GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE.

Sur les Surfaces de Picard de diviseur deux,

par L. GODEAUX, professeur à l'Université de Liége.

Nous nous proposons, dans cette note, de montrer comment on peut construire une surface de Picard de diviseur deux en partant d'une surface de Kümmer. D'une manière précise, nous établirons que si x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 sont les coordonnées projectives homogènes d'un espace linéaire à cinq dimensions S_5,

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad x_5 = x_6 = 0$$

les équations d'une surface de Kümmer,

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

les équations de deux quadriques de l'espace $x_5 = x_6 = 0$, touchant la surface de Kümmer le long de biquadratiques gauches associées (c'est-à-dire ne passant pas par les mêmes points singuliers de la surface de Kümmer) ; les équations

$$\Phi = 0, \qquad x_5^2 = \varphi_1, \qquad x_6^2 = \varphi_2$$

représentent une surface de Picard de diviseur deux (du seizième ordre).

Pour établir ce résultat, nous utilisons les recherches de Humbert (*) et de MM. Enriques et Severi (**) sur les surfaces hyperelliptiques, ainsi que les nôtres sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un (***). Les

(*) G. HUMBERT, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques.* (JOURNAL DE LIOUVILLE, 1893, 4e série, t. IX, pp. 29-170, 361-475.)

(**) F. ENRIQUES et F. SEVERI, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques.* (ACTA MATHEMATICA, 1903, t. XXXII, pp. 283-392 et t. XXXIII, pp. 321-403.)

(***) L. GODEAUX, *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un.* (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE, 1914, pp. 357-430; 1919, pp. 51-70.)

méthodes utilisées dans cette note permettent d'étudier les involutions régulières d'ordre deux, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à des surfaces algébriques irrégulières, comme nous le montrerons prochainement (*).

1. — Soit F une surface de Jacobi, à modules généraux; cette surface a les genres $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$ et représente les couples de points, non ordonnés, d'une courbe de genre deux à modules généraux. La surface F contient un système continu complet, ∞^2, $\{C\}$, de degré deux, de courbes de genre deux, C. La surface F possède deux séries ∞^2 de transformations birationnelles en elle-même; les transformations de l'une de ces séries, que nous appellerons transformations de première espèce, ne sont pas en général cycliques et forment un groupe continu transitif; les transformations de la seconde série, que nous appellerons transformations de seconde espèce, sont toutes involutives et ne forment pas un groupe. Le produit de deux transformations de seconde espèce est une transformation de première espèce. Les transformations de première et de seconde espèce transforment en lui-même le système $\{C\}$.

Une transformation de première espèce, lorsqu'elle est cyclique, engendre une involution privée de points unis et dont l'image est une surface de Picard (de genres $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$). En particulier, une transformation involutive de première espèce a pour image une surface de Picard de diviseur deux (**).

(*) Au sujet de ces recherches, voir nos trois notes *Sur les involutions régulières d'ordre deux appartenant à une surface irrégulière*. (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1924, pp. 434-446; 1925, pp. 37-47, 157-166), ainsi qu'une communication faite au Congrès des Mathématiciens de Toronto, 1924 (en cours d'impression).

(**) Les propriétés contenues dans les deux premiers paragraphes sont connues; on en trouvera une exposition dans le mémoire cité de MM. Enriques et Severi. Rappelons que M. Picard, dans son mémoire *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (Journal de Liouville, 1885, 1889), a étudié les variétés algébriques de dimension q, admettant un groupe continu transitif ∞^q de transfor-

Soient T une transformation (involutive) de seconde espèce, I_2 l'involution, d'ordre deux, engendrée par cette transformation. On sait que l'involution I_2 possède 16 points unis et que la transformation T transforme en elle-même 16 courbes du système $\{C\}$, chacune de ces seize courbes passant par six des points unis de l'involution I_2. Nous adopterons, pour représenter ces points unis et ces courbes invariantes, la notation de G. Humbert *(loc. cit.)*. Les points seront représentés par P_{ik} et les courbes par C_{ik}, les indices i, k pouvant prendre toutes les valeurs de un à quatre. Si l'on désigne par

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta,$$
$$\alpha', \beta', \gamma', \delta'$$

deux permutations quelconques des nombres 1, 2, 3, 4, la courbe $C_{\alpha\alpha'}$ contient les points unis $P_{\alpha\beta'}$, $P_{\alpha\gamma'}$, $P_{\alpha\delta'}$, $P_{\beta\alpha'}$, $P_{\gamma\alpha'}$, $P_{\delta\alpha'}$. Par le point $P_{\alpha\alpha'}$ passent les courbes $C_{\alpha\beta'}$, $C_{\alpha\gamma'}$, $C_{\alpha\delta'}$, $C_{\beta\alpha'}$, $C_{\gamma\alpha'}$, $C_{\delta\alpha'}$.

L'involution I_2 a pour image une surface de Kummer Φ, dont nous désignerons les sections planes par Γ. Aux seize points unis P_{ik} de I_2 correspondent, sur Φ, seize points doubles coniques; chacun de ces points doubles est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré — 2. Nous désignerons par le même symbole, γ_{ik}, le point double de Φ qui correspond à P_{ik} et la courbe rationnelle de degré — 2 équivalente à ce point. Aux courbes C transformées en elles-mêmes par T correspondent, sur Φ, des coniques; nous désignerons par Γ_{ik} la conique qui correspond à la courbe C_{ik}. On sait que le plan d'une conique Γ_{ik} est tangent

mations birationnelles. Ces variétés sont appelées *variétés de Picard* et, dans le cas $q = 2$, *surfaces de Picard*. Au sujet de la formation de ces dernières, voir une note de M. Severi : *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo...* (Atti Ist. Veneto, 1907-1908.) Remarquons que les transformations de F, désignées ici par transformations de première et deuxième espèces, sont appelées respectivement transformations de deuxième et première espèces par MM. Enriques et Severi.

