certain nombre fini de variétés V'_{p+1}, V''_{p+1}, ..., chacune de celles-ci contient la variété V_p.

Les courbes C^{p+1}_{2p} d'ordre $2p$ et de genre $p+1$ possèdent $\delta = 2(p-1)^2-2$ points doubles. Fixons l'attention sur une courbe de V_p, ayant donc $\delta+1$ points doubles, et supposons un de ses points doubles virtuellement inexistant; cette courbe appartient à l'une des variétés V'_{p+1}, V''_{p+1}, ..., par exemple à la première. Reprenons la même courbe et supposons un autre de ses

(¹) F. Enriques, *Sui moduli d'una classe di superficie algebriche e sul teorema d'esistenza per le funzioni algebriche di due variabili* (*Atti della R. Accad. di Torino*, janvier 1912).

points doubles virtuellement inexistant; il est évidemment possible de choisir ce point de manière que la courbe appartienne, par exemple, à V''_{p+1}. Mais il est possible de faire varier la courbe envisagée d'une manière continue, dans V_p, de manière à échanger deux quelconques de ses points doubles. Par suite les variétés V'_{p+1}, V''_{p+1} coïncident. On en conclut que la variété V_{p+1} est irréductible.

Observons maintenant que la variété V_p est certainement irréductible pour les premières valeurs $p = 1, 2, 3$ du genre. L'irréductibilité de V_p est donc démontrée en général.

2. *La variété des classes de courbes algébriques de genre p.* — On sait que deux courbes de même genre p ne sont pas nécessairement birationnellement identiques, c'est-à-dire telles qu'on puisse passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle. Pour qu'une telle transformation existe, il faut que les courbes aient mêmes modules, c'est-à-dire que certaines expressions des coefficients soient égales.

Une courbe de genre $p (p > 1)$ dépend de $3p - 3$ modules. Si nous reprenons la variété irréductible V_p, elle peut donc être considérée comme le lieu de ∞^{3p-3} variétés formées chacune de courbes deux à deux birationnellement identiques, c'est-à-dire appartenant à la même classe. L'ensemble H_p de ces variétés est évidemment algébrique et irréductible; il constitue une variété à $3p - 3$ dimensions, image des classes de courbes algébriques de genre p.

L'irréductibilité de la variété H_p peut également être démontrée en s'appuyant sur le théorème d'existence de Riemann, comme l'a fait voir M. Severi [1]. Considérons les surfaces de Riemann de genre p, à n feuillets $(n > 2p)$, possédant $2n + 2p - 2$ points de ramification simple, la distribution des substitutions correspondant à ces points de ramification étant donnée. On peut faire décrire au groupe des points de ramification un chemin continu le ramenant en lui-même et tel que deux distributions possibles des substitutions soient échangées entre elles. En d'autres termes, les surfaces de Riemann, birationnellement distinctes, ayant un

[1] *Loc. cit.*

groupe déterminé de points de ramification, peuvent s'échanger entre elles et la variété H_p constituée par ces surfaces est donc irréductible.

3. *Représentation de la variété* H *sur un espace linéaire.* — Les courbes elliptiques dépendent d'un module et la variété H_1 est rationnelle. Cette propriété peut-elle s'étendre aux variétés H_p? En d'autres termes, la variété H_p est-elle rationnelle ou, tout au moins, cette variété représente-t-elle une involution ([1]) appartenant à un espace linéaire à $3p - 3$ dimensions? M. Severi considère comme probable que cette question puisse recevoir une réponse affirmative ([2]). En d'autres termes, M. Severi considère comme probable que les modules puissent figurer rationnellement dans l'équation d'une courbe de genre p, ou tout au moins sous une forme analogue (dans le cas où H_p représente une involution appartenant à une espèce S_{3p-3}).

M. Severi ajoute que pour $p < 11$, la question peut être élucidée par la considération des courbes planes de genre p et d'ordre minimum. Pour les autres valeurs de p, il faudra probablement considérer les courbes gauches de genre p et d'ordre minimum.

Dans le cas $p < 11$, la démonstration de M. Severi est la suivante ([3]) :

L'ordre minimum d'une courbe plane de genre p est le plus petit entier n satisfaisant à l'inégalité

$$3(n-2) \geqq 2p,$$

due à M. Brill et Noether et démontrée rigoureusement par

([1]) On appelle *involution*, dans un espace linéaire S_r à r dimensions, un ensemble ∞^r de groupes de m points tel qu'un point de S_r appartienne en général à un seul groupe. Une telle involution est-elle rationnelle, c'est-à-dire peut-on établir une correspondance birationnelle entre les groupes de l'involution et les points d'un espace linéaire à r dimensions? La réponse est affirmative pour $r = 1$ (Lüroth) et $r = 2$ (Castelnuovo), elle est négative pour $r = 3$. M. Enriques a, en effet, réussi à construire une involution de l'espace à trois dimensions, ayant pour image un complexe cubique de droites, variété non rationnelle. *Cf.* Enriques, *Sopra una involuzione non razionale dello spazio*, (*Rend. R. Accad. Lincei*, janvier 1912).

