ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XIII, nos 10-11.
Séance du 5 novembre 1927, pp. 707-724.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — Sur les involutions régulières d'ordre trois appartenant à une surface irrégulière,

par LUCIEN GODEAUX, professeur à l'Université de Liége.

Les résultats que nous avons obtenus récemment sur les involutions régulières d'ordre deux, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique irrégulière (*), peuvent pour la plupart s'étendre, par des raisonnements analogues, aux involutions régulières cycliques d'ordre quelconque. Cependant, pour ces dernières involutions, les points unis ne sont pas tous de même nature, fait qui ne se présentait pas dans le cas d'involutions d'ordre deux. Si nous considérons, sur une surface irrégulière F, une involution cyclique d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, une surface Φ, image de cette involution, possède comme points de diramation, soit des points multiples d'ordre p à

(*) *Sur les involutions régulières d'ordre deux appartenant à une surface irrégulière.* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1924, pp. 434-446; 1925, pp. 37-47, 157-166.) — *Sur les surfaces de Picard de diviseur deux.* (IDEM, 1927, pp. 394-414.) — *Sur une propriété des surfaces algébriques irrégulières contenant une involution régulière d'ordre deux.* (IDEM, 1927, pp. 524-543.)

cônes tangents rationnels et irréductibles, soit des points doubles biplanaires (singuliers si $p > 3$). Lorsque p est égal à deux, il n'existe que des points de diramation de la première catégorie. Il semble donc qu'il y ait intérêt à étudier les systèmes de courbes tracés sur la surface Φ et la manière dont ils se comportent vis-à-vis des points de diramation; c'est ce que nous nous proposons de faire ici en nous limitant, pour plus de simplicité, au cas où p est égal à trois. L'extension des résultats obtenus au cas où p est supérieur à trois semble d'ailleurs être assez simple, si pas immédiate (*).

1. Soit F une surface algébrique irréductible d'irrégularité $q > 1$, contenant une involution régulière I_3, d'ordre trois, n'ayant qu'un nombre fini de points unis et, par suite, cyclique. Désignons par T la transformation birationnelle de période trois, de F en elle-même, génératrice de l'involution I_3.

Nous avons montré que l'on peut construire, sur F, un système linéaire complet $|C_0|$, irréductible, privé de points-base, transformé en lui-même par T; de plus, cette construction peut être faite de manière que le système $|C_0|$ ne soit pas composé au moyen de l'involution I_3. Dans ces conditions, le système $|C_0|$ contient un système linéaire partiel $|C_{01}|$, privé de points-base et composé au moyen de I_3. Soient r la dimension de $|C_0|$, ρ $(\rho < r)$ celle de $|C_{01}|$. On peut, en remplaçant éventuellement $|C_0|$ par un de ses multiples convenablement choisi, supposer que ρ est au moins égal à trois. Cela étant, rapportons projectivement les courbes C_{01} aux hyperplans d'un espace linéaire S_ρ à ρ dimensions. La surface F se transforme

(*) Nous supposerons connus les résultats obtenus dans nos travaux suivants : *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique.* (Bull. de la Soc. math. de France, 1919, pp. 1-16.) — *Recherches sur les involutions cubiques appartenant à une surface algébrique.* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1921, pp. 105-124.)

en une surface Φ, image de l'involution I_3. Nous désignerons par $|\Gamma|$ le système des sections hyperplanes de Φ, par π le genre de ces courbes, par n l'ordre de la surface. Dans ces conditions, le système $|C_{01}|$ et, par suite, le système $|C_0|$ ont le degré $3n$ et le genre $3\pi - 2$.

En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions, la surface F se transforme birationnellement en une surface d'ordre $3n$, à sections hyperplanes de genre $3\pi - 2$, que nous désignerons encore par F. Sur ce nouveau modèle projectif de F, la transformation T est déterminée par une homographie H de l'espace S_r.