à la surface Φ le long de cette conique; cette propriété se traduit par des égalités fonctionnelles de la forme

$$\Gamma \equiv 2\Gamma_{\alpha\alpha'} + \gamma_{\alpha\beta'} + \gamma_{\alpha\gamma'} + \gamma_{\alpha\delta'} + \gamma_{\beta\alpha'} + \gamma_{\gamma\alpha'} + \gamma_{\delta\alpha'}.$$

2. — La surface de Kummer Φ contient trente faisceaux de biquadratiques gauches, étudiés par G. Humbert (*loc. cit.*). Nous rappellerons ici comment ces faisceaux s'obtiennent en partant de la surface de Jacobi F.

Le système continu $\{C\}$ est transformé en lui-même par T, et il en est par suite de même du système continu $\{2C\}$. Le système continu complet $\{2C\}$ est formé de ∞^2 systèmes linéaires de dimension trois, de degré huit, de courbes de genre cinq. Il existe seize de ces systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par T. L'un de ces systèmes est composé au moyen de I_2 (chacune de ses courbes est transformée en elle-même par T); il lui correspond, sur la surface Φ, le système $|\Gamma|$ des sections planes de cette surface. Dans chacun des quinze autres systèmes, il existe deux faisceaux formés de courbes transformées en elles-mêmes par T. Chacun de ces faisceaux a huit points-base qui sont des points unis de I_2; un point uni de I_2 ne peut être point-base à la fois pour les deux faisceaux appartenant à un même système. Aux trente faisceaux de courbes ainsi déterminés sur F correspondent sur Φ les trente faisceaux de biquadratiques gauches. Les courbes de chacun de ces faisceaux passent par huit des seize points singuliers de la surface de Kümmer Φ. Les biquadratiques gauches de Φ passant par huit points singuliers de cette surface, et les biquadratiques gauches passant par les huit autres points singuliers sont dites associées; elles proviennent de courbes du système $\{2C\}$ appartenant à un même système linéaire.

Un faisceau de biquadratiques de Φ contient quatre courbes dégénérées en des couples de coniques Γ_{ik}. Considérons, pour fixer les idées, le faisceau de biquadratiques contenant les couples de coniques Γ_{11} et Γ_{22}, Γ_{12} et Γ_{21}, Γ_{33} et Γ_{44}, Γ_{34} et Γ_{43};

désignons-le par $|\Gamma_1|$. Les courbes Γ_1 passent par les huit points singuliers

$$\gamma_{13},\ \gamma_{14},\ \gamma_{23},\ \gamma_{24},\ \gamma_{31},\ \gamma_{32},\ \gamma_{41},\ \gamma_{42}.$$

On a les égalités fonctionnelles suivantes :

$$2\Gamma \equiv 2\Gamma_1 + \gamma_{13} + \gamma_{14} + \gamma_{23} + \gamma_{24} + \gamma_{31} + \gamma_{32} + \gamma_{41} + \gamma_{42}, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1 &\equiv \Gamma_{11} + \Gamma_{22} + \gamma_{12} + \gamma_{21}, \\ \Gamma_1 &\equiv \Gamma_{12} + \Gamma_{21} + \gamma_{11} + \gamma_{22}, \\ \Gamma_1 &\equiv \Gamma_{33} + \Gamma_{44} + \gamma_{34} + \gamma_{43}, \\ \Gamma_1 &\equiv \Gamma_{34} + \Gamma_{43} + \gamma_{33} + \gamma_{44}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Les biquadratiques Γ_2 associées aux biquadratiques Γ_1 passent par les points singuliers

$$\gamma_{11},\ \gamma_{22},\ \gamma_{12},\ \gamma_{21},\ \gamma_{33},\ \gamma_{44},\ \gamma_{34},\ \gamma_{43},$$

et l'on a les relations fonctionnelles

$$2\Gamma \equiv 2\Gamma_2 + \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{12} + \gamma_{21} + \gamma_{33} + \gamma_{44} + \gamma_{34} + \gamma_{43}, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_2 &\equiv \Gamma_{13} + \Gamma_{24} + \gamma_{14} + \gamma_{23}, \\ \Gamma_2 &\equiv \Gamma_{14} + \Gamma_{23} + \gamma_{13} + \gamma_{24}, \\ \Gamma_2 &\equiv \Gamma_{31} + \Gamma_{42} + \gamma_{32} + \gamma_{41}, \\ \Gamma_2 &\equiv \Gamma_{32} + \Gamma_{41} + \gamma_{31} + \gamma_{42}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Rappelons, enfin, qu'il existe une quadrique inscrite à la surface Φ le long de toute biquadratique tracée sur cette surface.

3. — Nous avons démontré *(loc. cit.)* que si une surface du quatrième ordre possède huit points doubles coniques et s'il existe une quadrique passant par ces huit points et inscrite à la surface le long d'une biquadratique gauche, cette surface est l'image d'une involution d'ordre deux, appartenant à une surface de genres un. Les points unis de cette involution correspondent aux points doubles coniques de la surface du quatrième ordre considérée.

Appliquons ce théorème à la surface Φ, en considérant les biquadratiques Γ_1 et les huit points doubles de Φ appartenant à ces courbes. La surface Φ est l'image d'une involution I'_2, d'ordre deux, appartenant à une surface Ψ', de genres un $(p_a = P_4 = 1)$; les points unis de l'involution I'_2 correspondent aux points doubles $\gamma_{13}, \gamma_{14}, \ldots, \gamma_{42}$ de Φ; nous les désignerons par $P'_{13}, P'_{14}, P'_{23}, P'_{24}, P'_{31}, P'_{32}, P'_{41}, P'_{42}$.

Aux courbes Γ, de genre trois, sections planes de Φ, correspondent, sur Ψ', des courbes de genre cinq que nous désignerons par L'. Les courbes L' appartiennent à un système complet $|L'|$, ∞^5, de genre cinq et de degré huit. Le système $|\Gamma|$ étant simple, il en est de même du système $|L'|$. En rapportant projectivement les courbes du système $|L'|$ aux hyperplans d'un espace linéaire à cinq dimensions S_5, on obtient, comme transformée birationnelle de la surface Ψ', une surface normale simple, d'ordre huit, à sections hyperplanes de genre cinq. Nous prendrons dans la suite cette surface normale comme modèle projectif de la surface Ψ', et nous la désignerons par Ψ' également.

