ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XVI, nº 12.
Séance du 6 décembre 1930, pp. 1308-1316.

GÉOMÉTRIE. — Sur les congruences de droites dont les complexes osculateurs sont linéaires,

par LUCIEN GODEAUX, correspondant de l'Académie.

Soit (g) une congruence engendrée par une droite g. D'après un théorème de M. G. Koenigs, les demi-quadriques osculatrices, le long d'une droite g, aux surfaces de la congruence contenant cette droite, forment un complexe qui est en général du second ordre : le complexe osculateur à la congruence (g), le long de la génératrice considérée (1). Ce complexe osculateur peut être linéaire dans certains cas : si u, v sont les paramètres dont dépendent les coordonnées de la droite génératrice de la congruence (g), pour que les complexes osculateurs soient linéaires, il faut et il suffit que ces coordonnées satisfassent à une équation aux dérivées partielles, linéaire et du second ordre. Ces congruences sont en général des congruences W, mais on rencontre également parmi elles des congruences engendrées par un faisceau de rayons dépendant d'un paramètre. Ces dernières congruences ont été étudiées récemment par M. P. Mentré (2) sous le nom de congruences W'. Nous nous proposons dans cette note d'ajouter quelques résultats à

(1) G. KOENIGS, Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé. (*Ann. de l'École norm. sup.*, 1882, 2e série, t. XI, pp. 219-338.) Voir aussi notre note Sur un théorème de M. G. Koenigs. (*Bull. scient. de l'Ecole polytechnique de Timisoara*, 1928, pp. 291-298.)

(2) P. MENTRÉ, Sur les propriétés projectives des congruences non W à complexe linéaire osculateur non spécial. (*Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, 11 mai 1925, pp. 1385-1387.)

ceux de M. Mentré; nous y parviendrons en utilisant la représentation de la congruence (g) par une surface de l'espace linéaire à cinq dimensions, suivant le procédé classique,

1. Soient (g) une congruence de droites de l'espace ordinaire S_3; Q l'hyperquadrique d'un espace linéaire S_5 à cinq dimensions représentant les droites de S_3; G le point de Q image de la droite g génératrice de la congruence (g), (G) la surface engendrée par le point G. Cette surface représente donc, sur Q, la congruence (g).

Supposons que la congruence (g) soit le lieu de ∞' faisceaux de rayons. Soit x le centre d'un des faisceaux générateurs, ξ son plan. Le point engendre une courbe (x) et le plan ξ enveloppe une développable dont nous désignerons par (y) l'arête de rebroussement. Les coordonnées projectives homogènes des points x, y dépendent d'un paramètre u et un point x appartient au plan osculateur à la courbe (y) au point y donné par la même valeur de u que le point x considéré. Si l'on désigne par y', y'' les points dont les coordonnées sont les dérivées premières ou secondes de celles du point y, le plan ξ est déterminé par les points y, y', y''. On a identiquement

$$|x \quad y \quad y' \quad y''| = 0.$$

Aux droites g d'un faisceau de rayons (x, ξ) correspondent sur la surface (G) les points G d'une droite; la surface (G) est donc réglée.

Nous nous placerons tout d'abord dans le cas général où le point x n'appartient pas à la droite yy'. Désignons alors par A, B les points de Q qui représentent respectivement les droites xy, xy'. Nous écrirons

$$A = |x \quad y|, \qquad B = |x \quad y'|$$

et ces équations symboliques donneront les coordonnées des points A, B en fonction de celles de x, y, y'.

La droite g, joignant les points x, $y + vy'$, sera représentée sur Q par le point

$$G = A + vB.$$

On en déduit que les coordonnées du point G satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = 0.$$

Une surface réglée de la congruence (g) est représentée sur la surface (G) par une courbe obtenue en supposant v fonction de u.

