a_n et b_n sont compris à partir d'une valeur de n; d'après le lemme on a, à partir de cette valeur,

$$f(a_n) < f(b_n).$$

Cette contradiction établit le théorème.

La proposition relative aux fonctions dont la dérivée est nulle sur un segment a, b est une conséquence de la précédente. Car, si l'on supposait $f(b) < f(a)$, la fonction

$$g(x) = f(x) + \frac{x-a}{b-a}[f(a) - f(b)]$$

aurait une dérivée positive sur a, b, alors que $g(a) = g(b)$, ce qui est impossible. En changeant $f(x)$ en $-f(x)$, on voit de même que l'on ne peut avoir $f(a) > f(b)$.

SUR LES CONGRUENCES DE CUBIQUES PLANES CUSPIDALES;

Par L. GODEAUX

(Liége).

Si l'on considère, dans un plan, une famille ∞^1 de cubiques cuspidales (c'est-à-dire possédant chacune un point de rebroussement), on sait que le lieu des points de rebroussement fait partie de l'enveloppe de la famille. De plus, en général, les cubiques ne touchent pas l'enveloppe en leur point de rebroussement. Des propriétés analogues existent pour les systèmes ∞^2 ou congruences de cubiques planes cuspidales de l'espace; c'est ce que nous allons montrer dans cette Note, en examinant la distribution des points focaux sur les courbes d'une telle congruence. Auparavant, nous ferons une remarque sur le problème dans le plan.

1. Une cubique plane possédant un point de rebroussement, ne possède qu'un seul point d'inflexion. Par conséquent, étant donnée une cubique plane cuspidale, la tangente de rebroussement, la tangente d'inflexion et la droite qui joint les points de rebroussement et d'inflexion sont rationnellement déterminées.

Si $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, $\beta = 0$ désignent respectivement les équations de ces droites en coordonnées cartésiennes, dans un plan, la cubique sera, comme on sait, représentée par

$$\alpha^2 \gamma + \beta^3 = 0. \tag{1}$$

Une famille ∞^1 de cubiques cuspidales dans un plan pourra par suite être représentée par l'équation (1), où l'on supposera les coefficients des coordonnées dans α, β, γ, fonctions (dérivables) d'un paramètre u.

Les points caractéristiques de la famille, situés sur une cubique (1), seront déterminés par la courbe

$$2\alpha\, \alpha'_u \gamma + \alpha^2 \gamma'_u + 3\,\beta^2 \beta'_u = 0. \tag{2}$$

Ces points seront donc au nombre de neuf. Voyons combien de ces points seront absorbés au point de rebroussement P ($\alpha = \beta = 0$). Si, dans l'équation (2), nous faisons $\beta = 0$, nous trouvons que la droite représentée par cette équation rencontre la courbe (2), en un point P et en deux autres points en général distincts du premier. De même, la tangente de rebroussement $\alpha = 0$ rencontre la courbe (2) en trois points dont deux sont confondus en P. Il en résulte que la courbe (2) passe en général simplement par P en y touchant la tangente de rebroussement. Par suite, sur une cubique de la famille, trois points caractéristiques sont en général confondus au point de rebroussement.

Pour que les cubiques de la famille soient tangentes au lieu du point de rebroussement, il faut que ce lieu soit également l'enveloppe de la tangente de rebroussement $\alpha = 0$. Les équations du lieu du point de rebroussement s'obtiennent en éliminant u entre $\alpha = 0$ et $\beta = 0$; il faut donc que la droite $\alpha'_u = 0$ passe constamment par l'intersection des droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et cette condition est évidemment suffisante.

Mais lorsque cette circonstance se présente, la courbe (2) est rencontrée par toute droite passant par P en deux points confondus en P, c'est-à-dire qu'elle possède un point double en P. Il est d'ailleurs aisé de vérifier que les tangentes à la courbe (2) en P sont distinctes de la droite $\alpha = 0$. Il en résulte que les courbes (1) et (2) ont quatre points d'intersection confondus en P. Donc, lorsque la courbe (1) touche son enveloppe au point de rebroussement, quatre points caractéristiques sont absorbés en ce point.