Soit L une courbe de Ψ' transformée d'une courbe Γ_1. Entre les courbes Γ_1, L existe une correspondance (1, 2) présentant huit points de diramation sur Γ_1; la courbe Γ_1 étant elliptique, la courbe L est de genre cinq et passe d'ailleurs par les points $P'_{13}, P'_{14}, \ldots, P'_{42}$. Aux courbes rationnelles de degré — 2, $\gamma'_{13}, \gamma'_{14}, \ldots, \gamma'_{42}$ correspondent sur Ψ' les points $P'_{13}, P'_{14}, \ldots, P'_{42}$ (qui peuvent être considérés comme des courbes rationnelles exceptionnelles de degré — 1). La relation fonctionnelle (1) donne donc, sur Ψ',

$$L' \equiv L,$$

et les courbes L appartiennent donc au système complet $|L'|$. Ce sont précisément les courbes du système $|L'|$ passant par les huit points unis de l'involution I'_2, comme cela résulte de nos recherches antérieures (*loc. cit.*).

Aux huit points doubles $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{33}, \gamma_{44}, \gamma_{34}, \gamma_{43}$ de Φ correspondent, sur Ψ', seize points doubles coniques.

Nous désignerons par a'_{ik}, b'_{ik} les points doubles qui correspondent au point γ_{ik}. Les mêmes symboles a'_{ik}, b'_{ik} serviront également pour désigner les courbes rationnelles de degré — 2 équivalentes, vis-à-vis des transformations birationnelles, aux points doubles correspondants.

Aux biquadratiques elliptiques Γ_2 de Φ correspondent, sur Ψ', des courbes que nous désignerons par L'_0. Les courbes Γ_2 ne passant par aucun point de diramation pour la correspondance entre Φ et Ψ', les courbes L'_0 sont elliptiques. Ces courbes sont de plus du huitième ordre et passent par les 16 points doubles a'_{ik}, b'_{ik} de Φ'. La relation fonctionnelle (3) donne

$$\left.\begin{aligned} 2L' \equiv 2L'_0 &+ a'_{11} + a'_{22} + a'_{12} + a'_{21} + a'_{33} + a'_{44} + a'_{34} + a'_{43} \\ &+ b'_{11} + b'_{22} + b'_{12} + b'_{21} + b'_{33} + b'_{44} + b'_{34} + b'_{43}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Il en résulte qu'il existe une hyperquadrique touchant la surface Ψ' le long de toute courbe L'_0.

4. — Nous étudierons actuellement les courbes qui correspondent, sur Ψ', aux huit coniques de la surface Φ qui font partie des courbes du faisceau $|\Gamma_1|$.

Considérons la conique Γ_{11} et désignons par L'_{11} la courbe qui lui correspond sur Ψ'. La courbe L'_{11} est du quatrième ordre. La conique Γ_{11} passant par quatre points de diramation γ_{13}, γ_{14}, γ_{23}, γ_{24} de Φ, la courbe L'_{11} est elliptique et irréductible. On a

$$\Gamma \equiv 2\Gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{21} + \gamma_{13} + \gamma_{14} + \gamma_{23} + \gamma_{24}$$

et, par suite,

$$L' \equiv 2L'_{11} + a'_{12} + a'_{21} + b'_{12} + b'_{21}. \quad (6)$$

La courbe L'_{11} passe par les quatre points doubles a'_{12}, a'_{21}, b'_{12}, b'_{21} de Ψ' et il existe un hyperplan touchant cette surface le long de cette courbe.

De même, la courbe L'_{22} qui correspond sur Ψ' à la conique

Γ_{22} est du quatrième ordre, irréductible et elliptique; elle satisfait à la relation fonctionnelle

$$L' \equiv 2L'_{22} + a'_{12} + a'_{21} + b'_{12} + b'_{21}. \quad (7)$$

On en conclut que les courbes L'_{11}, L'_{22} sont équivalentes et appartiennent à un même faisceau que nous désignerons par $|L'_{11,22}|$; ce faisceau est d'ailleurs complet, puisque la surface Ψ' est de genres un. Les courbes du faisceau $|L'_{11,22}|$ passent par les points doubles a'_{12}, a'_{21}, b'_{12}, b'_{21} ou, d'une manière plus précise, elles rencontrent chacune en un point les courbes rationnelles de degré — 2 représentées par ces symboles.

Désignons par T' la transformation birationnelle de Ψ' en elle-même, involutive, engendrant l'involution I'_2. Observons qu'une courbe quelconque du faisceau $|L'_{11,22}|$, étant elliptique et du quatrième ordre, est nécessairement une biquadratique gauche. Si, en effet, cette courbe était plane, elle posséderait deux points doubles nécessairement variables, ce qui est impossible. Il en résulte qu'une courbe $L'_{11,22}$ appartient à un espace linéaire à trois dimensions, qu'elle détermine. Les ∞^1 espaces à trois dimensions déterminés par les courbes $L'_{11,22}$ passent tous par les points a'_{12}, a'_{21}, b'_{12}, b'_{21}; ces points ne peuvent appartenir à une droite, car alors les hyperplans passant par cette droite découperaient, sur Ψ', un système linéaire ∞^3 de courbes elliptiques du huitième ordre qui ne saurait être composé au moyen de $|L'_{11,22}|$, et, par suite, Ψ' serait rationnelle, ce qui est impossible. Les quatre points a'_{12}, a'_{21}, b'_{12}, b'_{21} appartiennent donc à un plan que nous désignerons par $\varpi_{11,\,22}$. Mais alors, les espaces S_3 déterminés par deux courbes du faisceau $|L'_{11,22}|$ appartiennent à un même hyperplan et, par suite, les ∞^1 hyperplans, passant par une courbe $L'_{11,22}$, découpent sur Ψ' les courbes du faisceau $|L'_{11,22}|$.