Nous représentons par A', A'', ..., B', B'', ... les points de S_5 dont les coordonnées sont les dérivées premières, secondes, ... de celles de A, B respectivement, par rapport à u. On aura donc, par exemple,

$$\begin{aligned} A' &= |x' \quad y| + |x \quad y'| = |x' \quad y| + B, \\ B' &= |x' \quad y'| + |x \quad y''|. \end{aligned}$$

2. Considérons sur la surface (G) une courbe Γ obtenue en posant $v = v\,(u)$. La tangente à cette courbe en un point G est déterminée par les points

$$A + vB, \qquad A' + vB' + v'B.$$

Lorsque la courbe Γ se déforme de toutes les manières possibles en passant toujours par G, le lieu de la droite précédente est le plan tangent γ à la surface (G) en G. Ce plan est déterminé par les points

$$A, \quad B, \quad A' + vB';$$

il passe donc par la droite AB.

Pour que le plan γ reste fixe lorsque le point G décrit la droite AB, il faut que les points A, B, A', B' soient linéairement dépendants, c'est-à-dire que l'on ait une relation de la forme

$$\alpha_0 A + \alpha_1 A' + \beta_0 B + \beta_1 B' = 0,$$

où les coefficients α, β sont fonctions de u.

Dans ces conditions, la surface (G) serait une développable. Mais alors, la droite AB représenterait le faisceau de rayons de centre y et de plan $yy'y''$, contrairement à l'hypothèse que x n'appartient pas à la droite yy'. Nous avons d'ailleurs déjà considéré le cas où la surface (G) est une développable dans un travail antérieur [1], auquel nous renvoyons. Nous n'y reviendrons plus ici.

3. Supposons donc les points A, B, A', B' linéairement indépendants. Le plan tangent γ à (G) en un point G varie lorsque le point de contact décrit la droite AB. Le lieu de ce plan est l'espace linéaire à trois dimensions déterminé par les points A, B, A', B'. La droite conjuguée de cet espace par rapport à l'hyperquadrique Q passe par les points $|xx'|$, $|yy'|$. Par suite, les points de rencontre de Q et de l'espace considéré représentent les droites de la congruence bilinéaire ayant comme directrices les droites xx', yy' tangentes aux courbes (x), (y) en deux points ayant le même paramètre u.

Le plan γ tangent à la surface (G) au point G est tangent à l'hyperquadrique Q en ce point; il coupe donc celle-ci suivant deux droites passant par G; l'une est la droite AB. L'autre droite représente nécessairement le faisceau de rayons de centre $y + vy'$ et dont le plan passe par la droite xx', puisque cette seconde droite appartient à l'espace ABA'B'.

On peut d'ailleurs arriver à cette propriété par une autre voie. Observons que l'on a

$$A' + vB' = |x' \quad y| + |x \quad y'| + v\{|x' \quad y'| + |x \quad y''|\}.$$

Puisque les points x, y, y', y'' sont coplanaires, le point $|xy''|$ appartient à la droite AB et le plan γ est donc déterminé par les points

$$A, \quad B, \quad |x' \quad y| + v|x' \quad y'|.$$

[1] Sur un théorème de M. G. Koenigs (*loc. cit.*).

Ce plan coupe Q suivant AB et suivant la droite joignant G au point

$$|x' \quad y| + v\,|x' \quad y'| = |x' \quad y + vy'|.$$

Ce point représente la droite joignant x' et $y + vy'$; le point G représente la droite passant par x et $y + vy'$. Par suite, la droite qui avec AB forme l'intersection de γ et de Q représente le faisceau de droites de sommet $y + vy'$ et dont le plan passe par la droite xx'. Désignons par g_v une droite de ce faisceau.

Lorsque le point G décrit une courbe Γ, la droite correspondante de (g) décrit une surface Γ', le faisceau des droites g_v décrit une congruence de même type que (g) et qui contient la surface Γ'. Donc

Une surface de la congruence (g) *peut toujours être considérée comme l'entersection de la congruence* (g) *et d'une congruence de même type.*

La congruence rencontrée est le lieu du point

$$A + vB + w\{|x' \quad y| + v\,|x' \quad y'|\},$$

où v à une valeur fixe.

4. Reprenons la courbe Γ. Le plan osculateur à cette courbe au point G est déterminé par les points

$$A + vB, \qquad A' + vB' + v'B, \qquad A'' + vB'' + 2v'B' + v''B.$$

La section de Q par ce plan représente la demi-quadrique osculatrice à la réglée Γ' correspondant à Γ, le long de la génératrice g ayant pour image G.