Soit maintenant A un point uni de I_3; il appartient à l'un des espaces unis de l'homographie H et est nécessairement simple pour la surface F. L'homographie H transforme en lui-même le plan tangent à F au point A et détermine, dans ce plan, soit une homologie, soit une homographie non homologique. Dans le premier cas, le point A est un point de coïncidence parfaite, dans le second, un point de coïncidence non parfaite. Nous dirons que, dans le premier cas, A est un point uni de première espèce, dans le second, un point uni de seconde espèce.

A un point uni de première espèce correspond, sur Φ, un point de diramation complète ou de première espèce, qui est un point triple conique, à cône tangent rationnel, de la surface. Au point de vue des transformations birationnelles, ce point est équivalent à une courbe rationnelle de degré -3. A un point uni de seconde espèce, correspond sur Φ un point de diramation non parfaite ou de seconde espèce, qui est un point double biplanaire ordinaire de la surface et qui équivaut, au point de vue des transformations birationnelles, à l'ensemble de deux courbes rationnelles de degré -2, ayant un point commun.

Nous désignerons par α le nombre des points unis de première espèce de I_3, par β celui des points unis de seconde espèce, et nous supposerons ce dernier nombre non nul.

2. A ces résultats, qui se trouvent établis dans nos travaux cités plus haut, nous ajouterons les suivants, établis dans le second travail cité.

Le nombre β n'étant pas nul, l'homographie H possède nécessairement trois espaces linéaires unis (lieux de points unis) que nous désignerons par $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$. Le premier seul rencontre la surface F, d'ordre $3n$, de S_2, précisément aux $\alpha + \beta$ points unis. Les plans tangents à F en chacun des α points unis de première espèce rencontrent $S^{(1)}$ en un point et l'un des espaces $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ suivant une droite. Nous désignerons par α_2 le nombre des points unis dont les plans tangents rencontrent $S^{(2)}$, par $\alpha_3 = \alpha - \alpha_2$ le nombre de ceux qui rencontrent $S^{(3)}$. Le plan tangent à F en un point uni de seconde espèce rencontre chacun des espaces $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ en un point; parmi les tangentes en ce point à F, il y en a donc deux qui sont unies par H.

Les hyperplans passant par $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ découpent, sur F, les courbes C_{01}, et $S^{(1)}$ a, par suite, la dimension ρ. Les hyperplans passant par $S^{(3)}$, $S^{(1)}$ découpent, sur F, les courbes C_{02} formant un système linéaire $|C_{02}|$ composé au moyen de I_3. Les courbes C_{02} passent simplement par α_2 points unis de première espèce, doublement par les α_3 autres, simplement par les β points unis de seconde espèce, en y touchant la tangente à F qui s'appuie sur $S^{(3)}$. Aux courbes C_{02} correspondent, sur Φ, des courbes Γ_2 formant un système linéaire complet $|\Gamma_2|$. Les courbes Γ_2 rencontrent en un point chacune des courbes rationnelles de degré — 3 équivalentes aux α_2 premiers points de diramation de première espèce, en deux points chacune des courbes équivalentes aux α_3 autres points, en un point une seule des deux courbes rationnelles de degré — 2 équivalentes à chacun des points de diramation de seconde espèce.

Si l'on désigne par A_2 la somme des courbes équivalentes aux α_2 premiers points de diramation de première espèce; par A_3 la somme des courbes équivalentes aux α_3 autres; par B_2 la somme des courbes rationnelles de degré — 2 qui proviennent des points de diramation de seconde espèce qui sont rencontrées par les courbes Γ_2; par B_3 la somme des autres courbes analogues, on a la relation fonctionnelle

$$3\Gamma \equiv 3\Gamma_2 + A_2 + 2A_3 + 2B_2 + B_3.$$

La considération des hyperplans passant par $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ conduit à un système $|C_{03}|$ composé au moyen de I_3 et, sur la surface Φ, à un système linéaire complet $|\Gamma_3|$ donnant lieu à la relation fonctionnelle

$$3\Gamma \equiv 3\Gamma_3 + 2A_2 + A_3 + B_2 + 2B_3.$$

Les courbes Γ_2 et Γ_3 sont d'ordre n.

