

# ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5<sup>e</sup> série, t. XVII, n<sup>o</sup> 3.  
Séance du 7 mars 1931, pp. 315-317.

---

## GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE.

### Une propriété caractéristique des surfaces de courbure projective — 2,

par LUCIEN GODEAUX, correspondant de la Classe.

Soient  $(x)$  une surface,  $\Phi$  la quadrique de Lie relative au point  $x$  de cette surface,  $r$  une droite issue de  $x$  et non située dans le plan tangent en ce point à la surface  $(x)$ ,  $s$  la conjuguée de la droite  $r$  par rapport à la quadrique  $\Phi$ . M. Cech <sup>(1)</sup> a démontré que s'il existe une infinité de points de la droite  $s$  tels que le plan tangent en un de ces points à la surface qu'il engendre passe par la droite  $r$ , les droites  $r$ ,  $s$  sont les directrices de Wilczynski de la surface  $(x)$  et celle-ci a la courbure projective — 2. Nous nous proposons de démontrer que *Les surfaces telles que les plans focaux de la seconde directrice de Wilczynski (directrice appartenant au plan tangent) passent par les foyers de la première directrice de Wilczynski, sont les surfaces de courbure projective — 2.*

1. Soit  $(x)$  une surface rapportée à ses asymptotiques  $u$ ,  $v$ . Les coordonnées projectives normales de Wilczynski  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  des points de cette surface satisfont au système complètement intégrable <sup>(2)</sup>

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1x = 0,$$

$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2x = 0.$$

---

<sup>(1)</sup> FUBINI et CECH, *Geometria proiettiva differenziale*, t. I, pp. 150-151 (Bologne, 1926).

<sup>(2)</sup> Pour les notations utilisées, voir nos travaux parus antérieurement dans les *Bull. de l'Acad. roy. de Belg.* depuis décembre 1927.



La première directrice de Wilczynski  $r$  de la surface, au point  $x$ , a pour équations locales

$$\frac{z_2}{(\log b)^{01}} = \frac{z_3}{(\log a)^{10}} = \frac{z_4}{-2}, \quad (r)$$

et la seconde,  $s$ ,

$$2z_1 + z_2(\log a)^{10} + z_3(\log b)^{01} = 0, \quad z_4 = 0. \quad (s)$$

Nous avons fait voir <sup>(1)</sup> que les foyers de la droite  $r$  sont donnés par

$$\left. \begin{aligned} [16ab - (\log ab)^{11} - (\log a)^{10}(\log b)^{01} \pm \varphi] x \\ + 2x^{10}(\log b)^{01} + 2x^{01}(\log a)^{10} - 4x^{11}. \end{aligned} \right\}$$

Les plans focaux de la droite  $s$  ont pour équations locales

$$\left. \begin{aligned} 4z_1 + 2z_2(\log a)^{10} + 2z_3(\log b)^{01} \\ + z_4[(\log ab)^{11} + (\log a)^{10}(\log b)^{01} \pm \varphi] = 0, \end{aligned} \right\}$$

où l'on a posé

$$\varphi = \sqrt{(h_1 - k_1)^2 + \alpha\beta}.$$

Appelons  $p, q$  les foyers de la droite  $r$  obtenus en prenant le signe  $+$  et le signe  $-$  devant  $\varphi$ ;  $\rho, \sigma$  les plans focaux de la droite  $s$  obtenus dans les mêmes conditions.

2. Écrivons que le plan  $\rho$  passe par  $p$ ; nous obtenons la condition

$$h_1 + k_1 = 0 \quad (1)$$

et réciproquement, si cette relation est vérifiée, le plan  $\rho$  passe par  $p$  et le plan  $\sigma$  par  $q$ .

Si nous écrivons que le plan  $\rho$  passe par  $q$  et le plan  $\sigma$  par  $p$ , nous obtenons

$$h_1 + k_1 - \varphi = 0, \quad h_1 + k_1 + \varphi = 0,$$

c'est-à-dire la relation (1) et, en outre,  $\varphi = 0$ . On sait que,

(1) Sur les congruences formées par les directrices de Wilczynski d'une surface. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1928, pp. 335-355.)



dans ces conditions, les droites  $r$  et  $s$  sont les tangentes asymptotiques de certaines surfaces.

On voit que la condition (1) implique, dans tous les cas, le passage des plans focaux de  $s$  par les foyers de  $r$ .

### 3. Considérons les droites

$$\frac{z_2}{\xi} = \frac{z_3}{\eta} = \frac{z_4}{2} \quad (2)$$

et

$$2z_1 - \eta z_2 - \xi z_3 = 0, \quad z_4 = 0, \quad (3)$$

conjuguées par rapport à la quadrique de Lie

$$z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2ab z_4^2 = 0$$

relative au point  $x$  de la surface ( $x$ ). Tout point de la droite (3) peut être représenté par

$$\xi x + 2x^{01} + \lambda(\eta x + x^{10}).$$

Si l'on exprime que le plan tangent en ce point à la surface qu'il engendre passe par la droite (2), on obtient les relations

$$\lambda^{10} = -\eta \lambda - 2b \lambda^2, \quad \lambda^{01} = 2a + \xi \lambda.$$

Les conditions d'intégrabilité donnent

$$\begin{aligned} \eta &= -(\log a)^{10}, & \xi &= -(\log b)^{01}, \\ h_1 + k_1 &= 0. \end{aligned}$$

Les deux premières montrent que les droites (2), (3) sont bien les directrices de Wilczynski; la troisième montre que les surfaces considérées par M. Cech sont bien celles que nous avons rencontrées plus haut. Le théorème énoncé au début de cette note est donc démontré.

Liège, le 4 mars 1931.