Lorsque la courbe Γ se déforme en passant toujours par G, le plan osculateur considéré varie dans l'espace linéaire à quatre dimensions ou hyperplan déterminé par les points

$$A, \quad B, \quad A', \quad B', \quad A'' + vB''.$$

Cet hyperplan contient l'espace ABA'B'; il représente le complexe linéaire osculateur à la congruence (g) le long de la génératrice g. Nous dirons que cet hyperplan est osculateur à la surface (G) au point G.

Lorsque le point G décrit la droite AB, l'hyperplan osculateur à (G) en G varie, sauf dans le cas où les points A, B, A', B', A'', B'' ne sont pas linéairement indépendants. Alors, les complexes osculateurs à la congruence (g) sont en nombre ∞^1.

Supposons que les points A, B, A', B', A'', B'' soient linéairement indépendants. Les complexes osculateurs à (g) sont donc en nombre ∞^2. L'enveloppe des hyperplans osculateurs à la surface (G) est le lieu de l'espace $AA'BB'$, lorsque u varie. Par suite

Les complexes osculateurs à la congruence (g) *le long des droites d'un faisceau de rayons contiennent la congruence bilinéaire ayant comme directrices les tangentes aux courbes* (y), (x) *aux points de ces courbes situés dans le plan du faisceau envisagé.*

L'enveloppe des complexes osculateurs à la congruence (g) *est un complexe* H *lieu des droites s'appuyant sur les couples de tangentes aux courbes* (x), (y) *en des points de même paramètre* u.

Ce résultat avait été obtenu par une autre voie par M. Mentré.

Le lieu de l'espace $AA'BB'$ est engendré par le point

$$\bar{G} = A + vB + wA_1 + vwB_1,$$

où

$$A_1 = |x' \quad y|, \qquad B_1 = |x' \quad y'|$$

sont les points de Q images respectivement des droites $x'y$, $x'y'$.

Pour $v = c^{te}$ ou $w = c^{te}$, le point G représente une droite qui décrit une congruence du même type que (g). Par suite,

Le complexe H *contient deux séries* ∞^1 *de congruences de même type que* (g).

5. Désignons par Σ l'hyperplan osculateur à la surface (G) en un point G de la courbe Γ; par σ l'espace linéaire à trois dimensions ayant un contact du troisième ordre avec la courbe Γ au point G. L'espace σ est déterminé par les points

$$A + vB, \qquad A' + vB' + v'B, \qquad A'' + vB'' + 2v'B' + v''B,$$
$$A''' + vB''' + 3v'B'' + 3v''B' + v'''B.$$

Les espaces Σ et σ ont en commun un plan, le plan osculateur à la courbe Γ au point G. Pour que l'espace Σ contienne l'espace σ, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} A \\ B \\ A' \\ B' \\ A'' + vB'' \\ A''' + vB''' + 3v'B'' \end{vmatrix} = 0,$$

où le premier membre représente le déterminant dont les colonnes sont les coordonnées des points indiqués. Cette équation s'écrit

$$3v' \begin{vmatrix} A \\ B \\ A' \\ B' \\ A'' \\ B'' \end{vmatrix} + v^2 \begin{vmatrix} A \\ B \\ A' \\ B' \\ B'' \\ B''' \end{vmatrix} + v \left\{ \begin{vmatrix} A \\ B \\ A' \\ B' \\ B'' \\ A''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A \\ B \\ A' \\ B' \\ A'' \\ B''' \end{vmatrix} \right\} + \begin{vmatrix} A \\ B \\ A' \\ B' \\ A'' \\ A''' \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Si, comme nous le supposerons, les points A, B, A', B', A'', B'' sont linéairement indépendants, le coefficient de v' n'est pas nul. Il en sera de même, en général, des autres coefficients de l'équation (1). On voit donc que les courbes Γ telles qu'en chacun de leurs points leur espace linéaire à trois dimensions surosculateur appartienne à l'hyperplan osculateur à la surface (G), sont définies par une fonction $v(u)$ satisfaisant à l'équation de Riccati (1). Il existe donc ∞^1 courbes Γ jouissant de cette propriété; ce sont des quasi-asymptotiques de la surface (G) [1]. Retournons à la congruence (g) et profitons de la propriété des intégrales de l'équation de Riccati; nous obtenons le résultat suivant :

