ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*. Séance du 3 novembre 1923, nos 10-11, pp. 521-529.

GÉOMÉTRIE. — Sur certains réseaux de courbes planes,

par L. GODEAUX, professeur à l'École militaire (*).

1. Considérons les trois courbes planes C_1, C_2, C_3 dont les équations en coordonnées cartésiennes sont respectivement

$$F_1(x, y) \equiv f_n(x, y) + f_{n-1}(x, y) + f_{n-2}(x, y) + f_{n-3}(x, y) = 0, \quad (C_1)$$

$$F_2(x, y) \equiv \varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) = 0, \quad (C_2)$$

$$F_3(x, y) \equiv \psi_n(x, y) + \psi_{n-1}(x, y) = 0, \quad (C_3)$$

les fonctions f, φ, ψ étant homogènes en x, y de degrés égaux à leurs indices respectifs.

La courbe C_1, d'ordre n, possède un point multiple d'ordre $n - 3$ à l'origine O, les tangentes à la courbe en ce point étant données par

$$f_{n-3}(x, y) = 0.$$

Nous supposerons ces tangentes distinctes. En d'autres termes, nous supposerons que l'équation

$$f_{n-3}\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0$$

possède $n - 3$ racines $\frac{y}{x}$ distinctes.

En général, les équations

$$f_{n-3}\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0, \qquad f_{n-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0$$

(*) Présenté par M. Neuberg.

n'auront pas de racine commune $\frac{y}{x}$ Remarquons que si ces deux équations ont une racine commune a, la droite $y = a\,x$ rencontre la courbe C_1 en $n - 1$ points confondus à l'origine O.

Les courbes C_2, C_3 ont chacune un point multiple d'ordre $n - 1$ à l'origine O. Nous supposerons ces deux courbes distinctes.

Les courbes C_1, C_2, C_3 déterminent un réseau dont la courbe générique a pour équation

$$\lambda_1 F_1(x, y) + \lambda_2 F_2(x, y) + \lambda_3 F_3(x, y) = 0, \tag{1}$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant des paramètres homogènes fixant la position de la courbe dans le réseau. La courbe (1) possède en général un point multiple d'ordre $n - 3$ à l'origine, les tangentes en ce point étant les tangentes à la courbe C_1.

Parmi les courbes du réseau se trouvent les courbes

$$\mu_2 F_2(x, y) + \mu_3 F_3(x, y) = 0, \tag{2}$$

formant un faisceau et ayant, à l'origine O, un point multiple d'ordre $n - 1$.

2. En partant du réseau défini plus haut, nous allons déterminer une correspondance birationnelle entre les points du plan.

Les courbes (1) passant par un point P du plan forment en général un faisceau et rencontrent la droite PO en deux points variables. Ces couples de points forment une involution d'ordre deux possédant deux points de coïncidence. L'un de ces points tombe en O et est déterminé par la courbe (2) passant par P; l'autre est fourni par une courbe (1) passant par P et tangente à la droite PO en un point Q (en général distinct de P et de O).

Inversement, par un point Q du plan passe une et une seule courbe (1) dont la tangente en ce point passe par O. Cette courbe rencontre encore la droite QO en un point P en général distinct de Q et de O.

Nous avons ainsi déterminé, entre les points P, Q du plan, une correspondance birationnelle.

3. Désignons par (x', y') les coordonnées de P, par (x'', y'') celles de Q, et cherchons les relations existant entre ces coordonnées.

Tout d'abord, la droite PQ passant par l'origine, on a

$$x' = kx'', \qquad y' = ky''$$

et le problème revient à déterminer k.

Pour qu'une courbe (1) passe par P et Q, on doit avoir

$$\lambda_1 F_1(x', y') + \lambda_2 F_2(x', y') + \lambda_3 F_3(x', y') = 0, \tag{3}$$
$$\lambda_1 F_1(x'', y'') + \lambda_2 F_2(x'', y'') + \lambda_3 F_3(x'', y'') = 0. \tag{4}$$

