LES

TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES

DU PLAN

Par M. Lucien GODEAUX,

Professeur à l'Université de Liége.

INTRODUCTION.

La théorie des transformations birationnelles fut créée par Cremona en 1863-1865. Avant lui, les seules de ces transformations connues étaient l'homographie et la transformation quadratique (inversion). Dans un Mémoire resté inédit, de Jonquières avait également considéré, vers 1864, certaines transformations auxquelles son nom est resté attaché. Une transformation birationnelle d'ordre n du plan fait correspondre aux droites des courbes d'ordre n formant un réseau homaloïdal, c'est-à-dire un réseau dont deux courbes variables se rencontrent en un seul point variable. La connaissance de ce réseau implique celle de la transformation. Il est aisé de construire un réseau homaloïdal d'ordre quelconque, il suffit de soumettre le réseau homaloïdal le plus simple, celui des droites du plan, à un certain nombre de transformations quadratiques successives. C'est d'ailleurs cette remarque qui a conduit Cremona au concept général de transformation birationnelle. La réciproque est vraie et, par suite, toute transformation birationnelle est le produit d'un nombre fini de transformations quadratiques. Ce théorème, énoncé vers la même époque par Clifford, Nœther et Rosanes, et démontré dans les cas étendus par ces deux derniers, ne fut complètement établi que par Castelnuovo (1901).

Le concept de transformation birationnelle a conduit les Géomètres à construire une géométrie, la géométrie algébrique, dont le groupe principal est le groupe des transformations birationnelles. Dans cette géométrie, deux figures sont considérées comme identiques lorsque l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle. En géométrie algébrique plane, on s'est proposé de déterminer, dans chaque famille de figures birationnellement identiques, une figure-type possédant des caractères projectifs déterminés. Les figures étudiées sont les systèmes linéaires de courbes planes de genre donné, les transformations birationnelles cycliques et les groupes continus finis de transformations birationnelles.

Dans cet opuscule, après avoir rappelé la composition des points singuliers des courbes planes au moyen de la notion de points multiples infiniment voisins, nous exposons la théorie des transformations birationnelles et la décomposition de celles-ci en produits de transformations quadratiques. Nous exposerons ensuite les résultats obtenus en géométrie algébrique plane.

I. — Points singuliers des courbes algébriques planes.

1. Points singuliers. — Si $f(x, y)$ est un polynome entier et rationnel de degré n en x, y, et si, en un point $P(x=x_0, y=y_0)$ de la courbe algébrique C d'équation cartésienne

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

les dérivées partielles premières de $f(x, y)$ sont identiquement nulles, le point P est appelé *singulier* pour la courbe C. D'une manière plus précise, si toutes les dérivées partielles de $f(x, y)$ jusqu'à l'ordre

$$s - 1 \, (s < n)$$

sont identiquement nulles pour $x = x_0$, $y = y_0$, l'une au moins des dérivées partielles d'ordre s n'étant pas nulle, le point singulier P est dit *multiple d'ordre* s ou *s-uple* pour la courbe C. En P, la courbe C possède s tangentes (distinctes ou non), c'est-à-dire qu'il existe s droites rencontrant la courbe C en $s+1$ points au moins, confondus en P.

2. Branches d'une courbe algébrique. — Supposons que la courbe C ait un point s-uple à l'origine O et n'y soit pas tangente à l'axe Ox. Considérons x et y comme des variables complexes. Pour x, de module suffisamment petit, l'équation (1) admet exactement s racines y_1, y_2, ..., y_s voisines de zéro. Si, dans le plan complexe (x), nous faisons décrire au point x un contour fermé très petit entourant l'origine, les s racines $y_1, y_2, \ldots, y_s$ subissent une substitution se décomposant en un certain nombre r de cycles d'ordres respectifs α, α_1, ..., α_{r-1}. On a

$$\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{r-1} = s.$$

Soit $(y_1, y_2, \ldots, y_\alpha)$ un de ces cycles. Si nous posons $x = t^\alpha$, et que nous fassions décrire à la variable complexe t, de module suffisamment petit, un tour complet autour de l'origine, la variable x fait α tours complets autour de l'origine, et les quantités y_1, y_2, ..., y_α se reproduisent. On a donc, pour chacune d'elles, un développement en série

$$y = at + bt^2 + ct^3 + \ldots,$$

convergent pour t suffisamment petit en module. Si θ est une racine primitive d'ordre α de l'unité, les développements de $y_1, y_2, \ldots, y_\alpha$ se déduiront de l'un d'entre eux en remplaçant t par $t\theta$, $t\theta^2$, ...

On peut également écrire

$$y = ax^{\frac{1}{\alpha}} + bx^{\frac{2}{\alpha}} + \ldots + gx + \ldots.$$

Quelques-uns des coefficients a, b, ... peuvent être nuls, mais l'ensemble des exposants de $x^{\frac{1}{\alpha}}$ dans les termes du développement ne peut avoir que l'unité comme facteur commun avec α. Les axes étant par hypothèse en position générique, le premier coefficient non nul sera précisément g, et nous écrirons le développement sous la forme

$$(2) \quad y = a_0 x + a_1 x^{\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha}} + a_2 x^{\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{\alpha}} + \ldots + a_m x^{\frac{\alpha+\alpha'+\ldots+\alpha^{(m)}}{\alpha}} + \ldots.$$

L'ensemble des α développements ainsi obtenus a été appelé *système circulaire* par Puiseux [46] auquel est due la théorie précédente, et *cycle* par Halphen [29]. Nous lui donnerons le nom de *branche*, généralement adopté aujourd'hui.

Les nombres α, α' sont l'*ordre* et la *classe* de la branche (2).

Halphen a montré que ces nombres étaient corrélatifs. Les branches d'ordre $\alpha = 1$ sont appelées *branches linéaires*, celles d'ordre $\alpha > 1$, *branches superlinéaires*.

La droite

$$y = a_0 x$$

est la *tangente* à la branche (2) au point O ; elle rencontre la branche en $\alpha + \alpha'$ points confondus en O. Une droite distincte de la tangente et passant par O rencontre la branche (2) en α points confondus en O.

3. **Branches linéaires.** — Supposons que nous ayons en O deux branches linéaires.

$$y_1(x) = a_{10}x + a_{11}x^2 + a_{12}x^3 + \ldots,$$
$$y_2(x) = a_{20}x + a_{21}x^2 + a_{22}x^3 + \ldots.$$

Si l'on a $a_{10} = a_{20}$, $a_{11} \neq a_{21}$, les deux branches ont même tangente en O. Dans l'hypothèse où aucune autre branche de la courbe C en O n'ait la même tangente, cette droite rencontre la courbe C en $s + 2$ points confondus en O. En introduisant une notion féconde due à Nœther [42], nous dirons que la courbe C a un point double O_1 infiniment voisin de O sur la tangente considérée.

Si l'on a $a_{10} = a_{20}$, $a_{11} = a_{21}$, $a_{12} \neq a_{22}$, les deux branches sont osculatrices en O. La parabole

$$y = a_{10}x + a_{11}x^2$$

rencontre la courbe C en $s + 4$ points confondus en O. Nous dirons que la courbe C possède deux points doubles O_1, O_2 infiniment voisins successifs de O sur cette parabole.

Plus généralement, si la courbe C possède, en O, σ branches linéaires ayant entre elles un contact d'ordre ν, nous dirons que la courbe C a, sur ces branches, une suite de ν points $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$ multiples d'ordre σ, infiniment voisins successifs de O. Si, de plus, σ' de ces branches ont en O un contact d'ordre $\nu + \nu'$, nous dirons que la courbe C possède, sur ces branches, une suite de ν' points $O_{\nu+1}, \ldots, O_{\nu+\nu'}$, multiples d'ordre σ', infiniment voisins successifs de O_ν. Et ainsi de suite.

4. **Branches superlinéaires.** — Considérons la branche super-

linéaire

$$(1)\quad y(x) = a_0 x + a_1 x^{\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha}} + a_2 x^{\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{\alpha}} + \ldots + a_m x^{\frac{\alpha+\alpha'+\ldots+\alpha^{(m)}}{\alpha}} + \ldots,$$

et cherchons le nombre de ses intersections confondues en O avec une branche de courbe

$$y_1(x) = b_0 x + b_1 x^{\frac{\beta+\beta'}{\beta}} + b_2 x^{\frac{\beta+\beta'+\beta''}{\beta}} + \ldots + b_\mu x^{\frac{\beta+\beta'+\ldots+\beta^{(\mu)}}{\beta}} + \ldots.$$

Si nous supposons $a_0 \neq b_0$, on a $\alpha\beta$ points communs.

Si $a_0 = b_0$, $a_1 \neq b_1$, soient α_h le plus grand commun diviseur de α, α'; β_k celui de β, β',

$$\begin{array}{llll} \alpha' = q\alpha + \alpha_1, & \alpha = q_1\alpha_1 + \alpha_2, & \ldots, & \alpha_{h-1} = q_h\alpha_h, \\ \beta' = q'\beta + \beta_1, & \beta = q'_1\beta_1 + \beta_2, & \ldots, & \beta_{k-1} = q'_k\beta_k, \end{array}$$

les opérations faites pour trouver α_h, β_k. Supposons que β, β' aient été choisis de manière à avoir

$$q = q', \qquad q_1 = q'_1, \qquad \ldots, \qquad q_i = q'_i, \qquad q_{i+1} > q'_{i+1}.$$

Il est facile de voir que le nombre des intersections des deux branches absorbées en O est

$$(q+1)\alpha\beta + q_1\alpha_1\beta_1 + \ldots + q_i\alpha_i\beta_i + q'_{i+1}\alpha_{i+1}\beta_{i+1} + \alpha_{i+1}\beta_{i+2}.$$

Tout se passe donc comme s'il s'agissait de deux courbes ayant en commun $q+1$ points respectivement α-uples et β-uples; q_1 points respectivement α_1-uples, β_1-uples, ...; q'_{i+1} points respectivement α_{i+1}-uples, β_{i+1}-uples; enfin un point respectivement α_{i+1}-uple, β_{i+2}-uple. Cela étant, nous dirons que la branche (1) possède un point O multiple d'ordre α et qu'il y a q points α-uples infiniment voisins successifs de O, puis q_1 points α_1-uples infiniment voisins successifs, ..., puis enfin q_h points α_h-uples infiniment voisins successifs.

Le raisonnement se poursuit en supposant $a_1 = b_1$, $a_2 \neq b_2$ et $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta}$, et en cherchant les intersections des deux branches confondues en O. On est ainsi conduit à supposer que la branche (1) possède une nouvelle suite de points multiples infiniment voisins successifs aux premiers, les nombres et multiplicités de ces points étant obtenus en cherchant le plus grand commun diviseur α'_l de α_h et α''. On reprendra ensuite le même raisonnement, et l'on sera conduit à chercher le plus grand commun diviseur de α'_i et de α'', et ainsi de suite. Le procédé s'arrêtera lorsque l'on trouvera l'unité comme plus grand commun diviseur (ce qui doit nécessairement se produire d'après une remarque faite plus haut). Pour une étude complète de cette question, nous renvoyons le lecteur aux *Leçons* d'Enriques-Chisini, t. II.

5. **Composition d'un point multiple.** — L'analyse des diverses branches de la courbe C au point s-uple O conduira à distinguer des suites de points multiples infiniment voisins successifs du point O. La multiplicité d'un de ces points pour la courbe C sera, par définition, la somme des multiplicités de ce point pour les diverses branches de la courbe. Nous avons ainsi ρ points $O_1, O_2, \ldots, O_\rho$ infiniment voisins de O dans des directions différentes, les tangentes distinctes à la courbe C en O étant $OO_1, OO_2, \ldots, OO_\rho$. Les multiplicités $s_1, s_2, \ldots, s_\rho$ de ces points ont pour somme au plus s. Il y a ensuite des points $O_{11}, O_{12}, \ldots$, de multiplicités $s_{11}, s_{12}, \ldots$, infiniment voisins de O_1, des points $O_{21}, O_{22} \ldots$, de multiplicité s_{21}, $s_{22}, \ldots$, infiniment voisins de O_2, etc. On a d'ailleurs

$$s_{11} + s_{12} + \ldots \leqq s_1, \qquad s_{21} + s_{22} + \ldots \leqq s_2, \qquad \ldots.$$

Un point s-uple sera dit ordinaire lorsque toutes les tangentes sont distinctes ($\rho = s$). La courbe a, en ce point, s branches linéaires non tangentes ($s_1 = s_2 = \ldots = s_\rho = 1$).

6. **Intersection de deux courbes algébriques.** — La notion de points multiples infiniment voisins permet de calculer aisément le nombre des intersections de deux courbes algébriques absorbées en un point multiple commun à ces courbes. Ce calcul se fait en tenant compte des points multiples infiniment voisins communs aux deux courbes comme si ces points étaient les points multiples ordinaires sans tangentes communes aux deux courbes. On le démontre en analysant les intersections des diverses branches des deux courbes au point multiple commun considéré.

II. — Systèmes linéaires de courbes planes.

7. **Systèmes algébriques.** — Une condition, imposée à une courbe algébrique plane C, est dite *algébrique* lorsqu'elle se traduit par une

ou plusieurs relations algébriques entre les coefficients de l'équation cartésienne de la courbe. Le nombre de ces relations indépendantes est la dimension de la condition.

L'ensemble des courbes C, d'ordre n, satisfaisant à des conditions algébriques irréductibles données, constitue un *système algébrique* de courbes C et est représenté par $\{C\}$.

Si, dans l'équation cartésienne de la courbe générique C du système $\{C\}$, r coefficients restent arbitraires, on dit que $\{C\}$ est de *dimension* r. Par r points du plan, il passe en général des courbes C en nombre fini; ce nombre est l'*indice* du système $\{C\}$.

Le nombre de points communs à deux courbes quelconques du système $\{C\}$ et variables avec ces courbes est le *degré* du système.

8. **Systèmes linéaires.** — Les systèmes algébriques d'indice 1 sont appelés *systèmes linéaires* et sont représentés par $|C|$. En particulier, un système linéaire de dimension $r = 1$ est appelé *faisceau*, un système linéaire de dimension $r = 2$ est appelé *réseau*.

Si x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées projectives du plan, on peut toujours trouver, et d'une infinité de manières, $r+1$ courbes C_0, C_1, ..., C_r, respectivement d'équations

$$f_0(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad f_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_r(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

telle que toute courbe du système soit représentée par

$$\lambda_0 f_0(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 f_1(x_1, x_2, x_3) + \ldots + \lambda_r f_r(x_1, x_2, x_3) = 0. \tag{1}$$

Cette relation n'est vérifiée identiquement pour aucun système de valeurs non toutes nulles des λ. Les courbes C_0, C_1, ..., C_r sont dites linéairement indépendantes et permettent de définir le système $|C|$.

9. **Points-base.** — On appelle *point-base* d'un système algébrique $\{C\}$ un point commun à toutes les courbes du système. Les points-base d'un système algébrique sont en général en nombre fini, mais peuvent être en nombre ∞^1; dans ce dernier cas il existe une courbe algébrique fixe, lieu de ces points, appartenant à toutes les courbes du système.

L'ensemble des points-base d'un système algébrique est appelé *groupe-base* du système, les multiplicités de ces points pour les courbes du système étant supposées déterminées.

L'ensemble des courbes C, d'ordre n, ayant des multiplicités déterminées en des points donnés, constitue un système linéaire $|C|$ appelé *système complet* vis-à-vis du groupe-base donné. Il peut arriver qu'en un des points-base, la multiplicité effective des courbes C soit supérieure à la multiplicité assignée; pour cette raison, cette dernière est appelée *multiplicité virtuelle*.

Si l'on calcule la dimension du système $|C|$ comme si toutes les conditions imposées aux courbes C par le passage aux points-base étaient indépendantes, on trouve un nombre ρ, appelé dimension virtuelle de $|C|$, au plus égal à la dimension effective r. Si $r = \rho$, le système $|C|$ est dit *régulier;* si $r > \rho$, le système $|C|$ est *surabondant* et $\omega = r - \rho$ est la *surabondance* du système (6). L'étude des systèmes surabondants a été l'objet de travaux récents de Gambier [25] et Légaut [35].

10. Points multiples des courbes d'un système linéaire. — Bertini [2] a démontré que *la courbe générique d'un système linéaire ne peut avoir de points multiples* (*variables*) *en dehors des points-base.*

La démonstration de Bertini est basée sur des identités entre les dérivées partielles dont l'égalité à zéro exprime la condition d'existence d'un point multiple. Severi [53] a donné plus tard une démonstration basée sur le lemme suivant : « Si une courbe plane C, variable dans un système continu, possède un point s-uple variable, les courbes du système infiniment voisines de C ont en ce point la multiplicité $s - 1$ au moins. »

11. Systèmes linéaires réductibles. — Un système linéaire $|C|$ est *réductible* lorsque la courbe C générique se décompose en plusieurs courbes. Dans le cas opposé, le système est *irréductible*.