Si les complexes osculateurs à la congruence (g) *sont en nombre* ∞^2, *il existe dans cette congruence une famille* ∞^1 *de surfaces réglées telles que si l'on prend deux des faisceaux de rayons de la congruence, les rayons de ces faisceaux appartenant à une surface variable dans la famille se correspondent projectivement.*

6. — Envisageons maintenant le cas où les points A, A′, A″, B, B′, B″ ne sont plus linéairement indépendants, c'est-à-dire où l'on a

$$|A \quad B \quad A' \quad B' \quad A'' \quad B''| = 0.$$

Alors, deux espaces consécutifs ABA′B′, A′B′A″B″ appartiennent à un hyperplan. Bornons-nous au cas où les courbes (x), (y) sont des courbes gauches proprement dites.

Soient x, x_1, x_2 trois points de la courbe (x), y, y_1, y_2, les points de la courbe (y) ayant même paramètre u respectivement que x, x_1, x_2. Considérons les congruences bilinéaires k de directrices xx_1, yy_1 et k_1, de directrices x_1x_2, y_1y_2. Supposons que ces congruences appartiennent à un même complexe linéaire. Alors le plan polaire de x_1 par rapport à ce complexe est le plan yy_1y_2 et celui de y_1 est le plan xx_1x_2. En d'autres termes, x_1 appartient au plan yy_1y_2 et y_1 au plan xx_1x_2. Passons à la limite en faisant tendre x_1, x_2 vers x sur la courbe (x); alors y_1, y_2 tendent vers y sur la courbe (y). Le point x appartient au plan osculateur $yy'y''$ à (y) en y et le point y appartient à son tour au point osculateur $xx'x''$ à la courbe (x) au point x. Alors, les courbes (x), (y) sont des asymptotiques de la surface réglée engendrée par la droite xy.

Ce cas a été considéré par M. Mentré, de même que ceux où l'une des courbes (x), (y) est plane, ou dans lesquels la

(1) E. Bompiani, Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi. (*Rend. Circolo Matem. di Palermo*, 1914, t. 37, pp. 305-21.)

développable engendrée par la droite yy' est un cône. Nous ne nous y arrêterons pas davantage.

7. — Nous avons supposé, dans ce qui précède, que le point x n'appartenait pas à la droite yy'. Comme nous l'avons dit, nous avons considéré dans un travail antérieur le cas où x coïncide avec y; la surface (G) est alors une développable. Nous allons examiner le cas où x appartient à la droite yy', mais est distinct de y. Nous supposerons que la courbe (y) est une courbe proprement dite.

Observons que l'on peut multiplier les coordonnées homogènes de y par une fonction de u telle que le point y' occupe une position déterminée sur la tangente à la courbe (y) au point y, distincte de y. On pourra donc supposer que x coïncide avec y'. Nous écarterons le cas banal où la courbe (y) est plane.

Nous poserons actuellement

$$A = | y \quad y' |, \qquad B = | y' \quad y'' |$$

et l'on aura encore

$$G = A + vB.$$

La surface (G) ne peut être une développable. Le point y''' n'appartient pas au plan $yy'y''$ et par suite les points A, B, $| y\, y'' |$, $| y\, y''' |$, $| y'\, y''' |$, $| y''\, y''' |$ sont linéairement indépendants. Il en résulte que les points A, B, A$'$, B$'$, A$''$, B$''$ sont également linéairement indépendants. Par suite, la congruence (g) possède ∞^2 complexes linéaires osculateurs et les résultats obtenus plus haut dans cette hypothèse sont valables.

Lorsque la développable yy' se réduit à un cône de sommet fixe y, le point x est un point de ce cône; il est aisé de voir que, même lorsque la courbe (x) est plane, la congruence (g) admet ∞^2 complexes osculateurs et que les résultats obtenus sont encore applicables.

Liége, le 4 décembre 1930.

M. HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.