Pour que la tangente à cette courbe au point Q passe par O, on doit avoir

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \left[x'' \dfrac{\partial F_1(x'', y'')}{\partial x''} + y'' \dfrac{\partial F_1(x'', y'')}{\partial y''}\right] + \lambda_2 \left[x'' \dfrac{\partial F_2}{\partial x''} + y'' \dfrac{\partial F_2}{\partial y''}\right] \\ \qquad + \lambda_2 \left[x'' \dfrac{\partial F_3}{\partial x''} + y'' \dfrac{\partial F_3}{\partial y''}\right] = 0, \end{array}\right\}$$

c'est-à-dire, en remplaçant F_1, F_2, F_3 par leur valeurs, en utilisant la formule d'Euler sur les fonctions homogènes et en tenant compte de (4),

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 [f_{n-1}(x'', y'') + 2f_{n-2}(x'', y'') + 3f_{n-3}(x'', y'')] \\ \qquad + \lambda_2 \varphi_{n-1}(x'', y'') + \lambda_3 \psi_{n-1}(x'', y'') = 0 \text{ (*)}. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Entre les équations (3), (4), (5), éliminons λ_1, λ_2, λ_3, après avoir, dans (3), remplacé x', y' par kx'', ky'' ; nous obtenons l'équation de condition

$$\begin{vmatrix} k^3 f_n + k^2 f_{n-1} + k f_{n-2} + f_{n-3} & k^3 \varphi_n + k^2 \varphi_{n-1} & k^3 \psi_n + k^2 \psi_{n-1} \\ f_n + f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} & \varphi_n + \varphi_{n-1} & \psi_n + \psi_{n-1} \\ f_{n-1} + 2f_{n-2} + 3f_{n-3} & \varphi_{n-1} & \psi_{n-1} \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

où nous avons écrit f_n pour $f_n(x'', y'')$, etc.

(*) On peut également obtenir la formule (5) en rendant homogène l'équation de la courbe (1).

La valeur de k qui convient au problème est différente de l'unité. On trouve aisément

$$k = -\frac{f_{n-3}(x'', y'')}{f_{n-2}(x'', y'') + 2f_{n-3}(x'', y'')}.$$

Par suite, les formules de transformation sont

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\frac{x'' f_{n-3}(x'', y'')}{f_{n-2}(x'', y'') + 2f_{n-3}(x'', y'')}, \\ y' &= -\frac{y'' f_{n-3}(x'', y'')}{f_{n-2}(x'', y'') + 2f_{n-3}(x'', y'')}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Pour obtenir les formules de la transformation inverse, il suffit de chercher la valeur de k en fonction de x', y' ; pour cela, il suffira de remplacer, dans l'équation (6), x'' et y'' par $\frac{1}{k}x'$, $\frac{1}{k}y'$. On trouve ainsi, sans difficulté,

$$\left.\begin{aligned} x'' &= -\frac{2x' f_{n-3}(x', y')}{f_{n-2}(x', y') + f_{n-3}(x', y')}, \\ y'' &= -\frac{2y' f_{n-3}(x', y')}{f_{n-2}(x', y') + f_{n-3}(x', y')}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Nous désignerons par T la transformation qui fait correspondre le point Q au point P, par T^{-1} la transformation inverse. T est donc représentée par les formules (7), T^{-1} par les formules (8).

4. La transformation T fait correspondre à la droite $ax + by = c$ la courbe

$$(ax + by + 2c) f_{n-3}(x, y) + c f_{n-2}(x, y) = 0. \quad (9)$$

Cette courbe, d'ordre $n - 2$, possède un point multiple d'ordre $n - 3$ à l'origine, les tangentes en ce point étant représentées par $f_{n-3}(x, y) = 0$.

Les tangentes sont donc, à l'origine, celles de la courbe C_1. Nous allons montrer que, de plus, les différentes branches des courbes (9), lorsque a, b, c varient, ont entre elles un contact de second ordre en O. Pour cela, il nous suffira évidemment de montrer que la valeur de y'' au point O, pour une des branches de la courbe (9), est indépendante de a, b, c.

Soit

$$\alpha y = \beta x \tag{10}$$

l'équation d'une tangente à la courbe (9) à l'origine. On a donc $f_{n-3}(\alpha, \beta) = 0$.