On peut imaginer des systèmes linéaires réductibles en supposant que :

1° Toutes les courbes du système ont une partie fixe commune;

2° Les courbes du système sont formées de m courbes variables dans un faisceau;

Ou en combinant ces deux hypothèses.

Il est aisé de traduire la première hypothèse en équation. Dans la seconde hypothèse, il suffit de considérer $r + 1$ formes de même degré $\varphi_0(\mu_1, \mu_2)$, $\varphi_1(\mu_1, \mu_2)$, ..., $\varphi_r(\mu_1, \mu_2)$ par rapport à deux formes $\mu_1(x_1, x_2, x_3)$, $\mu_2(x_1, x_2, x_3)$ ayant même degré ; l'équation

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_r\varphi_r = 0$$

représente, lorsque les λ varient, un système linéaire dont les courbes sont formées chacune de m courbes du faisceau

$$\lambda'_1\mu_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda'_2\mu_2(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

m étant le degré des formes φ par rapport à μ_1, μ_2.

Si un système linéaire $|C|$ pouvait être réductible sans rentrer dans les hypothèses envisagées, sa courbe générique posséderait des points multiples variables. On a donc ce théorème de Bertini [2] : *Si toutes les courbes d'un système linéaire se décomposent et n'ont d'autre part aucune partie fixe commune, ces courbes sont formées de courbes variables dans un même faisceau.*

12. **Courbes fondamentales d'un système linéaire.** — Envisageons un système linéaire, irréductible et complet, ∞^r, $|C|$. Une courbe F, qui n'est rencontrée en aucun point variable par les courbes du système $|C|$, est appelée *courbe fondamentale*. Les courbes fondamentales d'un système linéaire de dimension $r > 1$ sont nécessairement isolées ; elles sont complètement déterminées par leurs singularités aux points-base du système.

Les courbes de $|C|$ passant par un point d'une courbe fondamentale F se décomposent en cette courbe F et en des courbes variables C_1 formant un système linéaire $|C_1|$, de dimension $r - 1$, nécessairement complet.

L'étude des courbes fondamentales d'un système linéaire irréductible quelconque a été faite par Castelnuovo [6], qui démontre notamment, en s'appuyant sur la théorie des séries de groupes de points appartenant à une courbe algébrique, que le genre d'une courbe fondamentale est au plus égal à la surabondance du système.

13. **Système jacobien.** — Soient $|C|$ un système linéaire irréductible ∞^2 au moins, et Σ un réseau formé de courbes de ce système.

Parmi les ∞^2 courbes de ce réseau Σ, il y en a ∞^1 qui ont un point double variable. Le lieu de ces ∞^1 points doubles est une courbe algébrique C_j, la *jacobienne* du réseau Σ. Si n est l'ordre des courbes C, la courbe C_j est d'ordre $3(n-1)$. En un point-base s-uple à tangentes variables des courbes C, la courbe C_j a la multiplicité $3s-1$.

Les courbes du réseau Σ passant par un point de la jacobienne sont tangentes en ce point.

Les jacobiennes des divers réseaux formés au moyen des courbes du système $|C|$ appartiennent à un système linéaire $|C_j|$, le *jacobien* du système $|C|$.

Les courbes fondamentales du système $|C|$ sont des composantes fixes du système jacobien $|C_j|$.

14. **Réseaux homaloïdaux.** — Un réseau irréductible de courbes planes de degré 1 est appelé *réseau homaloïdal*. Les courbes d'un tel réseau sont évidemment rationnelles et forment un système complet.

Soit n l'ordre des courbes C d'un réseau homaloïdal $|C|$. Soient s_1, s_2, ..., s_ν les multiplicités des points-base (distincts ou infiniment voisins). En exprimant que le réseau est de degré 1 et ses courbes rationnelles, on trouve

$$s_1^2+s_2^2+\ldots+s_\nu^2=n^2-1,$$
$$s_1+s_2+\ldots+s_\nu=3(n-1).$$

De ces relations, on déduit tout d'abord qu'un réseau homaloïdal est régulier. De plus, si s_1, s_2, s_3 sont les plus grands des nombres s, on a

$$s_1+s_2+s_3>n.$$

Pour le faire voir, observons qu'il y aura au moins un des nombres s, soit s_1, supérieur ou égal à

$$\rho=\frac{s_1^2+\ldots+s_\nu^2}{s_1+\ldots+s_\nu}=\frac{n^2-1}{3(n-1)}=\frac{n+1}{3}.$$

Posons $s_1=\rho+\delta\,(\delta\geqq 0)$. Un des nombres s restants, soit s_2, sera au moins égal à

$$\rho'=\frac{s_2^2+\ldots+s_\nu^2}{s_2+\ldots+s_\nu}=\rho-\delta\frac{s_1}{s_2+\ldots+s_\nu}.$$

Posons $s_2=\rho'+\delta'\,(\delta'\geqq 0)$. Un des nombres s restants, soit s_3, sera au moins égal à

$$\rho'' = \frac{s_3^2 + \ldots + s_\nu^2}{s_3 + \ldots + s_\nu} = \rho' - \delta' \frac{s_3 + \ldots + s_\nu}{s_2}.$$

Mais on a $s_1 \leqq n - 1$, $s_2 \leqq n - 1$ et, par suite,

$$s_2 + \ldots + s_\nu \geqq 2(n-1), \qquad s_3 + \ldots + s_\nu \geqq n - 1.$$

Par suite,

$$\rho' \geqq \rho - \frac{1}{2}\delta, \qquad s_3 \geqq \rho'' \geqq \rho' - \delta', \qquad s_2 + s_3 \geqq 2\rho',$$

$$s_1 + s_2 + s_3 \geqq \rho + 2\rho' \geqq 3\rho \qquad \text{ou} \qquad n + 1.$$

Une courbe d'un réseau homaloïdal ne peut acquérir de point double sans dégénérer. D'autre part, les courbes du réseau $|C|$ passant par un point P de la jacobienne C_j doivent se toucher en ce point. Comme le réseau est de degré 1, les courbes C passant par P doivent dégénérer en une partie fixe F, qui est une courbe fondamentale, et une partie C_1, variable dans un faisceau. Il en résulte que la jacobienne C_j d'un réseau homaloïdal $|C|$ se compose des courbes fondamentales de ce réseau.

La courbe fondamentale F et les courbes C_1 sont de plus rationnelles.

III. — Transformations birationnelles.

15. **Transformations rationnelles.** — Soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées projectives d'un plan ϖ; x'_1, x'_2, x'_3 celles d'un plan ϖ'. Considérons les formules

$$(1) \qquad x'_1 : x'_2 : x'_3 = f_1(x_1, x_2, x_3) : f_2(x_1, x_2, x_3) : f_3(x_1, x_2, x_3),$$

où f_1, f_2, f_3 sont des formes de même degré n, sans facteur commun. Ces formules font correspondre à un point $X(x_1, x_2, x_3)$ du plan ϖ, un point $X'(x'_1, x'_2, x'_3)$ du plan ϖ'.

D'après les hypothèses faites, le point X′ ne peut rester fixe lorsque le point X varie dans le plan ω. Considérons le réseau de courbes $|C|$ représenté par

$$(2) \qquad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0.$$

Si ce réseau est réductible, chacune de ses courbes est formée d'un certain nombre de courbes d'un même faisceau $|\Gamma|$. Aux points X d'une courbe Γ, correspond un seul point X′, et lorsque cette courbe varie dans le faisceau $|\Gamma|$, le point X′ décrit une courbe Γ'. A l'ensemble des points X du plan ϖ, correspondent donc, par les formules (1), les points X′ d'une courbe Γ' de ϖ'.

Si le réseau $|C|$ est irréductible, le point X′ peut occuper une position quelconque dans le plan ϖ'. C'est dans cette dernière hypothèse que nous nous placerons désormais.

Observons que, moyennant les formules (1), les points de la droite

$$\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \lambda_3 x'_3 = 0$$

du plan ω' correspondent aux points de la courbe (2) du réseau $|C|$. Aux droites de ω' correspondent donc les courbes du réseau $|C|$ et réciproquement. De plus, aux droites du plan ϖ' passant par un point X′ correspondent des courbes C formant un faisceau, et réciproquement. Le point X′ considéré correspond aux points-base de ce faisceau de courbes C qui ne sont pas communs à toutes les courbes du réseau.

Les formules (1) établissent donc une *transformation rationnelle* $(1, m)$ des points du plan ϖ' en ceux du plan ϖ, m étant le degré du réseau $|C|$. On voit de plus que cette transformation est obtenue en établissant une projectivité entre les droites du plan ϖ' et les courbes du réseau $|C|$.

16. **Éléments fondamentaux.** — Les formules (1) font correspondre un point X′ de ϖ' bien déterminé à tout point X de ϖ, sauf si ce point X coïncide avec un point-base du réseau $|C|$.

Soit O un point-base s-uple du réseau $|C|$. Supposons tout d'abord que les courbes C aient, en O, $s' (\leqq s)$ tangentes variables. Considérons une droite d passant par O et distincte des tangentes fixes aux courbes C en ce point. A un point X de d correspond un point X′ bien déterminé de ϖ', et aux droites passant par X′ correspondent les courbes C passant par le point X. Lorsque le point X tend vers O sur d, le faisceau formé par les courbes C passant par X a pour limite le faisceau des courbes C tangentes en O à la droite d. Aux courbes de ce faisceau correspondent les droites de ϖ' passant par un point X'_1 bien déterminé. Ce point X'_1 correspond au point infiniment voisin de O sur d. Lorsque la droite d tourne autour de O, le point X'_1 décrit une courbe Ω' rationnelle. Cette courbe Ω' correspond au domaine du premier ordre de O; elle est d'ordre s'.

Le point O est appelé *point fondamental* de la transformation, et la courbe Ω', *courbe fondamentale* correspondante.

Supposons maintenant que les courbes C aient toutes leurs tangentes fixes au point-base O. Le raisonnement précédent tombe en défaut. Lorsque le point X tend vers O sur la droite d, le faisceau des courbes C passant par X a pour limite un faisceau de courbes C ayant un point $(s+1)$-uple avec une tangente variable en O. A ce faisceau correspond dans le plan ϖ' un faisceau de droites de sommet O′. Les points infiniment voisins de O et de O′ se correspondent projectivement puisqu'il y a une correspondance projective entre les droites passant par O′ et les courbes C ayant en O la multiplicité $s+1$. Les points O et O′ sont encore appelés « points fondamentaux ».

17. Transformation birationnelle. — Lorsque le réseau $|C|$ est homaloïdal $(m=1)$, la transformation envisagée est rationnelle dans les deux sens, elle est *birationnelle*. Une telle transformation s'obtient donc en rapportant projectivement les droites d'un plan aux courbes d'un réseau homaloïdal.

Aux droites du plan ϖ correspondent, dans le plan ϖ', des courbes C′ formant également un réseau homaloïdal $|C'|$. Si l'on envisage une droite d de ϖ et la courbe C′ qui lui correspond dans ϖ', une droite d' de ϖ' et la courbe C correspondante dans ϖ, les points communs à d et à C correspondent un par un aux points communs à d' et à C′. Les courbes C et C′ sont donc du même ordre n, appelé ordre de la transformation.

Les transformations birationnelles sont également appelées transformations crémoniennes, du nom du géomètre italien Cremona qui les a le premier étudiées d'une manière générale [14].

18. Transformations quadratiques. — La plus simple des transmations birationnelles est la transformation homographique $(n=1)$, elle est dépourvue d'éléments fondamentaux. Toute transformation birationnelle jouissant de cette dernière propriété est d'ailleurs une homographie.

Les transformations quadratiques, d'ordre $n=2$, jouent un rôle important dans la théorie des transformations birationnelles. Elles possèdent, dans chaque plan, trois points fondamentaux distincts ou infiniment voisins, et les réseaux homaloïdaux sont formés de coniques.

Il y a trois types de transformations quadratiques qui, par un choix convenable des triangles de référence, peuvent être représentées par les formules suivantes :

$$(a)\qquad \begin{cases} x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2, \\ x_1 : x_2 : x_3 = x'_2 x'_3 : x'_3 x'_1 : x'_1 x'_2. \end{cases}$$

Les réseaux homaloïdaux sont formés de coniques passant par trois points distincts (les sommets des triangles de référence). Il y a, dans chaque plan, trois points et trois droites fondamentaux, sommets et côtés des triangles de référence :

$$(b)\qquad \begin{cases} x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_2 x_3 : x_1^2 : x_1 x_2, \\ x_1 : x_2 : x_3 = x'_2 x'_3 : x'^2_3 : x'_1 x'_2. \end{cases}$$

Les réseaux homaloïdaux sont formés de coniques passant par deux points distincts et tangentes à une droite fixe en un de ces points. Il y a dans chaque plan trois points fondamentaux dont deux sont infiniment voisins et situés sur la tangente commune aux coniques. Il y a deux droites fondamentales : droite joignant les points fondamentaux distincts et tangente commune aux coniques :

$$(c)\qquad \begin{cases} x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1^2 + x_2 x_3 : x_1 x_2 : x_2^2, \\ x_1 : x_2 : x_3 = x'_2 x'_3 : x'^2_3 : x'_1 x'_3 - x_2^2. \end{cases}$$

Les réseaux homaloïdaux sont formés de coniques osculatrices en un point. Il y a dans chaque plan trois points fondamentaux infiniment voisins successifs et une seule droite fondamentale : la tangente commune aux coniques.

19. **Transformations à points fondamentaux ordinaires.** — Reprenons la transformation birationnelle considérée plus haut ; nous supposerons tout d'abord que les courbes C, C' ont, aux points fondamentaux respectivement des plans ϖ, ϖ', des tangentes variables. Dans ces conditions, nous dirons que les points fondamentaux sont ordinaires.

Désignons par $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$ les points-base du réseau $|C|$, par $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ les multiplicités respectives de ces points pour les courbes C. Nous avons

$$(1)\qquad s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_\nu^2 = n^2 - 1,$$

$$(2)\qquad s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu = 3(n-1).$$

Soient de même $O'_1, O'_2, \ldots, O'_{\nu'}$ les points-base du réseau $|C|$, $s'_1, s'_2, \ldots, s'_{\nu'}$ leurs multiplicités pour les courbes C'. Nous avons

$$s'^2_1 + s'^2_2 + \ldots + s'^2_{\nu'} = n^2 - 1, \tag{3}$$

$$s'_1 + s'_2 + \ldots + s'_{\nu'} = 3(n-1). \tag{4}$$

Dans le plan ϖ', il existe ν courbes fondamentales $\Omega'_1, \Omega'_2, \ldots, \Omega'_\nu$, d'ordres respectifs $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$. Aux droites de ϖ passant par le point O_i correspondent des courbes C' formant un faisceau; ces courbes comprennent Ω'_i comme partie fixe et une partie mobile C'_i variable dans un faisceau. Les courbes C'_i rencontrent la courbe Ω'_i en un point variable et, par suite, Ω'_i fait partie de la jacobienne J' de $|C'|$. La jacobienne J' étant d'ordre $3(n-1)$, elle se compose, par (4), des courbes $\Omega'_1, \Omega'_2, \ldots, \Omega'_\nu$ comptées chacune une fois.

Soit O' un point commun aux courbes Ω'_i, Ω'_k. Si ce point n'est pas fondamental, il lui correspond un point infiniment voisin de O_i, si on le considère comme appartenant à Ω'_i, et un point infiniment voisin de O_k, si on le considère comme appartenant à Ω'_k. Cette conclusion est absurde, donc le point est fondamental.

Soit maintenant O'' un point multiple d'une courbe fondamentale Ω'_i. Si ce point n'était pas fondamental, il lui correspondrait autant de points distincts infiniment voisins de O_i que la courbe Ω'_i passe de fois par O'', ce qui est absurde.

Les points communs à deux courbes fondamentales et les points multiples des courbes fondamentales sont des points fondamentaux.

Les points fondamentaux étant ordinaires, les courbes fondamentales ont, par suite, en ces points, des tangentes distinctes.