([2]) *Sulla classificazione...* (*loc. cit.*).

([3]) B. Segre, *Sui moduli delle curve algebriche* (*Annali di Matematica* 1929-1930, série 4, t. VII, p. 71-102).

M. Severi (¹). Une telle courbe possède

$$d = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - p$$

points doubles et comme, pour $p < 11$, on a

$$3d < \frac{1}{2} n(n+3),$$

les d points doubles peuvent être choisis arbitrairement.

Reprenons la représentation des courbes planes d'ordre n pour les points de l'espace S_N dont il a été question plus haut. Les courbes de genre $p < 11$, ayant d points doubles fixes, forment un système linéaire de dimension k, qui est représenté dans S_N par un espace linéaire S_k. L'ensemble des courbes irréductibles de genre p envisagées, à points doubles arbitraires, forme donc une variété algébrique W lieu de ces espaces S_k. Il existe une correspondance biunivoque entre ces espaces S_k et les groupes de d points du plan, par suite la variété W est rationnelle. Si r est sa dimension, les courbes envisagées peuvent donc être représentées par les points d'un espace linéaire S_r à r dimensions.

Les courbes d'ordre n et de genre p, deux à deux birationnellement identiques, sont représentées dans S_r par les points d'une certaine variété algébrique R_s de dimensions s. On a ainsi dans S_r un ensemble de ∞^{3p-3} variétés R_s tel que par un point passe une seule de ces variétés. Cet ensemble est birationnellement identique à la variété H_p. Cela étant, si l'on considère dans S_r un espace linéaire à $r-s$ dimensions, S_{r-s}, chaque variété R_s coupe cet espace suivant un nombre fini de points; ces groupes de points engendrent une involution birationnellement identique à H_p (on a donc $r - s = 3p - 3$, comme il est d'ailleurs aisé de le voir).

Donc la variété H_p des classes de courbes algébriques de genre p inférieur à 11, représente une involution appartenant à un espace linéaire à $3p-3$ dimensions.

Pour $p = 3$, le raisonnement précédent se trouve dans l'Ouvrage de MM. Enriques et Chisini (²).

(¹) *Vorlesungen...* (*loc. cit.*).

(²) F. Enriques et O. Chisini, *Lezioni sulla teorie geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* (Bologne, 1915-1924). *Voir* tome III, p. 376 et suiv.

4. *Systèmes linéaires de courbes planes à modules généraux.* — Le résultat précédent montre que, pour $p=3$ par exemple, il existe des systèmes linéaires de courbes planes à modules généraux. La totalité des courbes planes de genre trois et d'ordre minimum quatre forme en effet un système linéaire. M. B. Segre s'est proposé de voir pour quelles valeurs du genre il pouvait exister des systèmes linéaires de courbes à modules généraux (1). Il a construit de tels systèmes pour $p \leqq 6$ et démontré qu'il ne pouvait en exister pour $p > 6$.

La dimension d'un système linéaire $|C|$, de courbes à modules généraux, de genre p, est au moins égale à $3p-3$. D'autre part, d'après un théorème de M. Castelnuovo (2), si la dimension du système dépasse $2p+7$, les courbes en sont hyperelliptiques. On en conclut immédiatement que pour $p > 10$, les courbes du système $|C|$ sont hyperelliptiques et par suite à modèles particuliers.

Lorsqu'on a affaire à un système linéaire $|C|$ de genre $p=7$, 8, 9, ou 10, on peut remarquer que le système adjoint par $|C'|$ de $|C|$ est irréductible et que le système $|C-C'|$ existe et est formé de courbes elliptiques. Par des transformations birationnelles, on peut ramener ce dernier système à un système de cubiques planes ou de quartiques planes à deux points doubles. Une discussion arithmétique des formules liant le genre, la dimension, l'ordre des courbes C et leurs multiplicités aux points-base, permet de conclure que les courbes du système sont à modules particuliers. Ainsi, dans le cas $p=7$, on peut ramener le système $|C|$, par des transformations birationnelles, à un système de sextiques, c'est-à-dire de courbes de genre sept contenant une série linéaire g_6^2, ce qui implique que les courbes sont à modules particuliers. Le raisonnement est fait en supposant que les points-base multiples du système $|C|$ occupent une position générale dans le plan. Le passage au cas où les positions de ces points sont quelconques se fait par variation continue.