3. Nous pouvons supposer que le système $|C_0|$ est non spécial, en le remplaçant éventuellement par un de ses multiples convenablement choisi. Nous pouvons de même supposer, pour la même raison, que l'on a

$$p_a + 3n - (3\pi - 2) + 1 > 0, \tag{1}$$

p_a étant le genre arithmétique de F. Alors, d'après le théorème de Riemann-Roch, le système $|C_0|$ appartient à un système continu complet $\{C\}$, irréductible, formé de ∞^q systèmes linéaires $|C|$ de degré $3n$ et de genre $3\pi - 2$. Observons que la dimension d'un système linéaire $|C|$ de $\{C\}$ est au moins égale au premier membre de l'expression (1); cette quantité peut d'ailleurs être supposée aussi grande qu'on le veut, en remplaçant éventuellement $|C_0|$ par un de ses multiples.

A un système linéaire $|C|$ de $\{C\}$, T fait correspondre un système linéaire $|C'|$. Faisons varier $|C|$ dans $\{C\}$ d'une manière continue de telle sorte qu'il vienne coïncider avec $|C_0|$. Alors, $|C'|$ décrit sur F un système continu comprenant $|C_0|$ et qui est, par suite, contenu dans le système continu complet $\{C\}$. Il en résulte que le système continu complet $\{C\}$ est transformé en lui-même par T.

Soit, si c'est possible, $|C_1|$ un système linéaire de $\{C\}$ qui soit transformé en lui-même par T. D'après une observation faite plus haut, nous pouvons supposer que la dimension r_1 de $|C_1|$ est au moins égale à trois. Cela étant, rapportons projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace linéaire S_{r_1} à r_1 dimensions; la surface F se transforme birationnellement en une surface F_1, d'ordre $3n$, dont les sections hyperplanes seront dénotées par C_1 (*).

Sur la surface F_1, la transformation T, échangeant entre elles les sections hyperplanes, est déterminée par une homographie H_1 de l'espace ambiant.

L'homographie H_1, de période trois, possède deux ou trois espaces unis (lieux de points unis) et les points de rencontre de F_1 et de ces espaces sont les points unis de I_3. Soit P un point uni de seconde espèce de I_3; ce point est nécessairement simple pour F_1 (sans quoi I_3 aurait une courbe rationnelle non exceptionnelle unie). Le plan tangent en P à F_1 est uni pour H_1 et cette homographie détermine, dans ce plan, une homographie non homologique à points unis distincts puisque cyclique. Supposons que H_1 ne possède que deux espaces unis (lieux de points unis) $S'^{(1)}$, $S'^{(2)}$. Le point P appartient à l'un de ces espaces, par exemple à $S'^{(1)}$, et le plan tangent à F_1 en P ne peut rencontrer $S'^{(1)}$ qu'au point P; par suite, ce plan rencontre le second espace uni $S'^{(2)}$ suivant une droite. Mais cela est impossible, car alors H_1 déterminerait sur ce plan une homologie de centre P. Il en résulte que l'homographie H_1 possède nécessairement (puisque $\beta > 0$) trois espaces unis (lieux de points unis) $S'^{(1)}$, $S'^{(2)}$, $S'^{(3)}$.

Désignons par β_1, β_2, $\beta_3 = \beta - \beta_1 - \beta_2$ les nombres de points unis de seconde espèce appartenant respectivement aux

(*) Si le système $|C_1|$ était composé au moyen de I_3, il suffirait de remplacer $|C_0|$ par un de ses multiples convenablement choisi pour qu'il n'en soit plus ainsi.

espaces $S'^{(1)}$, $S'^{(2)}$, $S'^{(3)}$. Les plans tangents à F_1 en ces points s'appuient en un point sur chacun des espaces unis.

Observons maintenant que si P' est un point uni de première espèce (nécessairement simple pour F_1), H_1 détermine dans un plan tangent à F_1 en P' une homologie de sommet P'; par suite, ce plan tangent s'appuie suivant une droite sur l'un des espaces unis ne contenant pas P'. Désignons par α_{12}, α_{13} les nombres de points unis de première espèce appartenant à $S'^{(1)}$ et tels que les plans tangents à F_1 en ces points s'appuient respectivement suivant une droite sur $S'^{(2)}$, $S'^{(3)}$. Définissons d'une manière analogue les nombres α_{23}, α_{21} et α_{31}, α_{32}.