En dérivant $n - 2$ fois l'équation (9) par rapport à x, on obtient

$$\begin{aligned} &by^{(n-2)} f_{n-3}(x, y) + \cdots + (n-2)(a + by')\,\mathrm{D}^{n-3} f_{n-3}(x, y) \\ &\quad + (ax + by + 2c)\,\mathrm{D}^{n-2} f_{n-3}(x, y) + c\,\mathrm{D}^{n-2} f_{n-3}(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Faisons tendre le point (x, y) vers le point O sur la branche de la courbe tangente à la droite (10). A cet effet, posons $x = \lambda\alpha$, $y = \lambda\beta$ et faisons tendre λ vers zéro. Alors, y' tend vers $\frac{\beta}{\alpha}$, coefficient angulaire de la droite (10), et l'on obtient finalement, en utilisant la formule d'Euler pour les fonctions homogènes,

$$\alpha^2 y'' \frac{\partial f_{n-3}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} + f_{n-2}(\alpha, \beta) = 0;$$

ce qui démontre notre assertion.

5. Supposons que les équations

$$f_{n-3}\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0, \qquad f_{n-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0$$

aient ν ($\leq n - 3$) racines communes (simples d'après l'hypothèse faite au début). En d'autres termes, supposons que la courbe C_1 ait à l'origine ν tangentes la rencontrant en $n - 1$ points confondus en O (ou comme nous dirons en abrégé, ν tangentes d'inflexion). Alors, les fonctions $f_{n-3}(x, y)$, $f_{n-2}(x, y)$ ont en commun un facteur d'ordre ν en x, y que nous désignerons par $\theta_\nu(x, y)$. On aura

$$f_{n-3}(x, y) \equiv \theta_\nu(x, y) f_{n-\nu-3}(x, y),$$

$$f_{n-2}(x, y) \equiv \theta_\nu(x, y) f_{n-\nu-2}(x, y).$$

L'équation de la courbe (9) s'écrira, après suppression du facteur commun,

$$(ax + by + 2c) f_{n-\nu-3}(x, y) + c f_{n-\nu-2}(x, y) = 0. \qquad (11)$$

Cette courbe possède un point multiple d'ordre $n-\nu-3$ à l'origine ; donc :

Si la courbe C_1 *possède à l'origine un point multiple d'ordre* $n-3$, *à tangentes distinctes,* ν *de ces tangentes étant des tangentes d'inflexion, la transformation* T *fait correspondre aux droites du plan des courbes d'ordre* $n-\nu-2$ *ayant un point multiple d'ordre* $n-\nu-3$ *à l'origine, à tangentes distinctes, les* $n-\nu-3$ *branches de ces courbes ayant, en ce point, des contacts de second ordre.*

En particulier, si $\nu = n-3$,

Si la courbe C_1 *possède* $n-3$ *tangentes d'inflexion à l'origine, la transformation* T *est une homographie.*

Remarquons que ce dernier cas se présente nécessairement si $n = 3$.

6. La transformation T^{-1} fait correspondre, à la droite $ax + by = c$, la courbe

$$(2ax + 2by + c) f_{n-3}(x, y) + c f_{n-2}(x, y) = 0,$$

et il est facile de voir que l'on a, pour cette courbe, les mêmes propriétés que pour la courbe (9).

7. Deux courbes (11), correspondant à deux droites d, d', doivent se rencontrer en un seul point en dehors des points fixes communs à toutes les courbes (11); ce point sera précisément le point Q correspondant au point P commun aux deux droites d, d'. En d'autres termes, les points communs à toutes les courbes (11) doivent absorber $(n - \nu - 2)^2 - 1$ des $(n - \nu - 2)^2$ intersections de deux de ces courbes.

Ce point se vérifie aisément : Le point O, multiple d'ordre $n - \nu - 3$, absorbe $(n - \nu - 3)^2$ intersections; chaque branche des courbes (11) ayant en O un cercle osculateur fixe, il y a deux intersections absorbées. On a

$$(n - \nu - 2)^2 - (n - \nu - 3)^3 - 2(n - \nu - 3) = 1.$$

8. — Si la transformation T fait correspondre à un point P, distinct de l'origine, ce point lui-même, il existe une courbe (1), passant par P et ayant en ce point, soit un point d'inflexion dont la tangente passe par l'origine, soit un point double dont une tangente passe par l'origine, soit enfin un point triple.