5. *Modules des courbes planes d'un système continu.* — M. B. Segre s'est ensuite proposé de voir si, pour $p \geqq 11$, il

(1) *Sui moduli...* (*loc. cit.*).

(2) G. Castelnuovo, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* (*Memorie R. Accad. Torino*, 2e série, t. 42, 1892).

pouvait exister des systèmes continus de courbes planes à modules généraux (1). La totalité des courbes planes irréductibles d'ordre n ayant un certain nombre de points de multiplicités déterminées (distincts ou infiniment voisins), constitue un ou plusieurs systèmes algébriques irréductibles. Soit Ξ un de ces systèmes irréductibles complet, c'est-à-dire ne faisant pas partie d'un système plus ample de courbes ayant les mêmes caractères. Tout système algébrique irréductible de mêmes caractères, contenant une courbe Γ de Ξ, appartient entièrement à ce système. Il en est de même, en particulier, du système linéaire $|\Gamma|$.

Considérons un système Ξ tel que le système linéaire $|\Gamma|$ général compris dans ce système ait ses points-base multiples en position générale dans le plan; désignons par Σ un tel système Ξ. Postulons que le système linéaire $|\Gamma|$ soit régulier (2). Sous cette hypothèse, M. B. Segre démontre que si les courbes du système ont le genre $p \geqq 11$, elles sont à modules particuliers. En d'autres termes, si une courbe plane irréductible de genre $p \geqq 11$ est à modules généraux, le groupe de ses points multiples occupe une position particulière dans le plan et le système linéaire auquel elle appartient est surabondant.

Reprenons maintenant le système Ξ et supposons que le système linéaire général de ce système puisse être surabondant. M. Segre démontre que si les courbes de Ξ ont le genre $p \geqq 36$, les courbes de ce système qui sont à modules généraux sont isolées, c'est-à-dire n'appartiennent pas à des systèmes linéaires infinis.

Enfin, M. Segre montre que le théorème établi sur les systèmes Σ est vrai, pour $p > 36$, indépendamment du postulat invoqué plus haut.

La démonstration de ces différents théorèmes se fait par l'absurde. En supposant qu'on ait affaire à des systèmes de courbes à modules généraux, la discussion arithmétique des formules liant les dimensions, genre, ordre et les multiplicités des points

---

(1) *Sui moduli...* (*loc. cit.*).

(2) En d'autres termes, admettons que si un système linéaire est surabondant, il existe quelque relation entre ses points-base. Il est probable que cette propriété peut être démontrée, mais la démonstration semble être assez difficile. M. Terracini a observé que la propriété est certainement vraie si le système linéaire possède un point-base double (isolé).

singuliers des courbes envisagées, permet de démontrer que la somme des trois multiplicités les plus élevées surpasse l'ordre de la courbe. En appliquant successivement des transformations quadratiques, on pourrait donc abaisser autant qu'on le voudrait l'ordre des courbes, ce qui est absurde. Notons que dans le cas des systèmes Ξ, il se présente ici la même difficulté que dans la démonstration du théorème de Nœther sur la décomposition des transformations birationnelles en produits de transformations quadratiques, lorsque les trois points de multiplicités les plus élevés ne déterminent pas des coniques irréductibles. Le procédé utilisé par M. Segre est analogue à celui dont s'est servi M. Chisini [1] pour démontrer le théorème de Nœther.

Ajoutons que les raisonnements de M. Segre n'excluent pas que la limite inférieure 36 pour le genre des courbes ne puisse être abaissée.

6. *Modules des courbes polygonales.* — L'ordre ν d'une série linéaire de dimension un, appartenant à une courbe algébrique de genre p, à modules généraux, est au moins égal à $\frac{1}{2}p+1$. Les courbes qui possèdent une série linéaire g^1_ν d'ordre ν inférieur à $\frac{1}{2}p+1$ sont donc à modules particuliers, elles sont appelées *courbes ν-gonales*. Les courbes 1-gonales sont les courbes rationnelles, les courbes 2-gonales sont les courbes hyperelliptiques.