Soit α'_{ik} la multiplicité de la courbe Ω'_i au point O'_k. A une droite d' passant par O'_k correspond une courbe C dégénérée en une courbe fondamentale Ω_k, d'ordre s'_k, correspondant à O'_k, et en une courbe C_k, d'ordre $n - s'_k$, variable dans un faisceau. La droite d' rencontrant la courbe Ω'_i en $s_i - \alpha'_{ik}$ points en dehors de O'_k, le point O_i est multiple d'ordre $s_i - \alpha'_{ik}$ pour les courbes C_k. L'ensemble des courbes Ω_k, C_k doit passer s_i fois par O_i, donc la multiplicité α_{ki} de O_i pour Ω_k est égale à $\alpha_{ki} = s_i - (s_i - \alpha'_{ik}) = \alpha'_{ik}$. *La multiplicité d'un point fondamental O' de ϖ' pour la courbe fondamentale Ω' est égale à la multiplicité du point fondamental O de ϖ, correspondant à la* *courbe Ω, pour la courbe fondamentale Ω', correspondant au point O'.*

Un faisceau de courbes d'ordre n possède $3(n-1)^2$ courbes ayant un point double, et si ce faisceau possède un point-base s-uple, ce nombre est diminué de $(s-1)(3s+1)$ unités. Appliquons ce résultat à un faisceau de courbes C. Il y a, dans ce faisceau, ν' courbes comprenant chacune une des ν' courbes fondamentales du plan ϖ et possédant par suite un point double. En tenant compte des multiplicités des ν points-base, on a

$$(s_1-1)(3s_1+1)+(s_2-1)(3s_2+1)+\ldots+(s_\nu-1)(3s_\nu+1)+\nu'=3(n-1)^2.$$

En tenant compte des formules (1) et (2), on en déduit $\nu=\nu'$. *Le nombre des points fondamentaux est le même dans les deux plans.*

Ce théorème et cette démonstration sont dus à Cremona [14]. Clebsch [12] a donné une démonstration basée sur le compte des multiplicités des courbes fondamentales aux points fondamentaux. Une autre démonstration, due à Pannelli [44], est basée sur l'évaluation du genre de la jacobienne J de $|C|$.

20. Propriétés des nombres α_{ik}. — Deux courbes fondamentales Ω_i, Ω_k du plan ϖ ne pouvant se rencontrer en dehors des points fondamentaux et ayant, d'autre part, des tangentes distinctes en ces points, on a

$$\alpha_{i1}\alpha_{k1}+\alpha_{i2}\alpha_{k2}+\ldots+\alpha_{i\nu}\alpha_{k\nu}=s'_i\,s'_k. \tag{5}$$

Ces courbes sont rationnelles, et l'on a pour Ω_i, par exemple,

$$\alpha_{i1}(\alpha_{i1}-1)+\alpha_{i2}(\alpha_{i2}-1)+\ldots+\alpha_{i\nu}(\alpha_{i\nu}-1)=(s'_i-1)(s'_i-2). \tag{6}$$

Les nombres $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{i\nu}$ expriment les multiplicités du point fondamental O'_i pour les courbes fondamentales $\Omega'_1, \Omega'_2, \ldots, \Omega'_\nu$ du plan ϖ'. Comme ces courbes forment la jacobienne J de $|C'|$, et que cette courbe J' a la multiplicité $3s'-1$ en un point-base s'-uple de $|C'|$, on a

$$\alpha_{i1}+\alpha_{i2}+\ldots+\alpha_{i\nu}=3s'_i-1.$$

En comparant cette relation à la formule (6), on a

$$\alpha_{i1}^2+\alpha_{i2}^2+\ldots+\alpha_{i\nu}^2=s'^2_i+1. \tag{7}$$

Formons le carré du déterminant

$$\Delta = |\alpha_{ik}|.$$

En utilisant les formules (5) et (7), on obtient

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 + s_1'^2 & s_1' s_2' & \dots & s_1' s_\nu' \\ s_1' s_2' & 1 + s_2'^2 & \dots & s_2' s_\nu' \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ s_1' s_\nu' & \dots\dots & \dots & 1 + s_\nu'^2 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire en utilisant les formules (3) et (4),

$$\Delta^2 = 1 + s_1'^2 + s_2'^2 + \dots + s_\nu'^2 = n^2.$$

La valeur absolue du déterminant Δ est donc égale à n, résultat dû à Clebsch [12].

21. Distribution des points fondamentaux de même multiplicité dans les deux plans. — Considérons, dans le plan ϖ, le groupe des points fondamentaux d'une multiplicité déterminée et le groupe des courbes fondamentales d'un ordre déterminé. Pour fixer les idées, supposons que ce groupe de points soit formé par $O_1, O_2, \dots, O_k$, et ce groupe de courbes par $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_l$. On suppose donc

$$s_1 = s_2 = \dots = s_k, \quad s_1' = s_2' = \dots = s_l'.$$

De plus, nous supposerons $k > 1$. Formons le tableau

$$\begin{matrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \dots, & \alpha_{1k}, \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \dots, & \alpha_{2k}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ \alpha_{l1}, & \alpha_{l2}, & \dots, & \alpha_{lk}, \end{matrix}$$

dont les lignes horizontales donnent les multiplicités des points O_1, $O_2, \dots, O_k$ pour les courbes $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_l$ et les colonnes, les multiplicités des points $O_1', O_2', \dots, O_l'$ pour les courbes fondamentales $\Omega_1', \Omega_2', \dots, \Omega_k'$ dans le plan ϖ'.

Dans la formation du réseau $|C|$, les points $O_1, O_2, \dots, O_k$ jouent un rôle symétrique, et de même dans la formation de la jacobienne J de ce réseau, les courbes $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_l$ jouent également un rôle symétrique. Il en résulte que les différentes lignes (ou colonnes) du tableau précédent doivent être formées des mêmes nombres et présenter les mêmes permutations de ces nombres, chacune de ces permutations le même nombre de fois. Par suite, le nombre de permutations se présentant dans les lignes horizontales du tableau doit être un diviseur de l, et de même le nombre de permutations se présentant dans les colonnes doit être un diviseur de k. Ceci n'est possible que dans deux cas : ou bien tous les nombres α sont égaux ou bien, dans chaque ligne et dans chaque colonne, tous les nombres α sont égaux entre eux, sauf l'un d'eux qui est différent des autres. Dans ce dernier cas, on a $k = l$.

Si le premier cas se présente, reprenons le même raisonnement en considérant un second groupe de l' courbes fondamentales de même ordre du plan ϖ. Ou bien on aura $k = l'$, ou bien les multiplicités des points $O_1, O_2, \ldots, O_k$ pour les courbes considérées sont toutes égales. Dans ce dernier cas, on considérera un troisième groupe de courbes fondamentales de même ordre, et ainsi de suite. On trouvera certainement un groupes de k courbes fondamentales de même ordre dans le plan ϖ, sans quoi, puisque $k > 1$, le déterminant Δ aurait au moins deux colonnes identiques et serait nul, ce qui est impossible.

En continuant le raisonnement précédent par la considération des divers groupes de points fondamentaux du plan ϖ de même multiplicité, et en observant que le nombre des points fondamentaux est aussi celui des courbes fondamentales, on parvient au résultat suivant : *s'il y a, dans le plan* ϖ, r_1 *points fondamentaux simples,* r_2 *points fondamentaux doubles,* $\ldots$, r_{n-1} *points fondamentaux* $(n-1)$*-uples pour les courbes* C, *et dans le plan* ϖ', r'_1 *points fondamentaux simples,* r'_2 *doubles,* $\ldots$, r'_{n-1} $(n-1)$*-uples pour les courbes* C', *les nombres* $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ *sont égaux aux nombres* $r'_1, r'_2, \ldots, r'_{n-1}$, *à l'ordre près* [14].

22. Construction de réseaux homaloïdaux. — La recherche des différents types de transformations birationnelles revient à la construction des réseaux homaloïdaux, c'est-à-dire à la résolution des équations (1) et (2). Cependant, toutes les solutions arithmétiques de ces équations ne donnent pas des réseaux homaloïdaux. C'est ainsi que la solution

$$s_1 = 6, \quad s_2 = 4, \quad s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = s_7 = 3, \quad s_8 = s_9 = 1, \quad \nu = 9, \quad n = 10$$

ne donne pas de réseau homaloïdal.

On trouve d'assez nombreux types de réseaux homaloïdaux dans les premiers mémoires de Cremona [14], de Cayley [10], de Roberts [47]. Des recherches systématiques ont été entreprises par de Jonquières [16], S. Kantor [33], Ruffini [49], Larice [34], et, tout récemment, par Montesano [39]. Ce dernier indique un procédé pour déterminer si une solution arithmétique des équations (1) et (2) correspond à un réseau homaloïdal, procédé basé sur la décomposition des transformations birationnelles en produits de transformations quadratiques. Sans entrer dans le détail de ces recherches, bornons-nous à quelques indications.

Supposons

$$s_1 \geqq s_2 \geqq s_3 \geqq \ldots \geqq s_\nu.$$

On voit que si l'on a $s_1 > \frac{1}{2}n$, on a nécessairement $s_2 < \frac{1}{2}n$; si n est pair et si $s_1 = \frac{1}{2}n$, ou doit avoir $s_4 < \frac{1}{2}n$, car autrement les coniques passant par les quatre points de multiplicité $\frac{1}{2}n$ ne rencontreraient pas les courbes du réseau en des points variables.

Supposons $s_1 < \frac{1}{2}n$, et soit $s_1 = s_2 = \ldots = s_k > s_{k+1}$. On a

$$s_1 > \frac{1}{3}(n+1), \qquad k s_1 \leqq 3(n-1);$$

donc

$$k < 9\frac{n-1}{n+1}.$$

On a donc $k \leqq 8$, et l'on ne peut avoir $k = 8$ que pour $n \geqq 17$.

Si nous désignons par $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ les nombres de points fondamentaux respectivement simples, doubles, ..., $(n-1)$-uples pour les courbes du réseau, les équations (1) et (2) s'écrivent

$$r_1 + 4r_2 + \ldots + (n-1)^2 r_{n-1} = n^2 - 1,$$
$$r_1 + 2r_2 + \ldots + (n-1)\, r_{n-1} = 3(n-1).$$

Quelques solutions de ces équations sont

$$r_1 = 2(n-1), \quad r_2 = \ldots = r_{n-2} = 0, \quad r_{n-1} = 1 \qquad \text{(réseau de Jonquières)},$$
$$n = 2\lambda + 1, (\lambda > 2), \quad r_\lambda = 4, \quad r_2 = \lambda, \quad r_1 = r_3 = \ldots = 0$$
$$\text{(réseau de Ruffini)},$$

$$\left.\begin{array}{l} n = 2, \quad r_1 = 3, \\ n = 5, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 6, \quad r_3 = \ldots = r_4 = 0, \\ n = 8, \quad r_1 = r_2 = 0, \quad r_3 = 7, \quad r_4 = \ldots = r_7 = 0, \\ n = 17, \quad r_1 = \ldots = r_5 = 0, \quad r_6 = 8, \\ \qquad r_7 = \ldots = r_{16} = 0. \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{(réseaux n'ayant} \\ \text{que des points-base} \\ \text{de même multiplicité).}\end{array}$$

23. **Remarque.** — La connaissance d'un seul des réseaux $|C|$, $|C'|$ implique la connaissance de la transformation birationnelle, et par suite, celle du second réseau. Dans ce qui précède, nous avons supposé les points fondamentaux ordinaires dans les deux plans, mais on peut construire des transformations birationnelles ayant des points fondamentaux ordinaires dans un seul des plans.

Considérons, par exemple, le réseau $|C|$ homaloïdal

$$\begin{aligned}\lambda_1 x_2 x_3 (b_3 x_3 + b_1 x_1)(c_1 x_1 + c_2 x_2) + \lambda_2 x_3 x_1 (c_1 x_1 + c_2 x_2)(a_2 x_2 + a_3 x_3)\\ + \lambda_3 x_1 x_2 (a_2 x_2 + a_3 x_3)(b_3 x_3 + b_1 x_1) = 0.\end{aligned}$$

Il a trois points-base doubles aux sommets du triangle de référence et trois points-base simples aux sommets du triangle formé par les droites

$$a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \quad b_3 x_3 + b_1 x_1 = 0, \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0,$$

que nous supposons non concourantes. Les tangentes des courbes C en ces points sont variables.

En rapportant projectivement les courbes de $|C|$ aux droites d'un plan ϖ', on obtient une transformation birationnelle qui peut être représentée par les formules

$$\begin{aligned}\rho x_1 &= (b_1 c_2 x'_2 x'_3 - a_2 c_2 x'_3 x'_1 + a_2 b_3 x'_1 x'_2)\\ &\quad\times(b_3 c_1 x'_2 x'_3 + a_3 c_2 x'_3 x'_1 - a_3 b_3 x'_1 x'_2),\\ \rho x_2 &= (b_3 c_1 x'_2 x'_3 + a_3 c_2 x'_3 x'_1 - a_3 b_3 x'_1 x'_2)\\ &\quad\times(-b_1 c_1 x'_2 x'_3 + a_2 c_1 x'_3 x'_1 + a_3 b_1 x'_1 x'_2),\\ \rho x_3 &= (-b_1 c_1 x'_2 x'_3 + a_2 c_1 x'_3 x'_1 + a_3 b_1 x'_1 x'_2)\\ &\quad\times(b_1 c_2 x'_2 x'_3 - a_2 c_2 x'_3 x'_1 + a_2 b_3 x'_1 x'_2).\end{aligned}$$

Le réseau $|C'|$ est, par conséquent, formé par les quartiques passant doublement par les sommets du triangle fondamental et y ayant une tangente fixe; il y a donc, dans ϖ', trois points fondamentaux doubles ayant chacun un point fondamental simple infiniment voisin. Le fait que les points fondamentaux du plan ϖ' ne sont pas des points ordinaires provient de la composition de la jacobienne J du réseau $|C|$. Cette courbe est formée de six droites, côtés des triangles formés par les points fondamentaux doubles et par les points fondamentaux simples, les trois côtés du premier de ces triangles étant comptés chacun deux fois. La jacobienne J a précisément pour équation

$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 (a_2 x_2 + a_3 x_3)(b_3 x_3 + b_1 x_1)(c_1 x_1 + c_2 x_2) = 0.$$

La courbe fondamentale correspondant au point $x'_1 = x'_2 = 0$ est formée des droites $x_3 = 0$ et $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$, et la courbe fondamentale correspondant au point fondamental simple infiniment voisin du point $x'_1 = x'_2 = 0$ est la droite $x_3 = 0$.

On remarquera que le réseau $|C|$ n'est pas le réseau homaloïdal le plus général formé de courbes du quatrième ordre ayant trois points-base doubles et trois points-base simples.

24. Transformations à points fondamentaux quelconques. — Sans établir une théorie générale des transformations birationnelles à points fondamentaux non ordinaires, il convient cependant d'entrer dans quelques détails en vue de la démonstration du théorème sur la décomposition d'une transformation quelconque en produit de transformations quadratiques.

Supposons en premier lieu que le réseau $|C|$ possède un point-base s-uple O auquel soit infiniment voisin un point-base s_1-uple O_1 (sans autre point-base infiniment voisin successif à O_1). Supposons, de plus, $s_1 < s$. Nous avons vu qu'aux points infiniment voisins de O correspondent, dans ϖ', les points d'une courbe fondamentale Ω' d'ordre $s - s_1$.

Considérons une courbe algébrique Γ passant par les points O, O_1. A un point X de Γ correspond un point X' de ϖ' et au faisceau de droites de sommet X' correspond le faisceau des courbes C passant par X. Lorsque le point X se déplace sur Γ et tend vers O_1, ce faisceau de courbes C a pour limite le faisceau des courbes C osculatrices à Γ en O. Les droites correspondantes de ϖ' forment un faisceau de sommet X'_1. Lorsque la courbe Γ varie en restant tangente à la droite OO_1, le point X'_1 décrit une courbe fondamentale Ω'_1, rationnelle et d'ordre s_1.

A une droite d passant par O correspond une courbe C' comprenant comme partie fixe les courbes Ω' et Ω'_1 et une partie C'_1, variable dans un faisceau et d'ordre $n - s$, puisque d est rencontrée par les courbes C en $n - s$ points variables. En particulier, si la droite d passe par O_1, la courbe C'_1 correspondante se décompose en la courbe Ω'_1 et en une courbe d'ordre $n - s - s_1$ rencontrée en un point variable par les courbes C'. Les courbes C'_1 rencontrent la courbe Ω' en un point variable, mais elles ne rencontrent la courbe Ω'_1 qu'en des points fixes. La courbe fondamentale Ω' intervient une fois dans la jacobienne J′ du réseau $|C'|$, la courbe Ω'_1 intervient deux fois.