Une courbe du faisceau $|L'_{11,22}|$, distincte de L'_{11}, L'_{22}, ne peut être transformée en elle-même par T', car cette courbe ne passe par aucun point uni de I'_2 et il lui correspondrait, sur Φ, une courbe elliptique d'ordre deux, ce qui est absurde. La transformation T' échange donc entre elles les courbes du faisceau $|L'_{11,22}|$ et en laisse deux, L'_{11}, L'_{22}, invariantes. A une courbe $L'_{11,22}$, distincte de L'_{11}, L'_{22} correspond sur Φ une courbe elliptique du quatrième ordre passant par les points doubles γ_{12}, γ_{21}, c'est-à-dire nécessairement une section plane de Φ passant par ces points. A une section de Φ par un plan passant par γ_{12}, γ_{21} correspondent donc deux courbes du faisceau $|L'_{11,22}|$, conjuguées par rapport à T' (ces deux courbes coïncident lorsque le plan considéré contient l'une des coniques Γ_{11}, Γ_{22}).

Les ∞^2 hyperplans passant par $\varpi_{11,22}$ découpent, sur Ψ', un réseau de courbes elliptiques du huitième ordre composé au moyen du faisceau $|L'_{11,22}|$, chaque courbe du réseau étant formée de deux courbes du faisceau. En particulier, les courbes L'_{11}, L'_{22} appartiennent à un même hyperplan; c'est ce qui résulte d'ailleurs de la première des relations fonctionnelles (2), qui donne, sur Ψ',

$$L' \equiv L'_{11} + L'_{22} + a'_{12} + a'_{21} + b'_{12} + b'_{21}. \tag{8}$$

On arrive à des conclusions analogues en partant des couples de coniques Γ_{12} et Γ_{21}, Γ_{33} et Γ_{44}, Γ_{34} et Γ_{43}; ces conclusions peuvent être résumées dans l'énoncé suivant :

Les seize points doubles de la surface Ψ' se répartissent en quatre groupes de quatre points, les points d'un même groupe appartenant à un même plan.

Les hyperplans passant par un de ces plans coupent la surface Ψ' suivant des couples de biquadratiques gauches elliptiques appartenant à un même faisceau. Ce faisceau est transformé en lui-même par T' et cette transformation laisse invariantes deux courbes du faisceau; chacune de ces courbes contient quatre points unis de l'involution I'_2.

Nous désignerons par $\varpi_{12,21}$ le plan contenant les points doubles a'_{11}, a'_{22}, b'_{11}, b'_{22}; par $\varpi_{33,44}$ le plan contenant les points doubles a'_{34}, a'_{43}, b'_{34}, b'_{43}; par $\varpi_{34,43}$ le plan contenant les points doubles a'_{33}, a'_{44}, b'_{33}, b'_{44}. Les faisceaux de biquadratiques gauches elliptiques déterminés par les hyperplans passant respectivement par ces plans seront dénotés par $|L'_{12,21}|$, $|L'_{33,44}|$, $|L'_{34,43}|$. Enfin, les courbes de ces faisceaux qui correspondent respectivement aux coniques Γ_{12}, Γ_{21}, Γ_{33}, Γ_{44}, Γ_{34}, Γ_{43} seront dénotées par L'_{12}, L'_{21}, L'_{33}, L'_{44}, L'_{34}, L'_{43}.

5. — Passons maintenant à l'étude des courbes qui correspondent, sur Ψ', aux coniques de Φ n'appartenant pas comme parties à des courbes du faisceau $|\Gamma_1|$. Une de ces coniques contient deux des huit points de diramation de la surface Φ; par suite, il lui correspond, sur Ψ', une courbe rationnelle. Cette courbe est du quatrième ordre.

Considérons, pour fixer les idées, la conique Γ_{13} et soit L'_{13} la courbe qui lui correspond sur Ψ'. La conique Γ_{13} passe par les points γ_{14}, γ_{23}, γ_{12}, γ_{11}, γ_{33}, γ_{43}. Les deux premiers sont des points de diramation; la courbe L'_{13} passe donc par les points P'_{14}, P'_{23}, unis pour I'_2. La courbe L'_{13} passe de plus par les points doubles a'_{12}, a'_{11}, a'_{33}, a'_{43}, b'_{12}, b'_{11}, b'_{33}, b'_{43}, c'est-à-dire par huit points doubles dont deux appartiennent à chacun des plans $\varpi_{11,22}$, $\varpi_{12,21}$, $\varpi_{33,44}$, $\varpi_{34,43}$.

La relation fonctionnelle

$$\Gamma \equiv 2\Gamma_{13} + \gamma_{14} + \gamma_{23} + \gamma_{12} + \gamma_{11} + \gamma_{33} + \gamma_{43}$$

donne, sur la surface Ψ',

$$L' \equiv 2L'_{13} + a'_{11} + a'_{12} + a'_{33} + a'_{43} + b'_{11} + b'_{12} + b'_{33} + b'_{43}.$$

Il en résulte qu'il existe un hyperplan touchant la surface Ψ' le long de la courbe L'_{13}. On observera d'ailleurs que cette courbe, étant du quatrième ordre et rationnelle, appartient nécessairement à un hyperplan.

De même, à la courbe Γ_{24} correspond, sur Ψ', une courbe rationnelle du quatrième ordre L'_{24}, le long de laquelle la surface Ψ' est touchée par un hyperplan. La courbe L'_{24} passe par les points P'_{14}, P'_{23} unis pour I'_2, et par les huit points doubles de Ψ' qui n'appartiennent pas à L'_{13}. On a

$$L' \equiv 2L'_{24} + a'_{22} + a'_{21} + a'_{44} + a'_{34} + b'_{22} + b'_{21} + b'_{41} + b'_{34}.$$

D'autre part, la première des relations fonctionnelles (4) donne

$$L'_0 \equiv L'_{13} + L'_{24}.$$

On parvient à des résultats analogues en considérant les courbes L'_{14}, L'_{23}, L'_{31}, L'_{42}, L'_{32}, L'_{41} qui correspondent sur Ψ' respectivement aux coniques Γ_{14}, Γ_{23}, Γ_{31}, Γ_{42}, Γ_{32}, Γ_{41}. Par suite

Il existe huit hyperplans touchant la surface Ψ' le long de quartiques gauches rationnelles. Chacune de ces quartiques passe par huit des points doubles de Ψ', deux appartenant à chacun des plans $\varpi_{11,\,22}$, $\varpi_{12,\,21}$, $\varpi_{33,\,44}$, $\varpi_{34,\,43}$.