Les hyperplans passant par $S'^{(2)}$, $S'^{(3)}$ découpent, sur F_1, des courbes C_{11} formant un système linéaire composé au moyen de I_3. Il est facile de voir que les courbes C_{11} passent simplement par $\alpha_{21}+\alpha_{31}$ points unis de première espèce, doublement par $\alpha_{23}+\alpha_{32}$ autres points unis de première espèce (les tangentes étant variables), simplement par $\beta_2+\beta_3$ points unis de seconde espèce en touchant, en ces points, les tangentes à F_1 qui s'appuient sur $S'^{(2)}$ et $S'^{(3)}$.

Aux courbes C_{11} correspondent, sur Φ, des courbes Γ_{11} formant un système linéaire complet $|\Gamma_{11}|$. Les courbes Γ_{11} rencontrent en un point chacune des courbes équivalentes à un point de diramation homologue d'un point uni de première espèce appartenant à $S'^{(2)}$, $S'^{(3)}$, le plan tangent à F_1 en ce point s'appuyant sur $S'^{(1)}$. A un point uni de $S'^{(2)}$ ou $S'^{(3)}$, de première espèce, tel que le plan tangent à F_1 en ce point s'appuie sur $S'^{(3)}$ ou $S'^{(2)}$, correspond sur Φ un point de diramation dont la courbe équivalente est rencontrée en deux points par les courbes Γ_{11}. A un point uni de seconde espèce appartenant aux courbes C_{11} correspond sur Φ un point de diramation équivalent à deux courbes dont une seule est rencontrée par les courbes Γ_{11} et en un seul point.

Les hyperplans passant par $S'^{(3)}$, $S'^{(1)}$ ou par $S'^{(1)}$, $S'^{(2)}$ découpent sur F_1 des systèmes linéaires $|C_{12}|$, $|C_{13}|$ composés au moyen de I_3 ; à ces systèmes correspondent, sur Φ, des systèmes linéaires complets $|\Gamma_{12}|$, $|\Gamma_{13}|$. On trouvera sans peine de quelle manière se comportent les courbes Γ_{12}, Γ_{13} aux points de diramation de Φ.

A une courbe C quelconque de $\{C\}$ correspond, sur Φ, une courbe $\overline{\Gamma}$ variable dans un système linéaire, puisque Φ est une surface régulière. Lorsque la courbe C coïncide avec une courbe C_{01}, la courbe $\overline{\Gamma}$ coïncide avec une courbe 3Γ. Lorsque la courbe C coïncide avec une courbe C_{11}, la courbe $\overline{\Gamma}$ se réduit à une courbe $3\Gamma_{11}$ augmentée d'un certain nombre de courbes équivalentes à des points de diramation.

Représentons par A_{ik} la somme des courbes équivalentes aux points de diramation homologues des α_{ik} points unis de première espèce situés dans $S'^{(i)}$ et dont les plans tangents s'appuient sur $S'^{(k)}$. Considérons les points de diramation de seconde espèce homologues des points unis appartenant à $S'^{(2)}$; ils sont équivalents à β_2 couples de courbes rationnelles. Représentons par B_{23} la somme de celles de ces courbes rencontrées par les courbes Γ_{11}, par B_{21} la somme des autres courbes. Définissons d'une manière analogue les sommes de courbes B_{32}, B_{31}, B_{12}, B_{13}. En tenant compte des conditions de rencontre des courbes Γ_{11} avec les courbes équivalentes aux points de diramation, on trouve aisément la relation fonctionnelle

$$3\Gamma \equiv 3\Gamma_{11} + A_{21} + A_{31} + 2(A_{23} + A_{32}) + 2(B_{23} + B_{32}) + B_{21} + B_{31}. \quad (2)$$

On a de même

$$3\Gamma \equiv 3\Gamma_{12} + A_{32} + A_{12} + 2(A_{31} + A_{13}) + 2(B_{31} + B_{13}) + B_{32} + B_{12}, \quad (3)$$
$$3\Gamma \equiv 3\Gamma_{13} + A_{13} + A_{23} + 2(A_{12} + A_{21}) + 2(B_{12} + B_{21}) + B_{13} + B_{23}. \quad (4)$$