Ces propriétés peuvent se généraliser : si l'on suppose qu'au point s-uple O, les courbes C ont une suite de points $O_1, O_2, \ldots, O_r$ respectivement s_1-uple, s_2-uple, ..., s_r-uple infiniment voisins, sans autre singularité, et si, de plus, on a $s > s_1 > s_2 > \ldots > s_r$, il y aura $r+1$ courbes fondamentales $\Omega', \Omega'_1, \Omega'_2, \ldots, \Omega'_r$ dans le plan ϖ'; les ordres de ces courbes seront respectivement $s, s_1, s_2, \ldots, s_r$, et la courbe Ω'_i interviendra $i+1$ fois dans la composition de la jacobienne J′ du réseau $|C'|$. Ces propriétés s'établissent aisément lorsque les courbes C ont en O des branches linéaires; il en est autrement lorsqu'il y a des branches superlinéaires, et les propriétés peuvent alors devoir être modifiées.

Supposons maintenant que les courbes C aient en O un point s-uple à tangentes fixes. Dans ce cas, les courbes C tangentes en O à une droite d distincte des tangentes fixes, acquièrent en O un point $(s+1)$-uple; elles dégénèrent donc en une courbe fixe Ω ayant en O la multiplicité $s - s_1$, et en une courbe C_1, variable avec d, ayant en O la multiplicité $s_1 + 1$, avec s_1 tangentes fixes. Les courbes C_1 forment un faisceau, et il leur correspond, dans ϖ', un faisceau de droites de sommet O′. Les courbes C′ ont en O′ des tangentes fixes, car autrement toutes les droites du plan ϖ devraient passer par O, ce qui est absurde. Les points infiniment voisins de O et de O′ sont en correspondance biunivoque, et aux droites passant par O correspondent, dans ϖ', des courbes C′ dégénérées en une courbe fixe Ω', ayant la multiplicité $s' - s'_1$ en O′ et des courbes C'_1, formant un faisceau et ayant en O′ la multiplicité $s'_1 + 1$ et s'_1 tangentes fixes. Les courbes C′ ont, en O, la multiplicité s'.

L'étude des faisceaux de cubiques planes à point de rebroussement conduit à une transformation birationnelle présentant des points fondamentaux de cette espèce et où l'on a $s \neq s'$ [26].

25. **Transformations de Jonquières.** — Nous aurons l'occasion de rencontrer plus loin les transformations de Jonquières. Pour la transformation la plus générale de ce type, le groupe-base du réseau $|C|$ comprend un point O $(n-1)$-uple et $2(n-1)$ points $O_1, O_2, \ldots, O_{2(n-1)}$ simples. La jacobienne est formée des $2(n-1)$ droites OO_1, $OO_2, \ldots, OO_{2(n-1)}$ et d'une courbe Ω, d'ordre $n-1$, passant $n-2$

fois par O et une fois par $O_1, O_2, \ldots, O_{2(n-1)}$. Le réseau $|C'|$ présente exactement la même structure, et nous désignerons ses points-base et ses courbes fondamentales par les mêmes lettres accentuées. Observons qu'à une droite passant par O correspond une droite passant par O'.

Si un des points-base simples, O_n, de $|C|$ est infiniment voisin de O, c'est-à-dire si les courbes C ont une tangente fixe OO_n en O, la courbe Ω se décompose en cette tangente et en une courbe Ω_1 d'ordre $n-2$. La droite OO_n intervient deux fois dans la jacobienne J de $|C|$.

Si, de plus, il y a un second point-base O_1 de $|C|$ infiniment voisin de O successif à O_n, c'est-à-dire si les branches des courbes C tangentes en O à OO_n sont de plus osculatrices, la courbe Ω_1 se décompose en la droite OO_n et en une courbe Ω_2 d'ordre $n-3$. La droite OO_n intervient trois fois dans la jacobienne J.

Dans chaque cas le réseau $|C'|$ possède les mêmes propriétés que $|C|$.

On peut, en particulier, considérer les transformations de Jonquières où les réseaux $|C|$, $|C'|$ sont formés de courbes d'ordre n ayant un point $(n-1)$-uple à tangentes fixes (distinctes) et $n-1$ points simples comme points-base, et celles où les réseaux $|C|$, $|C'|$ ont un point-base $(n-1)$-uple à tangentes fixes, les $n-1$ branches étant osculatrices en ce point.

26. Transformée d'une courbe algébrique. — Considérons une transformation birationnelle T faisant passer des points du plan ϖ à ceux du plan ϖ'. Nous désignerons par T^{-1} la transformation inverse, qui fait passer des points de ϖ' à ceux de ϖ. Conservons, pour les multiplicités des points fondamentaux, les notations adoptées précédemment et considérons, dans le plan ϖ, une courbe algébrique Γ, d'ordre m, passant σ_i fois par un point fondamental d'ordre s_i. Le lieu des points de ϖ' correspondant à ceux de Γ est une courbe d'ordre nm comprenant σ_1 fois la courbe Ω'_1, σ_2 fois la courbe $\Omega'_2, \ldots,$ σ_ν fois la courbe Ω'_ν, et une courbe Γ' que nous considérerons comme la transformée de Γ pour T. L'ordre de cette courbe Γ' est

$$m' = mn - s_1\sigma_1 - s_2\sigma_2 - \ldots - s_\nu\sigma_\nu.$$

La multiplicité d'un point fondamental du plan ϖ' pour Γ' est égale au nombre des points d'intersection de Γ avec la courbe fondamentale correspondante en dehors des points fondamentaux. La courbe Γ est la transformée de Γ' par la transformation T^{-1}.

Si la courbe Γ possède, en dehors des points fondamentaux et des courbes fondamentales de ϖ, une singularité déterminée, la courbe Γ' possède, au point correspondant, la même singularité.

Dans la suite, nous supposerons en général les plans ϖ, ϖ' superposés.

IV. — Composition des transformations birationnelles.

27. Décomposition des singularités des courbes algébriques. — Au moyen d'un nombre fini de transformations quadratiques, Nœther [42] a montré que l'on peut transformer une courbe algébrique plane quelconque en une courbe n'ayant que des points multiples à tangentes distinctes.

Considérons une courbe C ayant un point multiple d'ordre s en O, auquel sont infiniment voisins, dans diverses directions, des points O_1, O_2, ..., O_r, respectivement s_1-uple, s_2-uple, ..., s_r-uple. On a

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_r \leqq s.$$

Effectuons une transformation quadratique T ayant pour points fondamentaux O et deux points quelconques A_1, A_2. Si O', A'_1, A'_2 sont les points fondamentaux correspondant aux droites A_1A_2, A_2O, A_1O, la courbe C aura pour transformée une courbe C' ayant en O' un point multiple d'ordre m à tangentes distinctes, en A'_1 et en A'_2 des points $(m-s)$-uples à tangentes distinctes, m étant l'ordre de la courbe C. Aux points O_1, O_2, ..., O_r correspondent des points O'_1, O'_2, ..., O'_r respectivement s_1-uple, s_2-uple, ..., s_r-uple, situés sur la droite fondamentale $A'_1A'_2$. La courbe C' a l'ordre $2m-s$.

Si l'on effectue une seconde transformation quadratique ayant pour points fondamentaux O'_1 et deux autres points quelconques, la courbe C' se transforme en une courbe C'' d'ordre $2(2m-s)-s_1$ et sur la droite fondamentale correspondant à O'_1, cette courbe C'' aura, en dehors des points fondamentaux, des points multiples correspondant aux points multiples de C', infiniment voisins de O'_1. Et ainsi de suite.

Par des transformations quadratiques, on fait apparaître les points multiples infiniment voisins successifs du point O sur la courbe C, tout en faisant naître des points multiples à tangentes distinctes (aux points fondamentaux O', A'_1, A'_2, ...). On peut d'ailleurs établir, en suivant Hamburger [31], et Nœther [43], que ces points multiples infiniment voisins successifs sont bien ceux qui ont été introduits au moyen des développements de Puiseux.

Considérons une branche de courbe d'ordre α et de classe α', représentée par le développement de Puiseux,

$$y = a_0 x + a_1 x^{\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha}} + a_2 x^{\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{\alpha}} + \ldots,$$

ou, en prenant pour axe des x la tangente $y = a_0 x$ à cette branche, par

$$(1)\qquad y = a_1 x^{\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha}} + a_2 x^{\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{\alpha}} + \ldots.$$

Effectuons la substitution

$$y = x y_1,$$

c'est-à-dire la transformation quadratique représentée en coordonnées homogènes par

$$x : y : z = x_1 z_1 : x_1 y_1 : z_1^2.$$

Aux points infiniment voisins de O, cette transformation fait correspondre les points de la droite $x_1 = 0$ et au point infiniment voisin de O situé sur Ox, le point $x_1 = y_1 = 0$. La transformée de la branche (1) peut s'écrire ($x = x_1$),

$$(2)\qquad y_1 = a_1 x^{\frac{\alpha'}{\alpha}} + a_2 x^{\frac{\alpha'+\alpha''}{\alpha}} + \ldots.$$

Si l'on a $\alpha' > \alpha$ et précisément $\alpha' = q\alpha + \alpha_1$ ($\alpha_1 < \alpha$), on pourra écrire (2) sous la forme

$$y_1 = a_1 x^{\frac{\alpha+(q-1)\alpha+\alpha_1}{\alpha}} + \ldots,$$

et l'on aura une branche d'ordre α et de classe $(q-1)\alpha + \alpha_1$.

Si l'on a $\alpha' < \alpha$, en posant $x = t^\alpha$, nous écrirons

$$x = t^\alpha, \qquad y_1 = a_1 t^{\alpha'} + \alpha_2 t^{\alpha'+\alpha''} + \ldots.$$

Ce développement représente une branche d'ordre α' et de classe $\alpha - \alpha'$, ayant pour tangente à l'origine l'axe des y_1.

Dans les deux cas, on peut appliquer les raisonnements faits dans l'étude des développements de Puiseux, et l'on trouvera la même composition pour la branche, à partir du premier point multiple infiniment voisin. On observera qu'en même temps se trouve établi que le nombre de transformations quadratiques à effectuer suivant le procédé de Nœther est fini.

28. **Composition d'une transformation birationnelle.** — Envisageons deux transformations birationnelles T, T_1 du plan en lui-même. Aux droites du plan, T fait correspondre les courbes d'un réseau homaloïdal $|C|$ et à ces courbes C, T_1 fait correspondre des courbes C_1 formant un réseau homaloïdal $|C_1|$. En rapportant projectivement les courbes C_1 aux droites du plan, on définit une transformation birationnelle T' que l'on appelle *produit* des transformations T, T_1. Nous écrirons

$$T' = T_1 T.$$

On en déduit

$$T = T_1^{-1} T'.$$

Cela étant, nous allons établir que : *Une transformation birationnelle peut se décomposer en un produit d'un nombre fini de transformations quadratiques.*

Ce théorème a été énoncé vers la même époque par Clifford [10], Nœther [41] et Rosanes [48], et démontré dans le cas général par ces deux derniers. Cette démonstration est basée sur le fait que dans un réseau homaloïdal, il y a toujours trois points-base dont la somme des multiplicités pour les courbes du réseau est inférieure à l'ordre de celles-ci.

Envisageons une transformation birationnelle T faisant correspondre aux droites du plan les courbes d'un réseau homaloïdal $|C|$ d'ordre n. Soient O_1, O_2, O_3 trois points-base de $|C|$ de multiplicités s_1, s_2, s_3 telles que $s_1 + s_2 + s_3 > n$.

Si les points O_1, O_2, O_3 sont distincts, en rapportant projectivement les coniques passant par ces points aux droites du plan, on définit une transformation quadratique Q qui transforme $|C|$ en un réseau homaloïdal $|C_1|$ d'ordre $2n - s_1 - s_2 - s_3 < n$. Si T_1 est la transformation qui fait correspondre les courbes C_1 aux droites du plan, on a

$$T = QT_1.$$

En répétant ce raisonnement sur le réseau $|C_1|$ et ainsi de suite, on parviendra finalement au théorème énoncé.

Le raisonnement précédent est encore valable si l'un des points O_2 ou O_3 est infiniment voisin de O_1, mais il tombe en défaut si les points O_2, O_3 sont infiniment voisins de O_1 dans des directions différentes. Nœther a indiqué la voie à suivre dans ce cas pour établir le théorème. Lorsque les points O_2, O_3 sont infiniment voisins successifs de O_1, Segre [52] a remarqué que si ces points appartiennent à une branche superlinéaire d'origine O_1, il se peut que les coniques passant par O_1, O_2, O_3 soient nécessairement dégénérées. Dans ce cas, le raisonnement précédent tombe en défaut. Castelnuovo [8] a montré comment on pouvait établir le théorème de manière à éviter cette objection de Segre par l'utilisation de transformations de Jonquières (qui sont elles-mêmes des produits de transformations quadratiques). Récemment Chisini [11] est parvenu à établir le théorème en n'utilisant que des transformations quadratiques; nous exposerons cette démonstration.

29. **Lemme**. — Si O est un point-base de plus grande multiplicité s d'un réseau homaloïdal $|C|$, auquel sont infiniment voisins dans des directions différentes ou non des points $O_1, O_2, \ldots, O_r$ respectivement s_1-uple, s_2-uple, ..., s_r-uple, et si l'on a

$$s + s_1 + s_2 + \ldots + s_r > n,$$

il existe un autre point-base O_{r+1}, non infiniment voisin de O, dont la multiplicité s_{r+1} satisfait à la relation

$$2s_{r+1} > n - s.$$

Si l'on désigne par $s_{r+2}, \ldots, s_\nu$ les multiplicités des autres points de base, et si l'on suppose

$$s_{r+1} \geqq s_{r+2} \geqq \ldots \geqq s_\nu,$$

comme on doit avoir

$$s_{r+1}^2 + s_{r+2}^2 + \ldots + s_\nu^2 = n^2 - 1 - s^2 - s_1^2 - \ldots - s_r^2,$$

$$s_{r+1} + s_{r+2} + \ldots + s_\nu = 3(n-1) - s - s_1 - \ldots - s_r,$$

on a nécessairement

$$s_{r+1} > \frac{n^2 - 1 - s^2 - s_1^2 - \ldots - s_r^2}{3(n-1) - s - s_1 - \ldots - s_r}.$$

Mais on a

$$s + s_1 + \ldots + s_r > n, \qquad s_1 + s_2 + \ldots + s_r \leqq s,$$
$$s_1 \leqq n - s, \qquad s_2 \leqq n - s, \quad \ldots, \quad s_r \leqq n - s;$$

donc

$$s_{r+1} > \frac{n^2 - 1 - s^2 - (n-s)s}{3(n-1) - n} > \frac{n(n-s)}{2n} \quad \text{ou} \quad \frac{n-s}{2}.$$

30. Démonstration du théorème de Nœther. — Reprenons la transformation birationnelle T et le réseau $|C|$ d'ordre n. Pour démontrer le théorème de Nœther, il suffira de faire voir que, par des transformations quadratiques, on peut transformer $|C|$ en un autre réseau homaloïdal d'ordre inférieur à n et en se plaçant dans le cas où deux des trois points de multiplicités maxima sont infiniment voisins du troisième dans des directions différentes, ou se succèdent sur une branche superlinéaire. Nous avons alors, pour le réseau $|C|$, un point-base O, de multiplicité maximum s, auquel sont infiniment voisins, dans des directions différentes ou non, k points $O_1, O_2, \ldots, O_k$ respectivement multiples d'ordres $s_1, s_2, \ldots, s_k$, tels que $s_i > \frac{n-s}{2}$.

Effectuons une première transformation quadratique Q_1 en rapportant projectivement les coniques passant par O, tangentes à la droite OO_1, et passant par un troisième point quelconque A, aux droites du plan. La transformation Q_1^{-1} fait correspondre aux droites du plan des coniques passant par un point O′, tangentes en ce point à une droite fixe (c'est-à-dire passant par un point O'_1 infiniment voisin de O′ sur cette droite) et passant par un point A′. Au réseau $|C|$ correspond un réseau homaloïdal $|C_1|$, d'ordre $2n - s - s_1$. Les courbes C_1 ont la multiplicité $n - s_1$ en O′, la multiplicité $n - s$ au point infiniment voisin O'_1, et comme à O'_1 correspond la droite OA, il y a $n - s$ branches linéaires de la courbe C_1 passant par O′, O'_1, et ces branches ne sont pas osculatrices deux à deux. De plus, aux points $O_2, O_3, \ldots, O_k$ correspondent des points $O'_2, O'_3, \ldots, O'_k$ infiniment voisins de O′ et ayant mêmes multiplicités que leurs correspondants.