Il est, de plus, aisé de voir que chacun des groupes de quatre points doubles appartenant à un même plan se partage en deux couples, chaque couple appartenant à quatre des quartiques rationnelles. Ainsi, par exemple, les points a'_{12}, b'_{12} du plan $\varpi_{11,\,22}$ appartiennent aux quartiques L'_{13}, L'_{14}, L'_{42}, L'_{32}, les points a'_{21}, b'_{21} aux quartiques L'_{24}, L'_{23}, L'_{31} et L'_{41}.

6. — L'existence du faisceau $|\Gamma_2|$, sur la surface Φ, et de la relation fonctionnelle (3) entraîne celle d'une surface Ψ'', de genres un ($p_a = P_4 = 1$), analogue à Ψ', possédant une involution I''_2, d'ordre deux, dont Φ est l'image. On peut prendre, pour modèle projectif de la surface Ψ'', une surface normale d'ordre huit, à sections hyperplanes L'' de genre cinq, appartenant à un espace linéaire à cinq dimensions. L'involution I''_2 possède huit points unis que nous désignerons par P''_{11}, P''_{22}, P''_{12}, P''_{21}, P''_{33}, P''_{44}, P''_{34}, P''_{43}; ces points correspondent aux points doubles de Φ appartenant à toutes les courbes Γ_2 et qui sont les points de diramation de la correspondance (1, 2) existant entre Φ et Ψ''.

Aux huit points doubles $\gamma_{13}, \gamma_{14}, \gamma_{23}, \gamma_{24}, \gamma_{31}, \gamma_{32}, \gamma_{41}, \gamma_{42}$ de Φ correspondent seize points doubles coniques de Ψ''. Nous désignerons par a''_{ik}, b''_{ik} les points doubles qui correspondent au point γ_{ik} et nous utiliserons, comme plus haut, les mêmes symboles pour désigner les courbes rationnelles de degré — 2 équivalentes à ces points vis-à-vis des transformations birationnelles de la surface Ψ''.

Comme dans le cas de la surface Ψ', on établit les points suivants :

Aux sections planes de Φ correspondent des sections hyperplanes L'' de Ψ''. Aux courbes Γ_2, correspondent les sections hyperplanes de Ψ'' passant par les huit points unis de l'involution I''_2.

Aux courbes Γ_1 correspondent des courbes elliptiques d'ordre huit L''_0, passant par les seize points doubles de Ψ'' (c'est-à-dire rencontrant en un point chacune des courbes rationnelles équivalentes à ces points). On a la relation fonctionnelle

$$\begin{aligned} 2L'' \equiv 2L''_0 &+ a''_{13} + a''_{14} + a''_{23} + a''_{24} + a''_{31} + a''_{32} + a''_{41} + a''_{42} \\ &+ b''_{13} + b''_{14} + b''_{23} + b''_{24} + b''_{31} + b''_{32} + b''_{41} + b''_{42}. \end{aligned}$$

Les seize points doubles de la surface Ψ'' se répartissent en quatre groupes de quatre, les points d'un même groupe étant situés dans un même plan. Les points a''_{14}, a''_{23}, b''_{14}, b''_{23} appartiennent à un plan $\varpi_{13,\,24}$; les points a''_{13}, a''_{24}, b''_{13}, b''_{24} à un plan $\varpi_{14,\,23}$; les points a''_{32}, a''_{41}, b''_{32}, b''_{41} à un plan $\varpi_{31,\,42}$; enfin les points a''_{31}, a''_{42}, b''_{31}, b''_{42} à un plan $\varpi_{32,\,41}$.

Les hyperplans passant par un de ces plans découpent, sur Ψ'', un réseau composé au moyen d'un faisceau de biquadratiques elliptiques, rencontrant en un point chacune des courbes rationnelles équivalentes aux points doubles de Ψ'' contenus dans le plan considéré. On obtient ainsi quatre faisceaux de biquadratiques elliptiques $|L''_{13,24}|$, $|L''_{14,23}|$, $|L''_{31,42}|$, $|L''_{32,41}|$. Le faisceau $|L''_{13,24}|$ contient les courbes L''_{13}, L''_{24} transformées des coniques Γ_{13}, Γ_{24}; le faisceau $|L''_{14,23}|$ contient les transformées L''_{14}, L''_{23} des coniques Γ_{14}, Γ_{23}; le faisceau $|L''_{31,42}|$, les transformées L''_{31}, L''_{42} des coniques Γ_{31}, Γ_{42}; enfin le faisceau $|L''_{32,41}|$, les transformées L''_{32}, L''_{41} des coniques Γ_{32}, Γ_{41}.

Pour le premier des faisceaux, par exemple, on a la relation fonctionnelle

$$L'' \equiv 2L''_{13,24} + a''_{14} + a''_{23} + b''_{14} + b''_{23}.$$

On a des relations analogues pour les autres faisceaux.

Aux coniques Γ_{11}, Γ_{22}, Γ_{12}, Γ_{21}, Γ_{33}, Γ_{44}, Γ_{34}, Γ_{43} correspondent des quartiques gauches rationnelles L''_{11}, L''_{22}, L''_{12}, L''_{21}, L''_{33}, L''_{44}, L''_{34}, L''_{34} passant chacune par huit points doubles de Ψ'', deux de ces huit points doubles appartenant à chacun des plans $\varpi_{13,24}, \ldots, \varpi_{12,41}$.

On a les relations fonctionnelles

$$\left.\begin{aligned} L'' &\equiv 2L''_{11} + a''_{13} + a''_{14} + a''_{31} + a''_{41} + b''_{13} + b''_{14} + b''_{31} + b''_{41}, \\ L'' &\equiv 2L''_{22} + a''_{23} + a''_{24} + a''_{32} + a''_{42} + b''_{23} + b''_{24} + b''_{32} + b''_{42}, \\ L''_0 &\equiv L''_{11} + L''_{22}, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

et d'autres analogues relatives aux couples de courbes L''_{12} et L''_{21}, L''_{33} et L''_{44}, L''_{34} et L''_{43}.