4. Supposons que le système continu $\{C\}$ puisse contenir une infinité de systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par T. Chacun des systèmes donne naissance, sur la surface Φ, à trois systèmes linéaires de courbes du même ordre n que les courbes Γ. Les courbes de ces systèmes linéaires ne peuvent se comporter que d'un nombre fini de manières différentes vis-à-vis des points de diramation; par suite, il y aura, sur Φ, une infinité de systèmes linéaires de courbes d'ordre n se comportant de la même manière vis-à-vis des points de diramation. Pour fixer les idées, supposons qu'il y ait précisément une infinité de systèmes linéaires $|\Gamma_{21}|$, $|\Gamma_{31}|$, ... se comportant comme le système $|\Gamma_{11}|$. On a donc

$$3\Gamma \equiv 3\Gamma_{i1} + A_{21} + A_{31} + 2(A_{23} + A_{32}) + 2(B_{23} + B_{32}) + B_{21} + B_{31}, \qquad (i = 2, 3, \dots)$$

et, par suite,

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{21} \equiv 3\Gamma_{31} \equiv \cdots.$$

La surface Φ étant régulière, les systèmes linéaires $|\Gamma_{11}|$, $|\Gamma_{21}|$, $|\Gamma_{31}|$, ... ne peuvent former une série continue et, d'autre part, il ne peut exister plus de trois systèmes linéaires dont les triples soient équivalents. Il en résulte que le système $\{C\}$ ne peut contenir qu'un nombre fini de systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par T.

Cela étant, soit V_q la variété de Picard attachée à la surface F. Il existe une correspondance birationnelle entre les points de V_q et les systèmes linéaires de $\{C\}$; par suite, à la transformation T correspond une transformation birationnelle θ, de période trois, de la variété V_q en elle-même. Cette transformation, d'après ce qu'on vient d'établir, ne laisse invariants qu'un nombre fini de points de V_q et précisément 3^q points (*). Par suite, il existe, dans le système $\{C\}$, 3^q systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par T. Nous les désignerons par $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_k|$, en posant $k = 3^q - 1$.

5 Chacun des systèmes $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_k|$ contient trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_3

(*) S. LEFSCHETZ, *On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to abelian varieties* (Prix Bordin 1919). (TRANSACTIONS OF THE AMER. MATH. SOC., 1921, t. XXII, pp. 327-482.) Voir nos 118-121.

et ces systèmes donnent, sur la surface Φ, $3(k+1)=3^{q+1}$ systèmes linéaires de courbes d'ordre n. Supposons que deux de ces systèmes, par exemple $|\Gamma_{11}|$ et $|\Gamma_{i1}|$, puissent se comporter de la même manière vis-à-vis des points de diramation de Φ. On a alors

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{i1}$$

et le diviseur de Severi σ de la surface Φ doit être multiple de trois (*).

Si le diviseur de Severi σ de Φ n'est pas multiple de trois, les 3^{q+1} systèmes linéaires de courbes d'ordre n sur la surface Φ ne se comportent pas de la même manière aux points de diramation de la surface. Si, au contraire, le diviseur σ de Φ est multiple de trois, les 3^{q+1} systèmes linéaires envisagés se répartissent en 3^q groupes de trois systèmes dont les courbes se comportent de la même manière aux points de diramation de la surface. En particulier, il y aura trois systèmes linéaires, dont le système $|\Gamma|$ des sections hyperplanes de Φ, formés de courbes ne passant par aucun point de diramation.

6. Nous avons supposé $q>1$; par suite, parmi les systèmes $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_k|$, il y en aura certainement un ne donnant pas naissance, sur la surface Φ, à un système linéaire de courbes d'ordre n ne rencontrant pas les courbes équivalentes aux points de diramation, même si le diviseur σ de Φ est multiple de trois. Supposons que ce système soit $|C_1|$. Cela revient à supposer qu'aucune des sommes de nombres positifs

$$\alpha_{12}+\alpha_{13}+\beta_1, \qquad \alpha_{21}+\alpha_{23}+\beta_2, \qquad \alpha_{31}+\alpha_{32}+\beta_3$$

n'est nulle.