2. Soit Σ une congruence formée de cubiques planes cuspidales. Si nous désignons par $\delta = 0$ l'équation cartésienne du plan d'une courbe de Σ, par $\alpha = \delta = 0$ les équations de la tangente de rebroussement, par $\beta = \delta = 0$ les équations de la droite joignant les points de rebroussement et d'inflexion, par $\alpha = \gamma = 0$ la tangente d'inflexion, les équations de la courbe envisagée seront

$$\alpha^2\gamma + \beta^3 + \delta f = 0, \qquad \delta = 0, \tag{3}$$

f étant le premier membre de l'équation d'une quadrique. Toute courbe de Σ pouvant être représentée par des équations telles que (3), nous pourrons supposer que la congruence est elle-même représentée par les équations (3), où les coefficients des coordonnées dans α, β, γ, δ, f sont des fonctions (dérivables) de deux paramètres u, v (tout au moins pour u, v variant dans un certain domaine).

Cela étant, les points focaux de la congruence Σ seront déterminés [1] par les équations (3) et l'équation

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u}(\alpha^2\gamma + \beta^3 + \delta f) & \dfrac{\partial\delta}{\partial u} \\ \dfrac{\partial}{\partial v}(\alpha^2\gamma + \beta^3 + \delta f) & \dfrac{\partial\delta}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire, en effectuant les dérivations,

$$\begin{vmatrix} 2\alpha\gamma\alpha'_u + \alpha^2\gamma'_u + 3\beta^2\beta'_u + \delta f'_u & \delta'_u \\ 2\alpha\gamma\alpha'_v + \alpha^2\gamma'_v + 3\beta^2\beta'_v + \delta f'_v & \delta' \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

L'équation (4) représente une surface du quatrième ordre et il y a donc, sur chaque courbe de la congruence Σ douze points focaux. Voyons combien de ces points sont confondus au point de rebroussement P ($\alpha = \beta = \delta = 0$) de la cubique (3).

Les points d'intersection de la surface (4) avec la droite $\beta = \delta = 0$ sont donnés par

$$\alpha \begin{vmatrix} 2\gamma\alpha_u + \alpha\gamma'_u & \delta^u \\ 2\gamma\beta'_v + \alpha\gamma'_v & \delta'_v \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

---

[1] DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, 1889, p. 3 et suiv.

Il y en a donc un qui tombe au point P et, en général, il n'y en aura qu'un seul. Le point P est donc en général simple pour la surface (4).

Les points d'intersection de la surface (4) avec la droite

$$\alpha = \delta = 0$$

sont donnés par

$$3\beta^2 \begin{vmatrix} \beta'_u & \delta'_u \\ \beta'_v & \delta'_v \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Il y a donc deux confondus en P. Observons que l'équation

$$\begin{vmatrix} \beta'_u & \delta'_u \\ \beta'_v & \delta'_v \end{vmatrix} = 0$$

représente une quadrique qui détermine, sur la droite $\beta = \delta = 0$, les points focaux de la congruence engendrée par cette droite lorsque u, v varient. Par suite, la droite $\alpha = \delta = 0$ rencontre la surface (4) en deux points confondus en P et en deux seulement lorsque le lieu des points de rebroussement des cubiques de Σ n'est pas une nappe de la surface focale de la congruence engendrée par la droite $\beta = \delta = 0$.

Enfin, les points d'intersection de la surface (4) avec la droite

$$\alpha = \beta = 0$$

sont donnés par l'équation

$$\delta \begin{vmatrix} f'_u & \delta'_u \\ f'_v & \delta'_v \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Il y en a un seul en P.

Il résulte de tout ceci que parmi les points focaux de Σ situés sur une courbe de cette congruence, il y en a en général trois confondus en P.

Dans une congruence de cubiques planes cuspidales, le point de rebroussement compte pour trois points focaux.

Observons qu'en général, le point d'inflexion ($\beta = \gamma = \delta = 0$) n'est pas un point focal de la congruence Σ.

3. L'équation de la nappe de la surface focale lieu des points de rebroussement des courbes de Σ s'obtiendra en éliminant u, v entre les équations

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \delta = 0.$$

En général, la droite $\alpha = \delta = 0$ ne sera pas tangente à cette surface, c'est-à-dire que les courbes de Σ ne seront pas tangentes à la surface focale en leur point de rebroussement.

Pour qu'il en soit autrement, il faut et il suffit que l'on aït

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \alpha'_u & \delta'_u \\ \alpha'_v & \delta'_v \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire que la congruence formée par les droites $\alpha = 0$, $\delta = 0$ ait la surface considérée comme nappe de sa surface focale.