Ajoutons encore que le long d'une courbe L''_0, il existe une hyperquadrique circonscrite à la surface Ψ'' et que, le long de chacune des seize courbes L''_{ik}, il y a un hyperplan touchant cette surface.

7. Entre les surfaces Ψ', Ψ'' existe une correspondance (**2**,**2**). En effet, à un point de Ψ' correspond un point de Φ et à ce dernier correspondent deux points de Ψ'' formant un groupe de I''_2. Inversement, à un point de Ψ'' correspond un point de Φ et à ce point correspondent deux points de Ψ' formant un groupe de l'involution I'_2.

Soit F' une surface dont les points représentent les couples de points de Ψ' et de Ψ'' homologues dans cette correspondance. A un point de Ψ' correspondent deux points de la surface F' et à un point de F' correspond un seul point de Ψ'; il existe donc sur F' une involution J_2', d'ordre deux, dont Ψ' est l'image. Cette involution est engendrée par une transformation birationnelle de F' en elle-même, que nous désignerons par θ'.

Observons qu'au point double a'_{ik} (ou b'_{ik}) de Ψ' correspondent deux points de Ψ' confondus en un seul P''_{ik}. Il en résulte que la correspondance entre Ψ' et F' a pour points de diramation les seize points doubles de Ψ'; par suite (*), la surface F' est hyperelliptique de rang un et a les genres $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$. L'involution J_2' a seize points unis; nous désignerons par A'_{ik} le point uni correspondant à a'_{ik}, par B'_{ik} celui qui correspond à b'_{ik} (les indices i, k ayant des valeurs convenables, indiquées plus haut).

De même, il existe une transformation birationnelle θ'' de F' en elle-même, engendrant une involution J_2'', d'ordre deux, dont la surface Ψ'' est l'image. Les points de diramation sur Ψ'' sont les points doubles a''_{ik}, b''_{ik}; les points unis de l'involution J_2'' seront dénotés par A''_{ik} et B''_{ik}, A''_{ik} correspondant à a''_{ik} et B''_{ik} à b''_{ik} (i, k ayant les valeurs convenables indiquées plus haut).

D'après la définition de la correspondance (2, 2) entre Ψ' et Ψ'', à un point de la surface Φ correspondent quatre couples de points homologues dans cette correspondance et, par suite, quatre points de la surface F'. D'une manière précise, si M est un point de Φ, M_1', M_2' les points qui lui correspondent sur Ψ' et M_1'', M_2'' les points qui lui correspondent sur Ψ'', au point M correspondent les quatre couples de points homologues (M_1', M_1''), (M_1', M_2''), $(M_2' M_1'')$, $(M_2' M_2'')$. Observons que les points de F' qui représentent les couples de points (M_1', M_1''), (M_1', M_2'') forment un groupe de J_2'; les points qui représentent le couples $(M_2' M_1'')$, $(M_2' M_2'')$ forment également un couple de J_2'. De même, les points qui représentent les couples $(M_1' M_1'')$ et $(M_2' M_1'')$, $(M_1' M_2'')$ et $(M_2' M_2'')$ forment deux groupes de J_2''. Il

(*) Enriques et Severi, *l. c. cit.*

en résulte qu'à un point de Φ correspondent quatre points de F' se groupant en deux couples de J_2' et en deux couples de J_2''; par suite, les transformations θ', θ'' sont permutables et la transformation $\theta = \theta'\theta''$ a la période deux. Cette transformation θ engendre une involution d'ordre deux que nous désignerons par J_2.

Si nous reprenons les notations précédentes, les couples de points $(M_1'M_1'')$ et $(M_2'M_2'')$, $(M_1'M_2'')$ et $(M_2'M_1'')$ donnent, sur F', deux groupes de l'involution J_2. Il en résulte : pour que l'involution J_2 possède un point uni, il faut que l'on puisse trouver, sur Φ, un point M tel que les points M_1' et M_2' d'une part, M_1'' et M_2'' d'autre part, coïncident; cela est impossible, car dans les correspondances (1, 2) entre Φ et Ψ', entre Φ et Ψ'', il ne peut exister, sur Φ, de point de diramation commun. Il en résulte que J_2 est dépourvue de points unis.

Désignons par F'' la surface image des couples de points de l'involution J_2. Entre les surfaces Φ et F'', nous avons une correspondance (1, 2). Au point M de Φ correspondent deux points M_1, M_2 de F'', M_1 représentant le groupe formé de $(M_1'M_1'')$ et $(M_2'M_2'')$, M_2 représentant le groupe formé de $(M_1'M_2'')$, $(M_2'M_1'')$ de J_2. Les points M_1, M_2 coïncident lorsque M est un des points doubles de Φ, et seulement dans ce cas. Il en résulte qu'entre la surface Φ d'une part, et les surfaces F, F'' d'autre part, existent des correspondances (1, 2) ayant mêmes points de diramation sur Φ; par suite, les surfaces F, F'' sont birationnellement équivalentes et une image de l'involution J_2 est donc constituée par la surface de Jacobi F.

Nous avons donc construit une surface hyperelliptique F', de genres $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$, transformée en elle-même par trois transformations birationnelles involutives θ, θ', θ''. Les involutions engendrées par θ', θ'' sont de genres un ($p_a = P_4 = 1$) ; l'involution engendrée par θ est hyperelliptique ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$) et dépourvue de points unis. Nous allons faire voir que F' est une surface de Picard de diviseur deux.

8. — L'involution J_2' possède seize points unis A_{11}', A_{22}', A_{12}', A_{21}', A_{33}', A_{44}', A_{34}', A_{43}', B_{11}', B_{22}', B_{12}', B_{21}', B_{33}', B_{44}', B_{34}' et B_{43}'. Les points A_{ik}', B_{ik}' correspondent à un même point double γ_{ik}' de Φ; par suite, ces points forment un groupe de J_2'' et un groupe de J_2. De plus, ils correspondent au point P_{ik}'' de Ψ''.

De même, l'involution J_2'' possède seize points unis A_{13}'', A_{14}'', A_{23}'', A_{24}'', A_{31}'', A_{32}'', A_{41}'', A_{42}'', B_{13}'', B_{14}'', B_{23}'', B_{24}'', B_{31}'', B_{32}'', B_{41}'', B_{42}''. Les points B_{ik}'', B_{ik}'' forment un groupe de J_2'; ils correspondent au point γ_{ik} de Φ et au point P_{ik}'' de Ψ'.