Cela étant, effectuons la transformation quadratique Q_2 obtenue en rapportant projectivement aux droites du plan les coniques passant par O′, O'_2 et par un point A'_1 arbitraire. Et ainsi de suite. Après k transformations quadratiques, $|C|$ sera transformé en un réseau $|C_k|$, homaloïdal, d'ordre

$$n_k = n + k(n - s) - (s_1 + s_2 + \ldots + s_k),$$

ayant un point $O^{(k)}$ multiple d'ordre

$$s^{(k)} = n + (k-1)(n-s) - (s_1 + s_2 + \ldots + s_k),$$

auquel sont infiniment voisins k points $O_1^{(k)}, O_2^{(k)}, \ldots, O_k^{(k)}$, de multiplicité $n-s$, et les branches des courbes passant par ces points seront linéaires et non deux à deux osculatrices.

D'après le lemme établi plus haut, le réseau $|C_k|$ aura encore un point-base A_k multiple d'ordre s_{k+1} tel que

$$2s_{k+1} > n_k - s^{(k)} \quad \text{ou} \quad n-s.$$

Opérons la transformation quadratique Q_{k+1} obtenue en rapportant projectivement les coniques passant par $O^{(k)}$, $O_1^{(k)}$ et A_k. Le réseau $|C_k|$ se transforme en un réseau $|C_{k+1}|$, d'ordre

$$n_{k+1} = n + k(n-s) - (s_1 + s_2 + \ldots + s_k) - s_{k+1},$$

ayant un point $O^{(k+1)}$ multiple d'ordre

$$s^{(k+1)} = n + (k-1)(n-s) - (s_1 + s_2 + \ldots + s_k) - s_{k+1},$$

auquel sont infiniment voisins $k-1$ points multiples d'ordre $n-s$. Par le lemme établi, il existera un point-base A_{k+2} de multiplicité s_{k+2} supérieure à $\frac{1}{2}(n-s)$. On opérera alors la transformation quadratique Q_{k+2} ayant pour points fondamentaux $O^{(k+1)}$, A_{k+2}, et le point correspondant à $O_2^{(k)}$, et ainsi de suite. On parviendra finalement à un réseau homaloïdal $|C_{2k}|$ d'ordre

$$n_{2k} = n + k(n-s) - (s_1 + s_2 + \ldots + s_k) - (s_{k+1} + s_{k+2} + \ldots + s_{2k}),$$

où l'on aura

$$2s_i > n-s, \qquad 2s_{k+i} > n-s \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Par suite, on a $n_{2k} < n$ et la transformation birationnelle $Q_1 Q_2 \ldots Q_{2k}$ transforme $|C|$ en un réseau homaloïdal d'ordre inférieur. On pourra de même abaisser l'ordre de ce réseau par une transformation quadratique ou par un produit de transformations quadratiques, et l'on parviendra en fin de compte à un réseau de coniques. Le théorème de Nœther est ainsi démontré dans tous les cas.

On observera, dans la démonstration précédente, que s'il existe un point multiple d'ordre inférieur ou égal à $\frac{1}{2}(n - s)$, infiniment voisin de O, pour les courbes C, on aura un point de même multiplicité infiniment voisin de O_k pour les courbes C_k. La présence de tels points est sans influence sur le raisonnement.

V. — La Géométrie algébrique plane.

31. **Groupe principal.** — Le produit de deux transformations birationnelles étant encore une transformation birationnelle, l'ensemble de ces transformations constitue un groupe. Nous appellerons « géométrie algébrique plane » la géométrie dont le groupe principal, au sens de Klein, est le groupe des transformations birationnelles du plan en lui-même. Il résulte du théorème de Nœther que ce groupe peut être engendré en partant des homographies et des transformations quadratiques.

Deux figures planes seront équivalentes au point de vue de la géométrie algébrique si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle ; nous dirons qu'elles sont *birationnellement équivalentes*. Dans le cas opposé, nous dirons que ces figures sont *birationnellement distinctes*.

Une figure plane étant donnée, l'ensemble des figures de son plan qui lui sont birationnellement identiques constitue une *famille* dont les propriétés seront connues si l'on connaît un *modèle projectif* de la famille, c'est-à-dire une figure appartenant à la famille et ayant des caractères projectifs déterminés. La détermination de ces modèles projectifs sera le principal problème de la géométrie algébrique plane.

32. **Familles de systèmes linéaires de courbes planes.** — Soit $|C|$ un système linéaire irréductible complet de courbes planes, individuant une famille de systèmes linéaires. Nous avons vu plus haut que l'application d'un nombre fini de transformations quadratiques permet de transformer la courbe générique de ce système en une courbe n'ayant que des points multiples à tangentes distinctes. Les mêmes transformations font par suite correspondre au système $|C|$ un système $|C_1|$ n'ayant que des points-base à tangentes distinctes. On peut de plus supposer que les tangentes des courbes C_1 en ces points-base sont variables. S'il existait, en effet, un point-base du système $|C_1|$

où les courbes C_1 auraient des tangentes fixes, il suffirait d'opérer une transformation quadratique ayant ce point comme fondamental pour obtenir un nouveau système à tangentes variables aux points-base. Nous dirons qu'un point-base où les courbes du système ont des tangentes variables est ordinaire. *Dans une famille de systèmes linéaires de courbes planes, il existe des systèmes n'ayant que des points-base ordinaires.*

Remarque. — Ce résultat a été complété par Bertini [3]. *On peut transformer une courbe plane quelconque point par point en une courbe plane n'ayant que des points doubles à tangentes distinctes*, mais en général, cette transformation birationnelle ne peut être étendue aux plans des deux courbes.

La démonstration de Bertini, modifiée par Young [58], se base sur les considérations suivantes : Supposons tout d'abord la courbe transformée en une courbe C n'ayant que des points multiples O_1, $O_2, \ldots, O_\nu$, à tangentes distinctes, et envisageons les cubiques planes passant par O_1 et par 6 points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ du plan. Ces cubiques forment un réseau de degré 2, et en les rapportant projectivement aux droites d'un plan ϖ', on obtient une correspondance [1, 2] entre ce plan ϖ' et le plan ϖ de C. Supposons que les points $A_1, A_2, \ldots, A_5$ étant fixés, on choisisse le point A_6 en dehors des lieux suivants :

1° Lieu du 9ᵉ point-base d'un faisceau de cubiques planes passant par O_1, $A_1, A_2, \ldots, A_5$, par un point fixe de C et par un point variable de C;

2° Lieu du 9ᵉ point-base d'un faisceau de cubiques planes passant par O_1, $A_1, A_2, \ldots, A_5$, et touchant la courbe C en un point variable;

3° Lieu du 9ᵉ point-base d'un faisceau de cubiques planes passant par O_1, $A_1, A_2, \ldots, A_5$ et tangentes en l'un des points O_2, $O_3, \ldots, O_\nu$ à une droite tournant autour du point choisi (ce lieu se compose de $\nu - 1$ cubiques);

4° Lieu du 9ᵉ point-base d'un faisceau de cubiques planes passant par O_1, $A_1, A_2, \ldots, A_5$ et par 2 points variables P, Q de la courbe C tels que, dans le faisceau il y ait une courbe tangente à C en P et en Q.

Dans ces conditions, le lieu du 9ᵉ point-base des faisceaux de cubiques planes passant par O_1, A_1, A_2, ..., A_6 et par un point de C, est une courbe distincte de C, et il correspond à C, dans le plan ϖ', point par point, une courbe C'. De plus, la jacobienne du réseau de cubiques planes passant par O_1, A_1, A_2, ..., A_3 ne passe par aucun des points multiples O_2, O_3, ..., O_ν de la courbe C, et il correspond à ces points, sur la courbe C', des points ayant la même multiplicité et des tangentes distinctes. En un point simple de la courbe C situé sur cette jacobienne, il n'y a pas contact de la courbe C et des cubiques passant par ce point et par O_1, A_1, A_2, ..., A_6. Ces points donneront des points simples de C'. Mais la courbe C possédera des points doubles ordinaires provenant des couples de points de C, en nombre ∞^0, qui appartiennent, avec O_1, A_1, A_2, ..., A_6, à des faisceaux de cubiques planes.

L'application répétée de ce raisonnement conduit au théorème de Bertini.

Le théorème de Bertini a été démontré de plusieurs manières, en faisant généralement intervenir une courbe gauche correspondant point par point à C. Mentionnons une démonstration de Vessiot [56], établie sans sortir du plan.

33. Opérations sur les systèmes linéaires. — Considérons deux systèmes linéaires irréductibles complets, $|C_1|$, $|C_2|$, respectivement d'ordres n_1, n_2. Le système linéaire complet formé par les courbes d'ordre $n_1 + n_2$, ayant en chaque point-base de $|C_1|$ et de $|C_2|$ une multiplicité virtuelle égale à la somme des multiplicités des courbes C_1, C_2 en ce point, est appelé somme des systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, et est représenté par $|C_1 + C_2|$. Si m_1, m_2 sont respectivement les degrés des systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, et si i est le nombre des points variables communs à une courbe C_1 et à une courbe C_2, le degré (virtuel) du système $|C_1 + C_2|$ est $m_1 + m_2 + 2i$.

En particulier, on pourra considérer les systèmes $|2C|$, $|3C|$, ..., double, triple, ..., d'un système donné.

Soient maintenant $|C|$, $|C_1|$ deux systèmes linéaires complets. S'il existe un système linéaire complet $|C_2|$ tel que toutes les courbes $C_1 + C_2$ appartiennent (comme courbes totales) au système $|C|$, nous représenterons le système $|C_2|$ par $|C - C_1|$.

Nous conviendrons de dire que si deux courbes appartiennent, comme courbes totales, à un même système linéaire, elles sont linéairement équivalentes. Si ces deux courbes sont C, Γ, nous écrirons

$$C \equiv \Gamma.$$

Deux systèmes linéaires complets $|C|$, $|\Gamma|$ coïncidants, donneront lieu à l'égalité symbolique

$$|C| = |\Gamma|.$$

34. **Systèmes jacobiens et systèmes adjoints.** — Considérons un système linéaire complet $|C|$ de dimension $r \geqq 2$, et les jacobiennes de chaque réseau appartenant à $|C|$. Nous appellerons système jacobien $|C_j|$ de $|C|$ le système linéaire complet de courbes d'ordre $3(n-1)$ se comportant, aux points-base de $|C|$, comme les jacobiennes des réseaux de courbes de ce système, n étant l'ordre des courbes C.

Cette définition appelle une remarque. Il pourrait exister, en dehors des points-base de $|C|$, des points communs à toutes les jacobiennes des réseaux de ce système. Par exemple, il peut exister un point fixe, en dehors des points-base de $|C|$, qui soit double pour ∞^{r-2} courbes C, et un tel point appartient à toutes les jacobiennes des réseaux. D'après la définition de $|C_j|$, ces points doivent être considérés comme inexistants.

Soit $|\Gamma|$ un second système linéaire. Cherchons le système jacobien du système $|C + \Gamma|$. Pour cela, observons que parmi les réseaux appartenant à ce système, se trouvent des réseaux formés d'une courbe Γ fixe et d'un réseau du système $|C|$. Soient

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \lambda_1 f_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2 f_2(x_1, x_2, x_3) + \lambda_3 f_3(x_1, x_2, x_3) = 0$$

les équations d'une courbe Γ et d'un réseau de courbes C. On vérifie aisément que l'équation de la jacobienne

$$\frac{\partial(\varphi f_1, \varphi f_2, \varphi f_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = 0$$

du réseau de $|C + \Gamma|$ se réduit à

$$\varphi^3 \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = 0.$$

On a donc

$$(C + \Gamma)_j \equiv C_j + 3\Gamma,$$

et si $|\Gamma|$ est au moins ∞^2,

$$C_j + 3\Gamma \equiv \Gamma_j + 3C.$$

On appelle *système adjoint* du système $|C|$ le système

$$|C_a| = |C_j - 2C|.$$

Si ce système existe, il est d'ordre $n - 3$.

Lorsque le système $|\Gamma|$ est ∞^2 au moins, nous avons

$$C_a + \Gamma \equiv \Gamma_a + C.$$

Nous utiliserons cette égalité symbolique pour définir le système adjoint à un système $|\Gamma|$ de dimension 1 ou 0. Dans tous les cas, le système adjoint a l'ordre égal à l'ordre du système donné, diminué de 3 unités.

Le système jacobien, et par suite le système adjoint d'un système linéaire peuvent avoir des composantes fixes (courbes fondamentales du système linéaire); ces systèmes jacobien et adjoint, débarrassés de ces composantes fixes, seront appelés *systèmes jacobien* et *adjoint purs*.

Si deux systèmes linéaires sont birationnellement équivalents, il en est de même de leurs jacobiens purs, car une courbe ayant un point double est transformée en une courbe ayant aussi un point double au point correspondant. Il en est de même des systèmes adjoints purs.

Étant donné le système linéaire complet $|C|$, nous avons défini son système adjoint pur $|C'|$. Le système adjoint pur $|C''|$ à $|C'|$ sera appelé le second adjoint pur de $|C|$. Et l'on définira de même les 3ᵉ, 4ᵉ, ... systèmes adjoints purs $|C'''|$, $|C''''|$, ... de $|C|$. On a le résultat fondamental suivant : *Si deux systèmes linéaires sont birationnellement équivalents, il en est de même de leurs adjoints purs successifs.*

Ce théorème a été énoncé pour la première fois par S. Kantor [33]; la méthode que nous avons utilisée pour l'établir est due à Enriques [20], qui l'a employée dans le cas plus général des surfaces algébriques.

35. **Caractères d'un système linéaire.** — Nous avons considéré plus haut l'ordre, le *degré* et la *dimension* d'un système linéaire complet. L'ordre est un caractère projectif, car deux courbes birationnellement équivalentes n'ont pas, en général, le même ordre. Par contre, la dimension et le degré sont des caractères invariants pour les transformations birationnelles.

D'une manière générale, si deux courbes variables sont soumises à une transformation birationnelle, le nombre des points variables communs aux deux courbes reste le même après la transformation. Il en résulte que le nombre de points variables communs à la courbe générique d'un système linéaire et aux courbes du système adjoint pur est invariant vis-à-vis des transformations birationnelles. Pour évaluer ce nombre, supposons le système linéaire transformé birationnellement en un système $|C|$, d'ordre n, n'ayant que des points multiples d'ordres $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$, ordinaires et à tangentes variables comme points-base. Le nombre des points variables communs à une courbe C et à une courbe du système adjoint est donné par

$$n(n-3)-s_1(s_1-1)-s_2(s_2-1)-\ldots-s_\nu(s_\nu-1).$$

Les jacobiennes passant $3s-1$ fois par un point-base ordinaire s-uple, les adjointes passent $s-1$ fois par ce point. Le nombre trouvé donne également le nombre de points variables communs à une courbe C et à une courbe de l'adjoint pur; ce nombre est pair et sera représenté par $2\pi-2$. On a alors

$$\pi=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\frac{1}{2}s_1(s_1-1)-\ldots-\frac{1}{2}s_\nu(s_{\nu-1}),$$

et π est le genre des courbes C. On dira que π est le *genre* du système $|C|$.

Le système adjoint pur d'un système linéaire du genre π découpe donc, sur une courbe de ce système, la *série canonique* $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$, de dimension $\pi-1$. Comme les courbes adjointes, d'ordre $n-3$, ne peuvent contenir des courbes C, d'ordre n, la dimension du système adjoint pur est $\pi-1$. On en conclut aisément que le système adjoint est régulier.

La série linéaire découpée sur une courbe d'un système linéaire de degré m et de dimension r porte le nom de *série caractéristique* g_m^{r-1} du système.

Remarquons que, pour un système linéaire ∞^1 au moins de courbes rationnelles ($\pi=0$), les courbes adjointes n'existent pas. Pour un système linéaire ∞^2 au moins de courbes elliptiques ($\pi=1$), il existe une seule courbe adjointe qui ne rencontre pas les courbes du système en dehors des points-base.

36. Systèmes linéaires de genre donné et d'ordre minimum. — Étant donnée une famille de systèmes linéaires complets et irréductibles, on peut se proposer de prendre, pour modèle projectif de la famille, le système d'ordre minimum. Cependant, le nombre de systèmes linéaires d'ordre minimum et de genre donné π, birationnellement distincts, croît rapidement avec le genre, et la recherche de ces systèmes n'a été faite que pour $\pi = 0, 1, 2, 3$ et pour les systèmes dont les courbes sont hyperelliptiques. Trois méthodes ont été surtout utilisées : une méthode arithmétique analogue à celle qui a été employée par Nœther pour établir la composition des transformations birationnelles au moyen de transformations quadratiques ; une méthode basée sur la considération des systèmes adjoints successifs et sur l'emploi des transformations de Jonquières ; enfin une méthode consistant à rechercher les surfaces rationnelles projectivement distinctes.