Reprenons la relation fonctionnelle (2). Dans nos *recherches sur les involutions cubiques...*, nous avons démontré que l'exis-

(*) Severi, *Complementi alla teoria della base per la totaliti delle curve di una superficie algebrica.* (Rend. Circolo matem. di Palermo, 1910, t. XXX, pp. 265-288.)

tence d'une courbe Γ_{11} satisfaisant à cette relation est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une surface algébrique Ψ, contenant une involution J_3 d'ordre trois, possédant $\alpha_{21} + \alpha_{31} + \alpha_{23} + \alpha_{32}$ points unis de première espèce et $\beta_2 + \beta_3$ points unis de seconde espèce. Les points de diramation correspondants, de première et de seconde espèce, sont les points qui interviennent dans la formation des courbes A_{21}, A_{31}, A_{23}, A_{32}, B_{23}, B_{32}, B_{21} et B_{31}. De plus, les courbes qui correspondent, sur Ψ, aux courbes Γ et Γ_{11}, sont équivalentes. Nous désignerons ces courbes par L et nous prendrons, pour modèle projectif de Ψ, la surface qui a pour sections hyperplanes les courbes L.

Le système $|\Gamma|$ étant de degré n et de genre π, le système linéaire $|L|$ est de degré $3n$, de genre $3\pi - 2$ et la surface Ψ est d'ordre $3n$.

Le nombre β n'étant pas nul, on peut supposer, en changeant éventuellement de notation, que la somme $\beta_2 + \beta_3$ n'est pas nulle (β_1 pouvant être nul), c'est-à-dire que l'involution J_3, sur Ψ, possède au moins un point uni de seconde espèce. Observons encore que l'involution J_3, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, est cyclique.

Cela étant, nous pouvons appliquer au système linéaire $|L|$ les résultats obtenus dans nos *Recherches sur les involutions cubiques*... Le système $|L|$, qui est transformé en lui-même par la transformation birationnelle de Ψ, en elle-même génératrice de J_3, contient trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de J_3. L'un de ces systèmes contient les courbes L transformées des courbes Γ; le second contient les courbes L transformées des courbes Γ_{11}. Les courbes du troisième système passent simplement par les points unis de première espèce de J_3, qui sont doubles pour les transformées des courbes Γ_{11}, doublement par ceux qui sont simples pour ces transformées, simplement par les points unis de seconde espèce de J_3 en y touchant la tangente unie qui n'a pas de contact avec les transformées des courbes Γ_{11}. Aux courbes de ce troisième système correspondent, sur Φ, des courbes Γ', d'ordre n, formant un système linéaire complet $|\Gamma'|$ et satisfaisant à la relation fonctionnelle

$$3\Gamma = 3\Gamma' + A_{23} + A_{32} + 2(A_{21} + A_{31}) + 2(B_{21} + B_{31}) + B_{23} + B_{32}. \quad (5)$$

7. Entre les surfaces Ψ et F existe une correspondance (3, 3), deux points homologues appartenant le premier au groupe de J_3, le second au groupe de I_3 représentés par un même point de Φ. Désignons par F' une surface qui représente les couples de points homologues de cette correspondance. Sur F' existent deux involutions I'_3, J'_3, d'ordre trois, ayant respectivement pour images les surfaces Ψ et F. A un point de Φ correspondent neuf points de F' formant trois groupes de I'_3 et trois groupes de J'_3.

Soit M un point de diramation de Φ pour la correspondance (1, 3) entre Φ et F. Si le point M est également un point de diramation pour la correspondance (1, 3) entre Φ et Ψ, à M correspond un seul point sur Ψ et à ce point correspondent trois points sur F'. Comme à M correspond un seul point de F, ces trois points forment un groupe de l'involution J'_3. Si au contraire M n'est pas un point de diramation pour la correspondance (1, 3) entre Φ et Ψ, il lui correspond trois points sur Ψ; à chacun de ces points correspond un point de F' et les trois points ainsi obtenus sur cette surface forment un groupe de J'_3. Il en résulte que l'involution J'_3 est dépourvue de points unis et que l'involution I'_3 possède $3(\alpha_{12} + \alpha_{13})$ points unis de première espèce et $3\beta_1$ points unis de seconde espèce.