Nous désignerons par C_{ik}' la courbe de F' qui correspond à la conique Γ_{ik} de Φ. Avant d'étudier la distribution de ces courbes, observons qu'à une section hyperplane L' de Ψ' correspond, sur F', une courbe que nous désignerons par L et qui est de genre neuf. Le système complet $|L|$, ayant le genre neuf, a le degré seize et la dimension sept. En vertu de la relation fonctionnelle (5), aux courbes L_0' correspondent des courbes du système $|L|$, passant par les 16 points unis de J_2'. Il en résulte qu'aux courbes Γ, Γ_1, Γ_2 de Φ correspondent sur F' des courbes L; par suite, aux courbes L'', L_0'' de Ψ'' correspondent des courbes L.

La courbe elliptique L_{11}' passe par les points a_{12}', a_{21}', b_{12}', b_{21}'; par suite, la courbe C_{11}' qui lui correspond sur F' a le genre trois. Plus généralement, aux courbes du faisceau $|L_{11,22}'|$ correspondent, sur F', des courbes de genre trois que nous désignerons par $C'_{11,22}$. Ces courbes forment un faisceau $|C_{11,22}'|$, complet, puisque la surface F' a l'irrégularité 2 et les genres géométriques $p_g = P_4 = 1$. Ce faisceau comprend les courbes C_{11}', C_{22}' et a quatre points-base A_{12}', A_{21}', B_{12}', B_{21}' (points unis de J_2').

D'autre part, la courbe L_{11}'' de Ψ'', qui est rationnelle et passe par les points a_{13}'', a_{14}'', a_{31}'', a_{41}'', b_{13}'', b_{14}'', b_{31}'', b_{41}'', a pour homologue sur F' la courbe C_{11}', de genre trois, ce qui est vérifié par la formule de Zeuthen. La courbe C_{11}' passe donc par les points

A''_{13}, A''_{14}, A''_{31}, A''_{41}, B''_{13}, B''_{14}, B''_{31}, B''_{41}, unis pour J''_2. De même, on trouve que la courbe C'_{22} passe par les huit autres points unis de J''_2 à savoir A''_{23}, A''_{24}, A''_{32}, A''_{42}, B''_{23}, B''_{24}, B''_{2}, B''_{42}. La transformation θ change en elle-même chacune des courbes du faisceau $| C'_{11,22} |$; la transformation θ'' change en elles-mêmes deux courbes C'_{11}, C'_{22} de ce faisceau et, par suite, elle échange entre elles les autres courbes du faisceau.

Les relations fonctionnelles (6), (7), (8) et (9) conduisent à la relation

$$2\,C'_{11,\,22} \equiv L.$$

Un raisonnement analogue conduit à l'existence, sur F', de trois autres faisceaux de courbes de genre trois $| C'_{12,21} |$, $| C'_{33,44} |$, $| C'_{34,43} |$. Toutes les courbes de ces faisceaux sont transformées en elles-mêmes par θ' ; les courbes de chacun des faisceaux sont échangées entre elles par θ'' ; deux courbes de chaque faisceau, à savoir respectivement C'_{12} et C'_{21}, C'_{33} et C'_{44}, C'_{34} et C'_{43}, sont transformées en elles-mêmes par θ''. On a

$$2\,C'_{12,\,21} \equiv 2\,C'_{33,\,44} \equiv 2\,C'_{34,\,43} \equiv L.$$

De même, en partant de la surface Ψ, on établit l'existence, sur F', de quatre faisceaux de courbes de genre trois, $| C'_{13,24} |$, $| C'_{14,23} |$, $| C'_{31,42} |$, $| C'_{32,41} |$. Les courbes de ces faisceaux sont transformées en elles-mêmes par θ''; les faisceaux sont transformés en eux-mêmes par θ' et chaque faisceau contient deux courbes transformées en elles-mêmes par θ', à savoir respectivement C'_{13} et C'_{24}; C'_{14} et C'_{23}, C'_{31} et C'_{42}, C'_{32} et C'_{41}. Chaque faisceaux a quatre points-base qui sont des points unis de l'involution J''_2. Chacune des courbes transformées en elles-mêmes par θ' passe par huit points unis de J'_2. On a les relations fonctionnelles

$$2\,C'_{13,\,24} \equiv 2\,C'_{14,\,23} \equiv 2\,C'_{31,\,42} \equiv 2\,C'_{32,\,41} \equiv L.$$

Une courbe de genre trois, tracée sur F', appartient à un système continu complet, ∞^3, de degré quatre, formé de ∞^2 faisceaux de courbes. Les huit faisceaux de courbes de genre trois que nous venons de rencontrer appartiennent à un même système continu, car les doubles de ces faisceaux appartiennent au système $|L|$, et, d'autre part, d'après un théorème de M. Severi (*), la division, sur la surface hyperelliptique F', de genre $p_g = 1$, est une opération univoque.

On observera que d'après leur construction même, les courbes de genre trois, qui correspondent sur F' aux coniques de Φ, sont dépourvues de points multiples ; il en est par suite de même des courbes du système continu auquel elles appartiennent.

Il existe, sur la surface hyperelliptique F', *de genres* $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$, *un système continu* $\{C'\}$ *de courbes de genre trois, formé de* ∞^2 *faisceaux. Les courbes de quatre de ces faisceaux sont transformées en elles-mêmes par* θ', *celles des quatre derniers par* θ''. *Les points-base des quatre premiers faisceaux sont des points unis de l'involution* J'_2 ; *ceux des quatre derniers, des points unis de l'involution* J''_2. *Dans chacun des quatre premiers faisceaux, il existe deux courbes transformées en elles-mêmes par* θ'' *et passant chacune par huit des points unis de* J''_2. *Dans chacun des quatre derniers faisceaux, il existe deux courbes transformées en elles-mêmes par* θ' *et passant chacune par huit des points unis de* J'_2.

On voit de plus que

Le système continu $\{C'\}$ *est transformé en lui-même par chacune des trois transformations* θ, θ', θ''.