Considérons un système linéaire $|C|$, de degré m, de genre π, de dimension r, irréductible. Soient $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$ ses points-base, distincts ou infiniment voisins ; $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ leurs multiplicités respectives. On a, n étant l'ordre des courbes C,

$$s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_\nu^2 = n^2 - m, \tag{1}$$

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu = 3n + 2(\pi - 1) - m. \tag{2}$$

Supposons pour un instant que les points-base de $|C|$ soient ordinaires (distincts et à tangentes variables). Ceci n'est pas une restriction puisque l'on peut trouver de tels systèmes dans toute famille considérée. On a alors

$$r = m - \pi + 1 + \omega,$$

ω étant la surabondance du système (caractère invariant pour les transformations birationnelles).

Observons que par $m - \pi + \omega$ points, passent ∞^1 courbes C, ayant en commun n^2 points ; par suite,

$$s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_\nu^2 + m - \pi + \omega \leqq n^2,$$

d'où $\omega \leqq \pi$. *La surabondance d'un système linéaire de genre π est au plus égale à π.* On peut observer de plus que si $m > 2\pi - 2$, la série caractéristique est non spéciale et a par suite la dimension

$$r - 1 = m - \pi$$

(théorème de Riemann-Roch sur une courbe algébrique). Par conséquent, *si dans un système linéaire on a* $m > 2\pi - 2$, *le système est régulier* ($\omega = 0$).

Cela établi, nous allons indiquer en quoi consistent les méthodes de recherche des systèmes linéaires d'ordre minimum.

a. Méthode arithmétique. — Cette méthode consiste dans la résolution des équations indéterminées (1) et (2). On commence par considérer le cas où les trois points-base ayant les plus grandes multiplicités O_1, O_2, O_3, par exemple, donnent

$$(3) \qquad s_1 + s_2 + s_3 > n,$$

et par rechercher les systèmes linéaires possédant cette propriété et dont l'ordre ne peut être abaissé par une transformation quadratique ayant O_1, O_2, O_3 comme points fondamentaux. On recherche ensuite les solutions des équations (1) et (2), en supposant que la somme de trois nombres s est au plus égale à n, ou en supposant $\nu = 0, 1, 2$. Il reste alors à examiner quelles sont les solutions arithmétiques donnant des solutions géométriques.

Cette méthode a été utilisée par Guccia [27] dans le cas $\pi = 0$, par Bertini [1] et Guccia [27] dans le cas $\pi = 1$, par Martinetti [37] et de Franchis [15] dans le cas $\pi = 2$. Jung [32] a considéré le cas général et appliqué ses résultats lorsque $\pi \leqq 3$. Tout récemment, Nencini [40] a repris la question et a obtenu un résultat général pour les systèmes dont l'ordre ne peut être abaissé et qui donnent lieu à l'inégalité (3), Valdes Franciosi [55] a traité le problème en utilisant les transformations de Jonquières.

b. Utilisation des adjointes successives. — Ce procédé a pour base la démonstration du théorème de Nœther donnée par Castelnuovo [8], et a été appliqué par Ferretti [23] aux systèmes de genre $\pi = 0, 1, 2$.

Le théorème fondamental de la méthode est le suivant : si le système $|C|$ a l'ordre minimum et s'il possède des courbes adjointes d'indice k, mais non des courbes adjointes d'indice supérieur, on a, soit

$$3k \leqq n \leqq 3k + 2,$$

soit au moins un point-base de multiplicité $n - 2k - 1$ ou $n - 2k$. Ce théorème se démontre par l'absurde. On montre que si n est minimum et supérieur à $3k+2$, et si les points-base sont au plus d'ordre $n-2k-2$, il existe une transformation de Jonquières qui abaisse l'ordre du système.

L'application de ce théorème aux systèmes linéaires de genre 0 et de dimension $r>0$ et aux systèmes linéaires de genre 1 et de dimension $r>1$ est immédiate, car les premiers sont dépourvus d'adjointes ($k=0$), et les seconds sont dépourvus d'adjointes d'indice supérieur à l'unité ($k=1$).

Pour les systèmes linéaires de genre $\pi>1$ et qui sont réguliers, on utilise le résultat suivant : si l'on a

$$m \geqq 2\pi-2+\frac{2\pi-1}{k},$$

les adjointes d'indice supérieur à k ne peuvent exister. On le démontre en observant que les adjointes d'ordre $i+1$ découpent, sur les courbes C, des groupes formés de points dont le nombre est inférieur de $m-2(\pi-1)$ à celui des points des groupes découpés sur les courbes C par les adjointes d'indice i, et en utilisant la relation

$$r=m-\pi+1.$$

c. *Emploi des surfaces rationnelles.* — Supposons $r\geqq 3$, et rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. Nous obtenons une surface F représentable point par point sur le plan du système $|C|$, c'est-à-dire une surface rationnelle. Il est clair que les surfaces de S_r, qui représentent deux systèmes linéaires complets de dimension r, birationnellement équivalents, sont projectivement équivalentes, c'est-à-dire peuvent se déduire l'une de l'autre par une transformation projective de S_r. L'étude des systèmes linéaires de courbes du plan revient donc à celle des surfaces F. Cette remarque, faite par Segre [51], a été utilisée par Castelnuovo [5], pour l'étude des systèmes linéaires de courbes hyperelliptiques et des systèmes linéaires de genre 3. Dans le cas des systèmes linéaires de genre zéro, l'observation de Segre avait été faite auparavant par Picard [45], qui a déterminé les surfaces dont les sections planes sont rationnelles par une méthode distincte de celles qui sont mentionnées ici. (*Voir* à ce sujet le *Traité d'Analyse* de ce géomètre, t. II.)

Une surface F, de S_r, à sections hyperplanes de genre π, qui représente le système linéaire $|C|$, peut être multiple. Dans ce cas, les courbes C passant par un point générique du plan passent en conséquence par $\mu - 1$ autres points. Le degré est multiple de μ, et il existe dans le plan un ensemble de ∞^2 groupes de μ points tels qu'un point du plan détermine le groupe auquel il appartient. Un tel ensemble est appelé *involution* d'ordre μ, et l'on dit que $|C|$ est composé au moyen de cette involution. Deux courbes C ont en commun $\frac{m}{\mu}$ groupes de l'involution, et la surface F est une surface d'ordre $\frac{m}{\mu}$ comptée μ fois, possédant des points de diramation (en général en nombre ∞^1), c'est-à-dire des points de passage d'une à l'autre des μ surfaces formant F. Ces points de diramation correspondent aux points du plan qui comptent pour plus d'un point dans les groupes de l'involution auxquels ils appartiennent.

Deux systèmes linéaires birationnellement distincts peuvent donner naissance à deux surfaces dont l'une soit un cas particulier de l'autre. Nous en verrons plus loin un exemple. Il y a là une difficulté d'application de la méthode.

37. **Systèmes linéaires de genre 0 et de genre 1.** — Des travaux qui viennent d'être cités, relevons les résultats suivants qui nous seront utiles.

Tout système linéaire complet, ∞^1 au moins, de genre zéro, est birationnellement équivalent à un des systèmes suivants :

1° *Réseau des droites du plan* ($m = 1$, $r = 2$);

2° *Faisceau de droites* ($m = 0$, $r = 1$);

3° *Système linéaire des coniques du plan* ($m = 4$, $r = 5$);

4° *Système linéaire de courbes d'ordre n ayant un point-base $(n-1)$-uple avec λ tangentes fixes* ($0 \leqq \lambda \leqq n-1$) ($m = 2n - \lambda - 1$, $r = 2n - \lambda$);

5° *Système linéaire de courbes d'ordre n ayant un point-base $(n-1)$-uple à tangentes variables et un point-base simple à distance finie du premier* ($m = 2n - 2$, $r = 2n - 1$).

En rapportant projectivement les courbes du troisième système aux hyperplans d'un espace S_5, on obtient la surface de Véronèse. Aux deux derniers systèmes, correspondent des surfaces réglées d'ordre $r - 1$ de S_r, et l'on a un exemple de surfaces dont les cas particuliers donnent des systèmes linéaires birationnellement distincts.

Tout système linéaire complet, ∞^1 au moins, de genre un, est birationnellement équivalent à un des systèmes suivants :

1° *Faisceau de courbes d'ordre* $3n$ *ayant* 9 *points-base n-uples, situés sur une cubique* ($m = 0$, $r = 1$);

2° *Systèmes linéaires de cubiques ayant* λ *points-base simples* ($0 \leqq \lambda \leqq 7$) *distincts ou infiniment voisins* ($m = q - \lambda$, $r = q - \lambda$);

3° *Systèmes linéaires de quartiques ayant* 2 *points doubles distincts ou infiniment voisins* ($m = 8$, $r = 8$).

Les faisceaux de courbes elliptiques d'ordre $3n$, ayant 9 points-bases n-uples, sont appelés faisceaux de Halphen [30], du nom du géomètre qui a démontré leur existence. Ce sont des systèmes surabondants.

38. Transformations birationnelles cycliques. — Une transformation birationnelle T du plan en lui-même telle que T^p soit l'identité est dite *cyclique de période p* si p est le plus petit entier positif donnant lieu à cette identité. Bertini [1] dans le cas $p = 2$, et Kantor [33] dans le cas général, ont déterminé les types birationnellement distincts de ces transformations.

Soit $|C_1|$ un système linéaire quelconque. Les transformations T, T^2, ..., T^{p-1} lui font correspondre des systèmes linéaires $|C_2|$, $|C_3|$, ..., $|C_p|$, et le système complet

$$|C| = |C_1 + C_2 + \ldots + C_p|$$

est transformé en lui-même par T, c'est-à-dire que T transforme une courbe de $|C|$ en une courbe de $|C|$, distincte ou non de la première.

Le système $|C|$ étant transformé en lui-même par T, il en est de même de ses adjoints purs successifs, et en particulier du système adjoint pur d'indice le plus élevé. Ce dernier système ne peut être qu'un système linéaire de genre 0 ou de genre 1, et par suite, par une transformation birationnelle, on peut ramener une transformation cyclique à une autre de même période, transformant en lui-même un des systèmes linéaires de genre 0 ou 1 énumérés plus haut.

Si une transformation périodique T transforme en lui-même le réseau des droites ou le système ∞^5 des coniques du plan, c'est nécessairement une homographie périodique.

Si cette transformation laisse invariant un système linéaire de courbes d'ordre n ayant un point $(n-1)$-uple O, elle transforme en lui-même le faisceau des droites de sommet O, et cette transformation est nécessairement du type de Jonquières.

Supposons maintenant que cette transformation laisse invariant un système linéaire de courbes elliptiques. Nous allons tout d'abord montrer que ce ne peut être un faisceau de Halphen de courbes d'ordre $3n > 3$. Pour cela nous prouverons qu'un tel faisceau ne peut être un système adjoint. Supposons, si c'est possible, qu'un système linéaire $|C|$ de courbes d'ordre $3(n+1)$ ait comme adjoint pur $|C'|$ un faisceau de Halphen d'ordre $3n$, ayant 9 points-base O_1, $O_2, \ldots, O_9$ multiple d'ordre n. Nous pouvons supposer $|C|$ irréductible. Le système adjoint à $|C|$ étant ∞^1, $|C|$ est de genre $\pi = 2$. Il en résulte que $|C|$ ne peut avoir la multiplicité $n+1$ en chacun des points-base $O_1, O_2, \ldots, O_9$, car alors les courbes C seraient elliptiques. Il faut donc que $|C|$ ait 8 points-base $(n+1)$-uples O_1, $O_2, \ldots, O_8$ et un point-base n-uple O_9 (auquel peuvent être infiniment voisins des points multiples). Mais alors les courbes C' rencontrent les courbes C en n points variables, et puisque $\pi = 2$, on doit avoir $n = 2$. Dans ce cas, les courbes C, de genre 2, ont un point double en O_9, et à ce point doit être infiniment voisin un second point double. Mais cela est impossible, car le degré de $|C|$ serait l'unité, et les courbes C seraient rationnelles. Un faisceau de Halphen d'ordre $3n > 3$ ne peut donc être l'adjoint d'un système linéaire.

Si une transformation périodique laisse invariant un faisceau de Halphen, c'est donc nécessairement un faisceau de cubiques, et celui-ci est l'adjoint d'un système linéaire ∞^3 de sextiques ayant 8 points-bases doubles, et par suite de genre 2. La transformation doit laisser ce système invariant.

Si une transformation périodique laisse invariant un système linéaire de cubiques passant par $\lambda = 0$, 1 ou 2 points, c'est une homographie, car dans le cas où $\lambda = 0$, elle laisse invariant le réseau des droites comptées trois fois, et lorsque $\lambda = 1$ ou 2, elle laisse invariant le réseau des droites comptées deux fois.

Supposons enfin qu'une transformation périodique laisse invariant le système des quartiques ayant deux points doubles O_1, O_2. Si O_2 est infiniment voisin de O_1, la transformation change en lui-même le faisceau de droites de sommet O_1. Dans tous les cas, les coniques passant par O_1, O_2 forment un système invariant, et la transformation est une homographie ou une transformation quadratique. Dans cette dernière alternative, les points O_1, O_2 sont fondamentaux, et la transformation laisse invariant, si O_1 et O_2 sont distincts, chacun des faisceaux de droites de sommets O_1, O_2, ou elle les permute entre eux. Si cette permutation se présente, en soumettant la transformation à une homographie échangeant entre elles les droites par O_1 et O_2, on est ramené à une transformation (birationnellement équivalente) laissant invariant chacun des faisceaux de sommets O_1, O_2.

En résumé : *Une transformation birationnelle cyclique du plan est birationnellement équivalente à :*

1° *Une homographie périodique ;*

2° *Une transformation de Jonquières laissant invariant un faisceau de droites ;*

3° *Une transformation laissant invariant le système des cubiques passant par* 3, 4, 5, 6 *ou* 7 *points ;*

4° *Une transformation laissant invariant le système des sextiques de genre* 2 *ayant* 8 *points-base doubles.*

Kantor [33], et après lui, d'une manière plus rigoureuse, Wiman [57] ont déduit de ce théorème les divers types de transformations cycliques birationnellement distincts. Nous allons poursuivre le raisonnement pour $p = 2$ et retrouver ainsi, par une voie différente, les résultats de Bertini.

39. **Transformations birationnelles involutives.** — Commençons par considérer le cas où une transformation birationnelle T, involutive (c'est-à-dire de période 2), laisse invariant le système $|C|$ des cubiques passant par λ points $O_1, O_2, \ldots, O_\lambda$ $(2 < \lambda < 8)$. Nous écarterons *a priori* le cas où T est une homographie.

Si T transforme en elle-même toute courbe C, le degré de $|C|$ doit être pair, ce qui écarte les cas $\lambda = 4$ et $\lambda = 6$.

Si $\lambda = 6$, $|C|$ est de dimension $r = 3$. Rapportons projectivement les courbes C aux plans d'un espace S_3 ; nous obtenons une surface cubique F représentable point par point sur le plan et à la transformation T correspond une homographie involutive de S_3 transformant F en elle-même. Si cette homographie est biaxiale, un des axes doit appartenir à F, et il existe, dans le plan de $|C|$, un faisceau de droites ou un faisceau de courbes rationnelles transformé en lui-même par T (ces deux cas sont d'ailleurs birationnellement équivalents). Si l'homographie de S_3 est une homologie, le centre de cette homologie doit appartenir à F, et il existe un système linéaire de courbes C, passant par un septième point, transformé en lui-même par T ; on est alors ramené au cas $\lambda = 7$.

Le cas $\lambda = 4$ se traite comme le précédent $\lambda = 6$.

Examinons le cas $\lambda = 3$. Les droites et les coniques passant par O_1, O_2, O_3 forment des courbes C, par suite T fait correspondre aux droites les coniques circonscrites à un triangle et est donc une transformation quadratique. Les faisceaux de droites de sommet O_1, O_2, O_3 sont transformés en eux-mêmes par T.

Supposons $\lambda = 5$. Les droites du plan et la conique déterminée par O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 forment des courbes C. T n'étant pas une homographie, fait correspondre aux droites du plan les coniques passant par trois des points-base, par exemple, O_1, O_2, O_3, et à la conique passant par les 5 points correspond alors la droite $O_4 O_5$. T est donc une transformation quadratique et change en eux-mêmes les faisceaux de droites de sommets O_1, O_2, O_3.