Plusieurs géomètres ont étudié les courbes polygonales, entre autres M. Amodeo [2]. M. Severi a récemment obtenu un résultat important sur ces courbes [3]. Sur la courbe C de genre $p\,(p>1)$ contenant une série linéaire g^1_ν d'ordre $\nu<\frac{1}{2}p+1$, considérons la série double $g_{2\nu}$ de cette série g^1_ν, c'est-à-dire la série linéaire

(1) O. Chisini, *Sul teoreme di Noether relativo alla decompossibilità di una trasformazione cremoniana in un prodotto di trasformazioni quadratiche* (*Atti Soc. Nat. e Matem. di Modena*, 1921-1922). *Voir* aussi Enriques-Chisini, *Lezioni...* (*loc. cit.*).

(2) F. Amodeo, *Coup d'œil sur les courbes au point de vue de la gonalite C. R. du 2e Congrès des Math.*, Paris, 1900). *Voir* aussi V. Snyder, *On a speecial algebraic curve having a net of minimum adjoint curves* (*Butl. of th Amer. Math. Society*, 1907).

(3) F. Severi, *Sul teorema di esistenza di Riemann* (*Rend. Circ. matem. di Palermo*, 1922).

(complète) comprenant les groupes de 2ν points formés de deux groupes de g^1_ν. Soit i l'indice de spécialité de cette série, c'est-à-dire le nombre de groupes linéairement indépendants de la série canonique g^{p-1}_{2p-2} contenant un groupe de la série $g_{2\nu}$. La courbe ν-gonale C dépend de $3p - 3 - i$ modules.

Pour $\nu = 2$, on retrouve le nombre connu, $2p - 1$, des modules d'une courbe hyperelliptique. Pour $\nu = 3$, on trouve que les courbes trigonales dépendent de $2p + 1$ modules.

Le résultat de M. Severi a été précisé par M. B. Segre (¹) qui a montré qu'une courbe ν-gonale dépend de $2p + 2\nu - 5$ modules.

M. Segre s'est ensuite occupé de la détermination des courbes planes ν-gonales d'ordre minimum. Il a ainsi été conduit à un complément intéressant du théorème d'existence de Riemann, qu'on peut énoncer de la manière suivante : Il existe une fonction algébrique irréductible $y(x)$, à ν branches ($\nu \geqq 3$), de genre p ($p \geqq 0$) ayant $2\nu + 2p - 2$ points de ramification arbitrairement choisis, les transpositions relatives à ces points étant également arbitrairement choisies sous la condition de former un groupe transitif et d'avoir l'identité pour produit.

Si les points de ramification occupent une position générale et si l'on a $\nu \leqq p + 2$, l'équation algébrique liant x et y a, par rapport aux deux variables, un degré au moins égal à $\frac{1}{2}(p + \nu + 2)$. Ce degré peut toujours prendre toute valeur au moins égale à ce nombre.

Sous forme géométrique, ce théorème s'énonce : Étant données $2\nu + 2p - 2$ droites d'un faisceau, pour qu'il existe au moins une courbe plane irréductible de genre p et d'ordre $n + \nu$, passant n fois par le centre du faisceau, tangente aux droites données en des points simples, il faut et il suffit qu'on ait

$$2n \geqq p - \nu + 2.$$

M. B. Segre obtient également le résultat suivant : Une courbe algébrique de genre p, contenant une série g^1_ν, d'ordre $\nu \leqq p + 2$,

(¹) B. SEGRE, *Sui moduli delle curve poligonali e sopra uno complemento al teorema di esistenza di Riemann* (*Math. Annalen.*, t. 100, 1928).

est birationnellement équivalente à une courbe plane d'ordre

$$\frac{1}{2}(p+\nu)+\varepsilon+1,$$

ayant un point multiple d'ordre

$$\frac{1}{2}(p-\nu)+\varepsilon+1,$$

ε étant égal à o ou à $\frac{1}{2}$ suivant que $p+\nu$ est pair ou impair. Si les éléments unis de la série g_ν^1 ont des rapports anharmoniques généraux, cette courbe a l'ordre minimum et est normale.

Ce théorème, pour $\nu=4$, $p=3$, donne une courbe d'ordre cinq. Ce fait s'explique, comme M. Severi l'a remarqué, en observant que les 12 tangentes menées par un point à une quartique plane ne sont pas arbitraires ou, en d'autres termes, qu'on ne peut trouver une quartique plane tangente à 12 droites arbitrairement choisies dans un faisceau. Une remarque analogue a lieu dans l'hyperespace. Les $2\nu+2p-2$ hyperplans d'un faisceau, tangents à une courbe de genre p et d'ordre $\nu<p+2$, ne sont pas arbitraires.

Liége, le 3 avril 1931.

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. LV, septembre 1931.)

92590. — Imp. Gauthier-Villars et Cie, 55, Quai des Grands-Augustins, 55, Paris.