Les seize courbes C'_{ik} étant transformées en elles-mêmes par θ' et θ'', le sont également par $\theta = \theta'\theta''$; il leur correspond, sur F, les seize courbes C_{ik} de genre deux (**).

(*) SEVERI, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique*. (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUP., 1908, 3e sér., t. XXV, pp. 449-468.) Voir pp. 460-461.

(**) Il serait aisé, d'après ce qui précède, de dresser le tableau des points unis de J'_2, J''_2 situés sur les diverses courbes C'_{ik} ; il suffirait d'utiliser la notation de G. Humbert indiquée plus haut. Observons que le système continu $\{C'\}$ contient, outre les huit faisceaux considérés plus haut, huit nouveaux faisceaux transformés en eux-mêmes par θ' et huit faisceaux, distincts des précédents, transformés en eux-mêmes par θ''.

9. — La surface F′, de genres $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$, est une surface hyperelliptique et précisément une surface de Picard ou, en particulier, de Jacobi. Supposons que ce soit une surface de Picard de diviseur δ. Deux cas peuvent se présenter (*) :

1° La surface F′ représente une involution d'ordre δ, privée de points unis, appartenant à la surface de Jacobi F*, image des couples de points de deux courbes elliptiques. Dans ce cas, F′ contient deux faisceaux elliptiques de courbes elliptiques se coupant en δ points (**).

2° La surface F′ représente une involution d'ordre δ, privée de points unis, appartenant à une surface de Jacobi représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe de genre deux irréductible.

Dans le premier cas, la surface de Jacobi F, d'où nous sommes parti, représente une involution d'ordre 2δ, privée de points unis, appartenant à la surface F*. Mais alors, aux deux faisceaux elliptiques de courbes elliptiques unisécantes existant sur F*, correspondent sur F deux faisceaux elliptiques de courbes elliptiques se rencontrant en 2δ points. Or, nous avons supposé que la surface F avait des modules généraux; par suite, elle ne peut posséder de faisceaux elliptiques de courbes elliptiques (Enriques-Severi, *loc. cit.*, n° 18). Nous sommes donc conduit à une contradiction, et le premier cas ne peut se présenter.

Envisageons le second cas et supposons que la surface F′ puisse être singulière (***). Entre les surfaces F′, F, nous avons

(*) Enriques et Severi, *loc. cit.*

(**) Idem, *ibid.* (n° 25).

(***) Les coordonnées des points d'une surface de Picard s'expriment par des fonctions uniformes quadruplement périodiques de deux variables. Si le tableau des périodes de ces fonctions est

$$\begin{matrix} \frac{1}{\delta} & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g', \end{matrix}$$

une correspondance rationnelle (2, 1). Or, d'après un théorème de G. Cotty (*), si entre deux surfaces hyperelliptiques, dont l'une est singulière, existe une correspondance rationnelle, la seconde surface est également singulière. Par hypothèse, F est à modules généraux; par suite, il en est de même de F'.

Les courbes de genre minimum, privées de points multiples, sur une surface de Picard de diviseur δ, à modules généraux, ont précisément le genre $\delta + 1$ et forment un système continu, composé de ∞^2 systèmes linéaires de dimension $\delta - 1$ (Enriques-Severi, *loc. cit.*, n° 25). La surface F' contenant un système $\{ C' \}$ de genre trois, dont les courbes sont dépourvues de points doubles ou multiples, c'est donc une surface de Jacobi ($\delta = 1$) ou une surface de Picard de diviseur $\delta = 2$. Observons d'ailleurs qu'une surface de Jacobi à modules généraux ne peut posséder de courbes de genre trois privées de points multiples, car sur une telle surface, tout système continu de courbes privées de points multiples est un multiple du système de genre deux (Enriques-Severi, *loc. cit.*, n° 27). Par conséquent,

La surface F' *est une surface de Picard de diviseur deux, à modules généraux.*

10. — En désignant par x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées projectives homogènes d'un espace à trois dimensions, soit

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

l'équation de la surface de Kummer Φ. Soient, de plus, respectivement

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

δ étant le diviseur de la surface, celle-ci est dite singulière s'il existe au moins une (et au plus trois) relation à coefficients entiers de la forme

$$A\delta g + Bh + Cg' + D\delta(h^2 - gg') + E = 0.$$

Cette dénomination a été introduite par G. Humbert dans le cas $\delta = 1$. (Journal de Liouville, 1899, 1900 et 1901.)

(*) G. Cotty, *Les fonctions abéliennes et la théorie des nombres.* (Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse, 1912, pp. 1-170.) Voir p. 43.

les équations des quadriques touchant Φ le long d'une courbe Γ_1 et le long d'une courbe Γ_2.

Les équations

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad x_5^2 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

représentent, dans un espace linéaire à quatre dimensions, une surface birationnellement équivalente à Ψ'. De même, les équations

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad x_6^2 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

représentent une surface birationnellement équivalente à Ψ''. Par suite, les équations

$$\Phi = 0, \qquad x_5^2 = \varphi_1, \qquad x_6^2 = \varphi_2$$

représentent une surface birationnellement identique à F'.

La surface F étant à modules généraux, il en est de même de la surface Φ et réciproquement; par suite,

Si

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

est l'équation d'une surface de Kummer à modules généraux,

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

les équations de deux quadriques inscrites à la surface de Kummer, l'une passant par huit points singuliers de cette surface, l'autre par les huit autres points singuliers, les équations

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad x_5^2 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad x_6^2 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

représentent une surface de Picard de diviseur deux, à modules généraux.

Remarque. — La surface F', étant une surface de Picard de diviseur deux, représente une involution d'ordre deux, privée de points unis, appartenant à une surface de Jacobi. Nous venons de prouver qu'il existe, sur F', une involution J_2, d'ordre deux, privée de points unis, dont l'image est une surface de Jacobi F. On savait, d'après une remarque de MM. Enriques et Severi (*loc. cit.*, n° 12), qu'une involution de cette nature existait, mais sans connaître une construction effective de cette involution.

Marcel HAYEZ, imprimeur rue de Louvain, 112, Bruxelles.