Reste le cas $\lambda = 7$. $|C|$ est alors un réseau, et les couples de points correspondants par T sont les points qui, avec les 7 points-base, sont communs à toutes les courbes C d'un faisceau.

Supposons enfin que la transformation T laisse invariant le système $|C|$ des sextiques de genre 2 ayant huit points-base doubles. Soit $|C'|$ le système adjoint. Par un point P passe une courbe C' et ∞^2 courbes C qui rencontrent encore la courbe C' en un point en dehors des points-base et de P. Ce point doit être fixe puisque C' est elliptique. Par suite, les courbes C passant par un point passent nécessairement par un second point, et ces couples de points sont nécessairement les couples de points que T fait correspondre l'un à l'autre.

En remarquant enfin que si une homographie est involutive, c'est une homologie harmonique, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Toute transformation birationnelle involutive du plan est birationnellement équivalente à :

1° *Une homologie harmonique;*

2° *Une transformation laissant invariant un faisceau de droites* (*transformation de Jonquières*);

3° *Une transformation dont les couples de points correspondants sont donnés par les intersections variables des cubiques passant par sept points fixes;*

4° *Une transformation dont les couples de points correspondants donnent une condition simple pour les sextiques ayant huit points doubles fixes.*

On remarquera que, dans cet énoncé, une transformation quadratique est considérée comme cas particulier d'une transformation de Jonquières.

40. **Involutions planes.** — Nous avons défini plus haut une involution plane comme un ensemble de ∞^2 groupes de n points tel que, en général, un point du plan appartienne à un seul groupe. Le nombre n est l'*ordre* de l'involution. Il y aura généralement des points exceptionnels, en nombre fini, appartenant à ∞^1 groupes d'une involution, les autres points de ces ∞^1 groupes engendrant des courbes, mais quelques-uns pouvant d'ailleurs être fixes. Ces points exceptionnels sont appelés *points fondamentaux*, les courbes correspondantes *fondamentales*. L'ordre d'une courbe fondamentale est l'ordre du point fondamental correspondant. Il y a en général un certain nombre de groupes d'une involution ayant 2 points sur une droite, ce nombre est la *classe* de l'involution (caractère projectif).

Une transformation cyclique de période p engendre une involution (cyclique) d'ordre p, chaque groupe contenant les transformés d'un quelconque de ses points au moyen des diverses puissances de la transformation.

On n'a pas déterminé les types birationnellement distincts d'involutions planes d'ordre n, mais Castelnuovo [7] a établi à leur sujet un théorème important : *Toute involution plane est rationnelle* (c'est-à-dire représentable groupe par point sur un plan). Nous indiquerons rapidement en quoi consiste la démonstration.

Considérons une involution plane d'ordre n et de classe ν. Il existe en général ∞^1 points formant une courbe algébrique en chacun desquels deux points d'un même groupe de l'involution sont infiniment voisins; ce sont les points de coïncidence, et leur lieu est la courbe de coïncidence de l'involution. Soit μ l'ordre de cette courbe.

Les $n-1$ points qui, avec chaque point d'une droite d, forment des groupes de l'involution, appartiennent à une courbe D. Les courbes $d+D$ appartiennent totalement à un système linéaire complet $|C|$ composé au moyen de l'involution, et ∞^3 au moins. Si r est la dimension du système complet $|C|$, en rapportant projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace S_r, on obtient une surface Φ, image de l'involution. La surface Φ est d'ordre $m = 2\nu + \mu + 1$, ses sections hyperplanes ont le genre $\pi = \nu$ et l'on a $r = \nu + \mu + 2$. Castelnuovo démontre, en outre, que les sections hyperplanes de Φ découpent, sur l'une d'entre elles, une série complète, d'où la rationalité de la surface Φ. Cette question est du domaine de la théorie des surfaces algébriques; cependant les résultats de Castelnuovo peuvent conduire à une classification des involutions planes, classification projective basée sur les diverses valeurs de la classe ν. Cette classification a été faite, par cette voie, pour les premières valeurs de ν, par Ferretti [24].

VI. — Groupes continus finis de transformations birationnelles.

41. Classification des groupes continus. — Suivant Lie, on appelle groupe continu fini de transformations birationnelles un ensemble continu de transformations, dépendant d'un nombre fini de paramètres et tel que :

1° Le produit de deux transformations de l'ensemble soit encore une transformation de l'ensemble ;

2° La transformation inverse d'une transformation de l'ensemble appartienne à l'ensemble (l'identité est donc une transformation de l'ensemble).

Soit $\mathcal{G}$ un groupe continu fini de transformations birationnelles du plan, dépendant de l paramètres. La transformation générique du groupe sera d'un certain ordre qui ne pourra s'abaisser que pour des transformations particulières.

Si l'on applique toutes les transformations du groupe $\mathcal{G}$ aux courbes d'un système linéaire de dimension au moins égale à l'unité, on obtiendra un système continu de courbes d'un certain ordre n, en général non linéaire, transformé en lui-même par ces transformations (corps du groupe $\mathcal{G}$). Les courbes de ce système appartiennent, comme courbes totales, à un système linéaire $|C|$, d'ordre n, transformé en lui-même par les transformations de $\mathcal{G}$.

Les systèmes adjoints purs successifs de $|C|$ sont également transformés en eux-mêmes par les transformations de $\mathcal{G}$, et par conséquent, ces transformations laisseront invariant un système linéaire complet de courbes rationnelles ou elliptiques, dernier adjoint de $|C|$. Il en résulte que le groupe $\mathcal{G}$ est birationnellement équivalent à un groupe $\mathcal{G}_1$ dont les transformations laissent invariant un système linéaire $|C_1|$ complet, de genre 0 ou de genre 1, d'ordre minimum. On est donc conduit à reprendre la discussion faite à propos des transformations birationnelles cycliques, mais ici il sera possible de préciser davantage.

Si $|C_1|$ est le réseau des droites ou le système ∞^5 de coniques du plan, les transformations du groupe $\mathcal{G}_1$ sont nécessairement des homographies.

Supposons $|C_1|$ formé des courbes d'ordre n ayant un point $(n-1)$-uple O_1 (à tangentes variables) et un point simple O_2, à distance finie de O_1. Parmi les courbes C_1 se trouvent les courbes formées de la droite O_1O_2 et d'une droite passant par O_1, comptée $n-1$ fois; comme il n'existe aucun autre système analogue dans $|C_1|$ à celui formé par ces droites, le faisceau de droites de sommet O_1 est transformé en lui-même par les transformations de $\mathcal{G}$. De même, le faisceau de droites de sommet O_2 est transformé en lui-même par ces transformations, et il en est de même par conséquent du système des coniques passant par O_1, O_2. $\mathcal{G}_1$ est formé par suite de transformations quadratiques.

Supposons maintenant que $|C_1|$ soit formé des courbes d'ordre n ayant un point $(n-1)$-uple O_1 et λ tangentes fixes en ce point $(0 \leqq \lambda \leqq n-1)$. Ce système est de dimension $2n-\lambda$. Le faisceau de droites de sommets O_1 est invariant pour les transformations de $\mathcal{G}_1$. Supposons $\lambda < n - 1$. Les courbes C_1 devant contenir une droite passant par O_1 sont en nombre $\infty^{2n-\lambda-2}$ et comprennent des courbes d'ordre $n - 1$ ayant la multiplicité $n - 2$ et λ tangentes fixes en O_1. Ces courbes forment un système linéaire invariant pour les transformations de $\mathcal{G}_1$. Si $\lambda < n - 2$, le raisonnement précédent peut être repris, et l'on parviendra finalement, dans tous les cas, à un système linéaire de courbes d'ordre $\lambda + 1$ ayant la multiplicité λ et λ tangentes fixes en O_1, invariant pour les transformations de $\mathcal{G}_1$.

Le cas où $|C_1|$ est un faisceau de droites rentre dans un des deux derniers cas précédents, car alors les transformations de $\mathcal{G}_1$ sont du type de Jonquières.

Si le système $|C_1|$ est formé de quartiques ayant deux points-base doubles O_1, O_2, distincts ou infiniment voisins, le système des coniques passant par ces deux points est invariant pour les transformations de $\mathcal{G}_1$, et ce groupe est formé de transformations quadratiques. De plus, les transformations de $\mathcal{G}_1$ laissent invariant chacun des faisceaux de droites de sommet O_1 ou O_2.

Il nous reste à examiner le cas où $|C_1|$ est constitué par les cubiques passant par λ points $O_1, O_2, \ldots, O_\lambda (\lambda = 3, 4, \ldots, 7, 9)$, puisque nous avons vu que le système adjoint $|C_1|$ ne pouvait être un faisceau de Halphen d'ordre supérieur à 3 et que, d'autre part, pour un système de cubiques planes ayant 0, 1 ou 2 points-base, les transformations laissant un tel système invariant sont des homographies.

Considérons les coniques Γ passant par les points-base O_1, O_2. Une transformation générique du groupe $\mathcal{G}_1$ transforme les coniques Γ en des courbes Γ' d'ordre μ' passant $s_1, s_2, \ldots, s_\lambda$ fois respectivement par les points $O_1, O_2, \ldots, O_\lambda$ et $s_{\lambda+1}, \ldots, s_\nu$ fois par certains points fixes $O_{\lambda+1}, \ldots, O_\nu$. Les courbes Γ' doivent rencontrer, comme les coniques Γ, les courbes C en quatre points variables; de plus, les courbes Γ' doivent être rationnelles et former un système de degré 2. En exprimant ces diverses conditions, on trouve

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\lambda = 3\mu - 4,$$
$$s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_\nu^2 - (s_1 + s_2 + \ldots + s_\lambda + s_{\lambda+1} + \ldots + s_\nu) = \mu^2 - 3\mu + 2,$$
$$s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_\nu^2 = \mu^2 - 2.$$

On en déduit immédiatement $s_{\lambda+1} = \ldots = s_\nu = 0$. Les courbes Γ' n'ont donc pas de point fixe en dehors des points-base de $|C_1|$. Le système $|\Gamma'|$ est complètement déterminé par les points-base, et lorsque la transformation considérée du groupe $\mathcal{G}_1$ varie d'une manière continue dans ce groupe, les nombres $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ ne peuvent varier. En particulier, si l'on soumet les coniques Γ à la transformation identique, qui fait partie de $\mathcal{G}_1$, les courbes Γ' coïncident avec ces coniques. On aura donc $s_1 = s_2 = 1$, $s_3 = \ldots = s_\lambda = 0$, et les transformations de $\mathcal{G}_1$ laissent donc invariant le système $|\Gamma|$. Il en résulte que $\mathcal{G}_1$ est formé de transformations quadratiques. On déduit de même que les faisceaux de droites de sommets O_1, O_2 sont chacun invariant pour les transformations de $\mathcal{G}_1$.

En résumé : *Tout groupe continu fini de transformations birationnelles du plan est birationnellement équivalent à :*

1° *Un groupe d'homographies;*

2° *Un groupe de transformations quadratiques laissant invariants deux faisceaux de droites;*

3° *Un groupe de transformations de Jonquières laissant invariant le système des courbes d'ordre n ayant un point $(n-1)$-uple à tangentes fixes.*

42. **Relations entre les groupes de transformations birationnelles et les groupes d'homographies hyperspatiales.** — Les deux derniers groupes obtenus correspondent à des groupes d'homographies hyperspatiales transformant en elles-mêmes certaines surfaces rationnelles.

Considérons le second groupe, et soient O_1, O_2 les sommets des faisceaux de droites invariants (nous pouvons supposer ces points distincts, car s'ils étaient infiniment voisins, on aurait un groupe de la troisième catégorie pour $n = 2$). Les transformations du groupe laissent invariant le système des coniques passant par O_1, O_2. En rapportant projectivement ces coniques aux plans d'un espace S_3, on obtient une quadrique Q (non conique), et aux transformations du groupe correspondent des homographies de S_3 laissant cette quadrique invariante. De plus, ces homographies laissent invariant chaque système de génératrices. Un groupe formé par ces homographies dépend au plus de 6 paramètres.

Considérons le troisième groupe. En rapportant projectivement les ∞^{n+1} courbes d'ordre n ayant un point $(n-1)$-uple à tangentes fixes, aux hyperplans d'un espace linéaire S_{n+1} à $n+1$ dimensions, on obtient un cône Γ_n d'ordre n. Aux transformations laissant invariant le système formé par ces courbes correspondent des homographies de S_{n+1} laissant le cône Γ_n invariant. Chacune de ces homographies possède le sommet du cône comme élément uni. L'hyperplan uni opposé à ce point rencontre le cône suivant une courbe transformée en elle-même, ce qui peut être fait de ∞^3 manières. Les homographies considérées dépendent de $n+5$ paramètres.

Tout groupe continu fini de transformations birationnelles du plan est birationnellement équivalent;

1° *Au groupe* $\mathcal{G}_8$, ∞^8 *des homographies planes*;

2° *Au groupe* $\mathcal{G}_6$, ∞^6 *des transformations quadratiques laissant deux points fixes (et laissant invariant chacun des faisceaux de droites ayant l'un de ces points pour sommet)*;

3° *Au groupe* $\mathcal{G}_{n+5}$, ∞^{n+5} *des transformations de Jonquières laissant invariant le système* ∞^{n+1} *des courbes d'ordre* n *ayant un point* $(n-1)$*-uple à tangentes fixes;*

Ou à un des sous-groupes des précédents.

Le groupe $\mathcal{G}_6$ *correspond au groupe des homographies de* S_3 *transformant en elle-même une quadrique et chacun de ses systèmes de génératrices.*

Le groupe $\mathcal{G}_{n+5}$ *correspond au groupe des homographies de* S_{n+1} *transformant en lui-même un cône rationnel d'ordre* n.

Ces théorèmes et les raisonnements qui y ont conduit sont dus à Enriques [18].

43. **Composition des groupes.** — Le groupe total des homographies d'un espace linéaire quelconque, et en particulier le groupe total $\mathcal{G}_8$ des homographies du plan sont des groupes simples.

Le groupe $\mathcal{G}_6$ des homographies de S_3 transformant en elle-même une quadrique non conique Q et chacun des systèmes de génératrices rectilignes de cette quadrique, opère, sur un de ces systèmes de génératrices, comme le groupe total des homographies binaires, qui est ∞^3. Le groupe $\mathcal{G}_6$ possède donc deux sous-groupes invariants, formés d'homographies biaxiales. L'une de ces homographies a pour axes deux génératrices d'un même système de la quadrique Q et change en elle-même toute génératrice de l'autre système.

La composition du groupe $\mathcal{G}_{n+5}$ a été étudiée par Enriques [19] en considérant le groupe des homographies de S_{n+1} reproduisant le cône Γ_n d'ordre n de sommet O. Une de ces homographies, générale, possède le point O comme point uni. L'hyperplan uni opposé ne passe pas par O. Mais le groupe $\mathcal{G}_{n+5}$ contient ∞^{n+4} homographies spéciales, possédant un point uni infiniment voisin de O, et pour lesquelles l'hyperplan uni opposé à O passe par ce point.

Le groupe $\mathcal{G}_{n+5}$ possède trois sous-groupes invariants :

a. Un groupe $\mathcal{G}_{n+4}$ formé par les ∞^{n+4} homographies spéciales ayant un point uni infiniment voisin de O;

b. Un groupe $\mathcal{G}_{n+2}$ formé par les ∞^{n+2} homologies générales de centre O (dont l'hyperplan uni ne passe pas par O);

c. Un groupe $\mathcal{G}_{n+1}$ formé par les ∞^{n+1} homologies spéciales de centre O (dont l'hyperplan uni passe par O).

Il est facile de vérifier que ces sous-groupes sont invariants. De plus, les groupes $\mathcal{G}_{n+4}$ et $\mathcal{G}_{n+2}$ contiennent chacun le groupe $\mathcal{G}_{n+1}$, mais le groupe $\mathcal{G}_{n+2}$ ne peut être contenu dans $\mathcal{G}_{n+4}$.

Le groupe $\mathcal{G}_{n+5}$ opère sur les génératrices du cône Γ_n comme le groupe ∞^3 des homographies binaires. Ce dernier groupe est simple, et d'autre part, les homologies du groupe $\mathcal{G}_{n+2}$ laissent invariante chaque génératrice du cône Γ_n; il en résulte que le sous-groupe invariant $\mathcal{G}_{n+2}$ ne saurait être contenu dans un sous-groupe invariant plus ample de $\mathcal{G}_{n+5}$ (autre que $\mathcal{G}_{n+5}$).