Le lieu de ces points s'obtiendra en faisant $x' = x'' = x$, $y' = y'' = y$ dans les formules de transformation (7) ou (8); on trouve ainsi la courbe

$$f_{n-2}(x, y) + 3f_{n-3}(x, y) = 0,$$

ou, plus généralement, si l'on suppose que la courbe C_1 possède ν tangentes d'inflexion à l'origine, la courbe

$$f_{n-\nu-2}(x, y) + 3f_{n-\nu-3}(x, y) = 0, \tag{12}$$

et l'ensemble des ν droites

$$\theta_\nu(x, y) = 0.$$

Les solutions à la question fournies par ces ν droites sont sans intérêt; elles proviennent du fait qu'une de ces droites rencontrant les courbes (1) en $n - 1$ points confondus à l'origine, il existe une courbe (1) contenant cette droite.

Nous allons maintenant faire voir qu'en général, par un point de la courbe (12) passe une courbe (1) ayant en ce point un point d'inflexion (dont la tangente passe par O).

En effet, s'il en était autrement, la courbe (12) ferait partie de la jacobienne du réseau des courbes (1), c'est-à-dire de la courbe d'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_n}{\partial x}+\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}+\frac{\partial f_{n-2}}{\partial x}+\frac{\partial f_{n-3}}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x} & \frac{\partial \psi_n}{\partial x}+\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x} \\ \frac{\partial f_n}{\partial y}+\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}+\frac{\partial f_{n-2}}{\partial y}+\frac{\partial f_{n-3}}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y}+\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y} \\ f_{n-1}+2f_{n-2}+3f_{n-3} & \varphi_{n-1} & \psi_{n-1} \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Il est visible qu'il n'en est rien si les fonctions f, φ, ψ sont générales (même en supposant que f_{n-2} et f_{n-3} ont un facteur θ_ν commun).

La courbe (12), d'ordre $n-\nu-2$, possède un point multiple d'ordre $n-\nu-3$ à l'origine, les tangentes

$$f_{n-\nu-3}(x, y) = 0$$

en ce point étant les tangentes ordinaires à la courbe C_1 (et aux courbes (11)).

Le lieu des points d'inflexion des courbes (1) *dont la tangente passe par l'origine est une courbe d'ordre* n — ν — 2 *passant* n — ν — 3 *fois par l'origine.*

En particulier, si $\nu = n-3$, ce lieu est une droite. Si $n=3$, on a $\nu = n-3 = 0$ et ce lieu est nécessairement une droite.

Observons que la courbe (12) n'est pas une courbe (11) particulière.

On peut enfin déterminer le nombre de points de la courbe (12) qui ne sont pas des points d'inflexion. Ces points sont doubles ou triples pour une courbe (1) et sont, par suite, situés sur la jacobienne (13), d'ordre $3(n-1)$.

Les termes du plus petit degré en x, y de la jacobienne (13) sont donnés par

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_{n-3}}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x} & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x} \\ \frac{\partial f_{n-3}}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y} & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y} \\ 3f_{n-3} & \varphi_{n-1} & \psi_{n-1} \end{vmatrix},$$

déterminant de degré $3n - 7$ en x, y. Ce déterminant ne s'annule pas en général en même temps que $f_{n-3}(x, y)$; par suite, la jacobienne passe $3n - 7$ fois par l'origine et y a des tangentes distinctes de celles de la courbe (12). Il en résulte que ces deux courbes se rencontrent, en dehors de l'origine, en

$$3(n-1)(n-\nu-2)-(3n-7)(n-\nu-3) = 7n - 4\nu - 15$$

points. Ces points sont doubles ou triples pour une courbe (1) du réseau (*).

(*) Le problème étudié ici peut s'étendre de diverses manières à l'espace. Outre l'extension immédiate consistant à considérer trois surfaces d'ordre n ayant l'une un point multiple d'ordre $n-3$, les autres une multiplicité d'ordre $n-1$ en un point déterminé, on peut considérer deux droites gauches d_1, d_2 et trois surfaces d'ordre $n_1 + n_2 + 3$ passant, l'une n_1 fois par d_1 et n_2 fois par d_2, les deux autres $n_1 + 2$ fois par d_1 et n_2 fois par d_2.

Marcel HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.