S'il en est ainsi, le point P est encore simple pour la surface (4), car l'équation (7) n'est pas modifiée; mais le plan $\delta = 0$ est tangent en P à la surface (4). La droite $\alpha = \delta = 0$ rencontre encore la surface (4) en deux points confondus en P; la droite

$$\beta = \delta = 0$$

rencontre la surface (4) également en deux points confondus en P, car le second facteur du premier membre de l'équation (5) s'annule pour $\alpha = \beta = \delta = 0$ en vertu de l'équation (8). Il en résulte donc que la section de la surface (4) par le plan $\delta = 0$ possède un point double en P, les tangentes étant d'ailleurs distinctes de la droite $\alpha = \delta = 0$.

Dans une congruence de cubiques planes cupidales, les courbes ne touchent pas, en général, la surface focale au point de rebroussement. Si ce contact a lieu, le point de rebroussement absorbe quatre points focaux et en général quatre seulement.

4. Les développements précédents supposent que le lieu des points de rebroussement des cubiques de Σ est une surface proprement dite. Supposons maintenant que ce lieu soit une courbe C. Dans ces conditions, les droites $\alpha = \delta = 0$ et $\beta = \delta = 0$ s'appuient sur la courbe C et cette courbe intervient donc comme une nappe de la surface focale de chacune des congruences rectilignes engendrées par ces droites lorsque u, v varient. En d'autres termes, le long de la courbe C on a

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} \alpha'_u & \delta'_u \\ \alpha'_v & \delta'_v \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \beta'_u & \delta'_u \\ \beta'_v & \delta'_v \end{vmatrix} = 0.$$

Les résultats précédents doivent donc être modifiés.

L'équation (7) montre que la droite $\alpha = \beta = 0$ rencontre la surface (4) en un seul point confondu avec P, donc P est encore simple pour cette surface.

Nous allons voir que la section de la surface (4) par le plan $\delta = 0$ présente actuellement en P un point de rebroussement, la tangente de rebroussement étant la droite $\alpha = \delta = 0$.

L'équation (5) montre, comme plus haut, que la droite $\beta = \delta = 0$ rencontre la surface (4) en deux points confondus en P.

L'équation (6) représente actuellement une surface dégénérée en deux plans et une quadrique passant tous les trois par P. Il y a donc trois des intersections de la surface (4) et de la droite $\alpha = \delta = 0$ confondus en P.

Les points d'intersection de la surface (4) avec la droite $\delta = 0$, $\alpha = \lambda\beta$ sont donnés par l'équation

$$\beta \begin{vmatrix} 2\lambda\gamma\,\alpha'_u + \lambda^2\beta\,\gamma'_u + 3\,\beta\,\beta'_u & \delta'_u \\ 2\lambda\gamma\,\alpha'_v + \lambda^2\beta\gamma'_v + 3\,\beta\,\beta'_v & \delta'_v \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda^2\beta^2 \begin{vmatrix} \gamma'_u & \delta'_u \\ \gamma'_v & \delta'_v \end{vmatrix} + 2\lambda\beta\gamma \begin{vmatrix} \alpha'_u & \delta'_u \\ \alpha'_v & \delta'_v \end{vmatrix} + 3\beta^2 \begin{vmatrix} \beta'_u & \delta'_u \\ \beta'_v & \delta'_v \end{vmatrix} = 0.$$

Il y a donc toujours, en vertu des équations (9), deux de ces points confondus en P. Il ne pourra y en avoir trois que si l'on a $\lambda = 0$, donc la section de la surface (4) par le plan $\delta = 0$ possède un point de rebroussement en P, la tangente de rebroussement étant la droite $\alpha = 0$, $\delta = 0$.

Les intersections de la courbe (3) et de la surface (4) absorbées en P sont donc au nombre de six, par suite :

Si, dans une congruence de cubiques planes cuspidales, le lieu des points de rebroussement est une courbe, chaque point de rebroussement absorbe six points focaux.

En particulier, si la congruence Σ est linéaire, c'est-à-dire s'il passe, en général, une et seule courbe de Σ par un point de l'espace, les nappes de la surface focale se réduisent toutes à des courbes, donc :

Les courbes d'une congruence linéaire de cubiques planes cuspidales s'appuient en sept points sur une courbe (ou ensemble de courbes) fixe, l'un des points d'appui étant le point de rebroussement.