Appelons C' les courbes qui, sur F', correspondent aux courbes du système $\{C\}$ de F, et C'_0 celles qui correspondent aux courbes de $|C_0|$. Dans la correspondance (1, 3) entre Ψ et F', aux courbes L correspondent des courbes du système complet $|C'_0|$. Par suite, dans la correspondance (1, 9) entre Φ et F', aux courbes Γ, Γ_{11}, Γ' correspondent des courbes de $|C'_0|$. Aux courbes Γ' correspondent, sur F, des courbes qui ont pour homologues, sur F', de scourbes de $|C'_0|$; par suite, les courbes

Γ' ont pour transformées, sur F, des courbes du système $\{C\}$. D'une manière plus précise, ces transformées appartiennent à un système linéaire de $\{C\}$ transformé en lui-même par T et qui est donc un des systèmes $|C_2|, \ldots, |C_k|$. Supposons que ce soit $|C_2|$.

Au système $|C_2|$ correspondent, sur Φ, trois systèmes de courbes d'ordre n, linéaires, $|\Gamma_{21}|$, $|\Gamma_{22}|$, $|\Gamma_{23}|$; l'un de ces systèmes est $|\Gamma'|$. Nous pouvons disposer des notations de manière que $|\Gamma'|$ coïncide avec $|\Gamma_{21}|$. La relation (5) donne alors

$$3\Gamma \equiv 3\Gamma_{21} + A_{23} + A_{32} + 2(A_{21} + A_{31}) + 2(B_{21} + B_{31}) + B_{23} + B_{32}. \quad (6)$$

Sur la surface F', le système $|C_0'|$ contient trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de J_3' : l'un contient les transformées des courbes C_0, le second celles des courbes C_1 et le troisième les transformées des courbes C_2.

8. Reprenons, sur la surface F', l'involution I_3' ayant pour image la surface Ψ. L'involution I_3', n'ayant qu'un nombre fini de points unis, est cyclique; le système linéaire $|C_0'|$ est transformé en lui-même par la transformation birationnelle génératrice de I_3'. Le système $|C_0'|$ contient un système linéaire partiel $|C_{01}'|$, dépourvu de points-base, composé au moyen de I_3'; c'est le système transformé de $|L|$.

Les courbes qui, dans la correspondance (1, 9) entre Φ et F', correspondent aux courbes Γ_2, Γ_3, Γ_{12}, Γ_{13}, Γ_{22}, Γ_{23}, appartiennent à $|C_0'|$ mais non à $|C_{01}'|$. Par suite, $|C_0'|$ contient au moins un second système linéaire partiel $|C_{02}'|$ composé au moyen de I_3', et il en contient au plus trois (et certainement trois si $\beta_1 > 0$). Aux courbes C_{02}' correspondent, sur Ψ, des courbes L_2 formant un système linéaire complet $|L_2|$.

Soit τ la transformation birationnelle de Ψ en elle-même, génératrice de l'involution J_3. D'après sa construction, $|L_2|$ est transformé en lui-même par τ et il contient, par suite, au plus trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de J_3. Ces systèmes sont les transformés de trois des six systèmes $|\Gamma_2|$,

$|\Gamma_3|$, $|\Gamma_{12}|$, $|\Gamma_{13}|$, $|\Gamma_{22}|$, $|\Gamma_{23}|$ de Φ. Il en résulte que $|\Gamma_2|$ contient nécessairement trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de J_3 et que $|C'_0|$ contient un troisième système linéaire partiel $|C'_{03}|$ composé au moyen de I'_3. Aux courbes C'_{03} correspondent, sur Ψ, des courbes L_3 formant un système complet, linéaire, $|L_3|$, transformé en lui-même par τ. Ce système $|L_3|$ contient nécessairement trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de J_3 et qui sont les transformés de trois des six systèmes linéaires de Φ énumérés plus haut.