D'un autre côté, s'il existait un sous-groupe invariant formé d'homologies spéciales de centre O et distinct de $\mathcal{G}_{n+1}$, il devrait exister un espace linéaire, de dimension inférieure à $n+1$, passant par O, invariant pour toutes les transformations de $\mathcal{G}_{n+5}$, ce qui est impossible.

Il résulte de tout ceci que les groupes $\mathcal{G}_{n+4}$, $\mathcal{G}_{n+2}$, $\mathcal{G}_{n+1}$ sont les seuls sous-groupes invariants de $\mathcal{G}_{n+5}$.

Revenons maintenant aux transformations de Jonquières du plan, et soit $|C_1|$ le système de courbes d'ordre n invariant pour les transformations du groupe, O_1 le point $(n-1)$-uple à tangentes fixes des courbes C_1. A une homographie générale du groupe $\mathcal{G}_{n+5}$ correspond une transformation de Jonquières échangeant entre elles les droites passant par O_1 et ayant une courbe C_1 invariante, non dégénérée en deux droites passant par O_1. Lorsque l'homographie est spéciale, la courbe invariante C_1 se décompose en deux droites passant par O_1 (et comptées chacune un certain nombre de fois). Aux homologies générales et spéciales de $\mathcal{G}_{n+5}$ correspondent des transformations de

Jonquières laissant invariante toute droite passant par O_1 et possédant comme courbe invariante une courbe C_1 non dégénérée ou dégénérée en deux droites passant par O_1.

On peut voir que le groupe $\mathcal{G}_{n+5}$ est holoédriquement isomorphe à un groupe d'affinités de S_{n+1} de la manière suivante : Par dualité, il correspond au cône Γ_n, considéré comme enveloppe, une courbe rationnelle normale Γ'_n située dans l'hyperplan de l'infini. Aux transformations de $\mathcal{G}_{n+5}$ correspondent des homographies laissant invariante la courbe Γ'_n, et par suite, l'hyperplan de l'infini; ces homographies sont donc des affinités, formant un sous-groupe du groupe affine. Une affinité donne, pour des volumes correspondants, un rapport constant. Les affinités appartenant au sous-groupe correspondant à $\mathcal{G}_{n+4}$ conservent les volumes; celles qui correspondent aux homologies de $\mathcal{G}_{n+2}$ et de $\mathcal{G}_{n+1}$ sont les homothéties et les translations.

Les recherches d'Enriques sur le groupe $\mathcal{G}_{n+5}$ ont été poursuivies plus tard par Mohrmann [38].

44. **Seconde méthode pour la classification des groupes continus.** — Les résultats obtenus par Enriques ont été retrouvés par Fano [21], au moyen de raisonnements qui ont l'avantage de pouvoir être étendus aux problèmes analogues dans les espaces à un nombre quelconque de dimensions. Voici brièvement en quoi consiste la méthode de Fano.

Étant donné un groupe continu fini $\mathcal{G}$ de transformations birationnelles du plan, nous construirons un système linéaire $|C|$ invariant pour les transformations de $\mathcal{G}$ et ∞^3 au moins. En rapportant projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire S_r (r étant la dimension de $|C|$), nous obtenons une surface rationnelle F. Au groupe $\mathcal{G}$ correspond un groupe $\mathcal{G}'$ d'homographies de S_r conservant F.

Supposons le groupe $\mathcal{G}$ transitif et $\infty^k (k \geqq 2)$. Il y a dans $\mathcal{G}'$ un sous-groupe ∞^{k-2} dont les homographies laissent fixe un point donné de F, et ces homographies donnent un groupe projectif dans le faisceau des tangentes à la surface F en ce point. En utilisant les résultats de Lie, Fano montre que si ce groupe projectif dans le faisceau des tangentes est :

1° ∞^3, le groupe $\mathcal{G}$ est birationnellement équivalent à un groupe ∞^5 au moins d'homographies planes ;

2° ∞^2 (ou ∞^1, mais formé alors d'homographies paraboliques), la surface F est birationnellement équivalente à un cône rationnel normal d'un certain espace, et le groupe $\mathcal{G}$ à un groupe de transformations de Jonquières (ou, en particulier, à un groupe d'homographies laissant un point fixe);

3° ∞^1 (mais formé, en général, d'homographies non paraboliques), la surface F contient un système ∞^1 d'indice deux de courbes rationnelles. Si ce système se scinde en deux faisceaux, F se ramène birationnellement à une quadrique, et $\mathcal{G}$ à un groupe de transformations quadratiques laissant deux points fixes. Dans le cas opposé, $\mathcal{G}$ se ramène birationnellement à un groupe ∞^3 d'homographies planes laissant fixe une conique;

4° ∞^0, le groupe $\mathcal{G}'$ est simplement transitif, et F contient un faisceau de courbes rationnelles, invariant par rapport au groupe (ces courbes sont les trajectoires d'un sous-groupe invariant ∞^1). Le groupe $\mathcal{G}$ est birationnellement équivalent à un groupe de transformations de Jonquières ou à un groupe de transformations quadratiques laissant deux points fixes.

Si maintenant le groupe $\mathcal{G}$ est intransitif et n'est pas contenu dans un groupe transitif plus ample, il y aura sur la surface F un faisceau rationnel de courbes rationnelles invariantes pour les transformations du groupe. Le groupe $\mathcal{G}$ se ramènera, par une transformation birationnelle, à un groupe de transformations de Jonquières.

La détermination des groupes continus de transformations birationnelles de l'espace, birationnellement distincts, a été faite par Enriques et Fano (*Annali di Matematica*, 1897).

OUVRAGES A CONSULTER.

BERTINI. — *Geometria proiettiva degli iperspazi* (Pisa, 1907).

CLEBSCH-LINDEMANN. — *Leçons sur la Géométrie* (traduction Benoist), t. II (Paris, 1880).

DOEHLEMANN. — *Geometrische Transformationen*, t. II (Leipzig, 1908).

ENRIQUES-CHISINI. — *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, 3 vol. (Bologne, 1915-1924).

PICARD. — *Traité d'Analyse*, t. II (Paris, 1905).

PICARD et SIMART. — *Fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, 2 vol. (Paris, 1897-1906).

SEVERI. — *Lezioni di Geometria algebrica* (Padoue, 1908). — *Vorlesungen über algebraische Geometrie* (Leipzig, 1921).

STURM (R.). — *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften*, t. IV (Leipzig, 1909).

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. BERTINI. — Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano (*Annali di Matematica*, 2ᵉ série, t. VIII, 1877).
   Sulle trasformazioni univoche piane (*Rend. Istit. Lomb.*, 1880).
2. BERTINI. — Sui sistemi lineari (*Rend. Istit. Lomb.*, 1880).
3. BERTINI. — Trasformazione di una curva algebrica in un'altra con soli punti doppi (*Rivista Matematica*, 1891 ; *Math. Annalen*, t. XLIV, 1893).
4. BRILL. — Ueber Singularitäten ebener algebraischer Curven (*Math. Annalen*, t. XVI, 1879).
5. CASTELNUOVO. — Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche (*Rend. Circolo Palermo*, t. IV, 1890).
   Sulle superficie le cui sezioni sono curve di genere 3 (*Atti Acc. Torino*, t. XXV, 1890).
6. CASTELNUOVO. — Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane (*Mem. Acc. Torino*, 2ᵉ série, t. XLII, 1891).
7. CASTELNUOVO. — Sulla razionalità delle involuzioni piane (*Math. Annalen*, t. XLIV, 1893).
8. CASTELNUOVO. — Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano (*Atti Acc. Torino*, t. XXXVI, 1901).
9. CAYLEY. — On the higher singularities of a plane curve (*Quart. Journal*, 1865).
   Note sur les singularités supérieures des courbes planes (*Journal de Crelle*, t. 64, 1865).
10. CAYLEY. — A memoir on the rational transformation between two spaces (*Proc. London Math. Soc.*, t. III, 1870).
11. CHISINI. — Sul teorema di Nœther relativo alle decomponibilità di una trasformazione cremoniana in un prodotto di trasformazioni quadratiche (*Atti Soc. Natur. e Matem. Modena*, 1921).
12. CLEBSCH. — Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen... (*Math. Annalen*, t. IV, 1871).
13. COSSERAT. — Sur l'étude d'une courbe algébrique dans le voisinage d'un de ses points (*Annales de Toulouse*, 1890).

14. Cremona. — Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane (*Mem. Acc. Bologna*, 1863. 1865; *Œuvres*, t. II).

Sur les transformations géométriques des figures planes (trad. par Dewulf) (*Bull. Sc. math*, t. V, 1873).

15. De Franchis. — Sui reti sovrabbondanti di curve piane di genere 2. Riduzione dei fasci di curve piane di genere 2 (*Rend. Circ. Palermo*, t. XIII, 1899).

16. De Jonquières. — Solution d'une question d'Analyse indéterminée..., Sur la dérivation des solutions dans la théorie des transformations Cremona (*C. R. Ac. Sc.*, t. 101, 1885).

Étude sur une question d'Analyse indéterminée (*Giornale di Matematiche*, 1888).

17. Del Pezzo. — Sulle superficie dell'n^{mo} ordine immerse nello spazio di n dimensioni (*Rend. Circ. Palermo*, t. I, 1887).

18. Enriques. — Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniani nel piano (*Rend. Acc. Lincei*, 1er semestre, 1893).

19. Enriques. — Sopra un gruppo continuo di trasformazioni di Jonquières nel piano (*Rend. Acc. Lincei*, 1er semestre 1893).

20. Enriques. — Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche (*Atti Acc. Torino*, t. XXXVII, 1901).

21. Fano. — Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive in sè. Sui gruppi continui di trasformazioni Cremoniane del piano, e sopra certi gruppi di trasformazioni projettive (*Rend. Circ. Palermo*, t. X, 1895).

22. Fano. — Osservazioni sopra il sistema aggiunto puro di un sistema lineare di curve piane (*Rend. Circ. Palermo*, t. XI, 1915).

23. Ferretti. — Sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane irreductibili di genere p; in particolare per i valori 0,1,2 del genere (*Rend. Circ. Palermo*, t. XVI, 1902).

24. Ferretti. — Sulla generazione delle involuzioni piane di classe zero ed uno (*Rend. Circ. Palermo*, t. XVII, 1903).

25. Gambier. — Système linéaire de courbes algébriques de degré donné admettant un groupe donné de points-base (*Annales École Norm.*, 1924).

26. Godeaux. — Sur les faisceaux de cubiques planes cuspidales (*Nouv. Ann. de Math.*, octobre 1924).

27. Guccia. — Generalisazione di un teorema di Nœther. Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche (*Rend. Circ. Palermo*, t. I, 1887).

28. Guccia. — Due sistemi lineari di ordine minimo, di genere $p = 2$ (*Rend. Circ. Palermo*, t. I, 1887).

29. Halphen. — Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques planes (1874) (*Mém. prés. à l'Acad. des Sciences*, t. XXVI; *Œuvres*, t. I).

Etude sur les points singuliers des courbes algébriques planes (Appendice au *Traité de Géométrie analytique* de Salmon, 1884; *Œuvres*, t. IV).

30. HALPHEN. — Sur les courbes planes du sixième ordre à neuf points doubles (*Bull. Soc. Math. France*, t. X, 1881-1882; *Œuvres*, t. II).

31. HAMBURGER. — Ueber die Entwicklung algebraischer Functionen in Reihen (*Zeitschr. math. Phys.*, 1871).

32. JUNG. — Ricerche sui sistemi lineari di genere qualunque e sulla loro riduzione all'ordine minimo (*Annali di Matem.*, 2^e^ série, t. XV et XVI, 1887-1889).

33. KANTOR. — Sur une théorie des courbes et des surfaces admettant des correspondances univoques (*C. R. Ac. Sc.*, t. 100, 1885).

Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques (*Atti Acc. Napoli*, 2^e^ série, t. IV, 1891).

Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene (*Acta math.*, t. XIX, 1895).

Theorie der endlischen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene (Berlin, 1895).

34. LARICE. — Sulle trasformazioni cremoniane (*Atti Istit. Veneto*, t. LXVIII. 1908).

35. LEGAUT. — Sur les systèmes de points du plan. Application aux courbes gauches algébriques (*C. R. Ac. Sc.*, t. 178 et 179, 1924; *Thèse*, Paris, 1925).

36. MARTINETTI. — Sopra i sistemi lineari di curve piane algebriche di genere uno (*Rend. Istit. Lombardo*, 1887).

37. MARTINETTI. — Sopra alcuni sistemi di curve piane algebriche di genere due (*Rend. Circ. Palermo*, t. I, 1887).

38. MOHRMANN. — Ueber die automorphe Collineationsgruppe des rationalen Normalkegels *n*. Ordnung (*Rend. Circ. Palermo*, t. XXXI, 1911).

Bestimmung aller Normalflaechen mit transitiven automorphen Gruppen von projectiven Transformationen (*Ibid.*, t. XXXII, 1911).

39. MONTESANO. — Su le reti omaloidiche di curve (*Rend. Acc. Napoli*, 1905).

Su i gruppi cremoniani di numeri (*Atti Acc. Napoli*, 2^e^ série, t. XV, 1911),

Su i quadri caratteristici delle corrispondenze birazionali (*Rend. Acc. Napoli*, 1915).

Le corrispondenze birazionali piane emisimmetriche (*Rend. Acc. Napoli*, 1918).

40. NENCINI. — Sulla classificazione aritmetica di Nœther dei sistemi lineari di curve algebriche piane (Palermo, 1916; *Annali di Matematica*, 2^e^ série, t. XXVII, 1918).

41. NOETHER. — Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen (*Math. Annalen*, t. III, 1870).

Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen (*Math. Annalen*, t. V, 1872).

42. NOETHER. — Ueber die singulären Wertsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve (*Math. Annalen*, t. IX, 1875).

43. Noether. — Les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier (*Rend. Circ. Palermo*, t. IV, 1890).

44. Pannelli. — Sopra una proprietà delle trasformazioni birazionali nello spazio ordinario (*Rend. Acc. Lincei*, 1^er^ semestre, 1910).

45. Picard. — Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales (*Bull. Soc. Philom. Paris*, 1878; *Journal de Crelle*, t. 100).

Sur les systèmes linéaires de genre zéro (*Atti Acc. Torino*, t. XXXVI, 1901).

46. Puiseux. — Recherches sur les fonctions algébriques (*Journal de Liouville*, 1850, 1851).

47. Roberts. — On professor Cremona's Transformation between two planes... (*Proc. London Math. Soc.*, t. IV, 1872).

48. Rosanes. — Ueber diejenigen rationalen Substitutionen, welche eine rationale Umkehrung zulassen (*Journal de Crelle*, t. 73, 1870).

49. Ruffini. — Sulla risoluzione delle due equazioni... (*Mem. Acc. Bologna*, 1877).

Di un problema di analisi indeterminata (*Mem. Acc. Bologna*, 1878).

Di alcuni singolarità nei fasci e nelle reti...(*Mem. Acc. Bologna*, 1886).

50. Scorza. — Le superficie a curve sezioni di genere 3 (*Annali di Matem.*, 3^e^ série, t. XVI, 1909).

51. Segre. — Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p (*Rend. Circ. Palermo*, t. I, 1887).

52. Segre. — Un'osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni cremoniane e dei sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche (*Atti Acc. Torino*, t. XXXVI, 1901).

53. Severi. — Su alcune proprietà dei moduli di forme algebriche (*Atti Acc. Torino*, t. XLI, 1905),

54. Smith. — On the higher singularities of plane curves (*Proc. London Math. Soc.*, t. VI, 1875).

55. Valdes Franciosi. — Sulla riduzione delle trasformazioni cremoniane ad un prodotto di trasformazioni quadratiche e sulla riduzione all' ordine minimo dei sistemi lineari di curve irriducibili di genere $p = 0, 1, 2$ (*Giornale di Matematiche*, 1918).

56. Vessiot. — Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions algébriques (*Annales de Toulouse*, 1896).

57. Wiman. — Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene (*Math. Annalen*, t. XLVIII, 1897).

58. Young. — Notes on Bertini's transformation of a curve into one possessing only nodes (*Atti Acc. Torino*, t. XLII, 1906).

59. Zeuthen. — Note sur les singularités des courbes planes (*Math. Annalen*, t. X, 1876).

60. Hudson. — Plane homaloidal families of general degree (*Proc. London Math. Soc.*, t. XXII, 1923).

61. Castelnuovo. — Massima dimensione dei sistemi lineari di curve piane di dato genere (*Annali di Matematica*, t. XVIII, 1890)

TABLE DES MATIÈRES.

IV. — *Composition des transformations birationnelles.*

V. — *La géométrie algébrique plane.*

VI. — *Groupes continus finis de transformations birationnelles.*