Considérons, sur Ψ, les points de diramation pour la correspondance (1, 3) entre Ψ et F'. Nous avons vu que ces points sont les correspondants, sur Ψ, des points de diramation de Φ par lesquels ne passent pas les courbes Γ_{11}. Puisque, par construction, la surface Ψ est normale (les sections hyperplanes formant le système complet $|L|$), les points de diramation de Ψ sont $3(\alpha_{12}+\alpha_{13})$ points triples coniques à cônes tangents rationnels et $3\beta_1$ points doubles biplanaires ordinaires.

D'après les résultats établis dans nos *Recherches sur les involutions cubiques...*, les courbes L_2 passent simplement par certains points triples de Ψ, doublement par les autres et simplement par les points doubles biplanaires (en rencontrant, et en un point, une seule des deux courbes rationnelles équivalentes à chacun de ces points).

Désignons par $|L_{21}|$, $|L_{22}|$, $|L_{23}|$ les systèmes linéaires partiels de $|L_2|$ composés au moyen de J_3. L'un de ces systèmes est le transformé de $|\Gamma_2|$ ou de $|\Gamma_3|$; pour fixer les idées, supposons que $|L_{21}|$ soit le transformé de $|\Gamma_2|$. Les systèmes $|L_{22}|$, $|L_{23}|$ ne peuvent être les transformés de $|\Gamma_3|$, car alors les courbes L_{22} ou L_{23} ne se comporteraient pas comme les courbes L_{21} (et L_2) aux points de diramation de Ψ. Il en résulte que l'un des systèmes $|L_{22}|$, $|L_{23}|$ est le transformé de l'un des systèmes $|\Gamma_{12}|$ ou $|\Gamma_{13}|$; supposons, pour fixer les idées, que $|L_{22}|$ soit le transformé de l'un des systèmes $|\Gamma_{12}|$ ou $|\Gamma_{23}|$, soit, pour fixer les idées, de $|\Gamma_{22}|$.

Appliquons maintenant au système $|L_2|$ les résultats établis plus haut (n° 3). Soit P un point uni de première espèce de l'involution J_3 sur Ψ. Ce point appartient certainement aux courbes L_{21} ; s'il appartient de plus aux courbes L_{22}, il ne peut appartenir aux courbes L_{23}. Supposons que le point P n'appartienne pas aux courbes L_{22}. Si les courbes L_{21} passent simplement par P, ce point est double pour les courbes L_{23}, et inversement. Observons encore qu'un point uni de première espèce de J_3, simple pour les courbes L_{22}, est double pour les courbes L_{21} et inversement. Cela étant, J_3 possède $\alpha_2 - \alpha_{12}$ points unis de première espèce simples pour les courbes L_{21}, parmi lesquels se trouvent nécessairement les α_{31} points unis doubles pour les courbes L_{22}. Il y a donc $\alpha_2 - \alpha_{12} - \alpha_{31}$ points unis doubles pour les courbes L_{23}. De même, il y a $\alpha_3 - \alpha_{13} - \alpha_{32}$ points unis de première espèce, simples pour les courbes L_{23}.

Soit maintenant P' un point uni de seconde espèce de J_3. Ce point appartient aux courbes L_{21} qui y touchent une des directions unies pour τ. Si les courbes L_{22} passent par P', elles y touchent la seconde direction unie pour τ et les courbes L_{23} ne passent pas par ce point. Si les courbes L_{22} ne passent pas par P', les courbes L_{23} touchent en ce point la seconde direction unie pour τ. Il en résulte que les courbes L_{23} passent, simplement, par β_2 points unis de seconde espèce de J_3.

Si l'on tient compte de ces résultats et des notations introduites plus haut, on a, sur la surface Φ, la relation fonctionnelle

$$\left.\begin{aligned} 3\Gamma \equiv 3\Gamma_{22} + A_3 - A_{13} - A_{32} + A_{12} + 2(A_2 - A_{12} - A_{31} + A_{13}) \\ + 2(B_{13} + B_{2i}) + B_{12} + B_{2h}, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

où i, h sont, dans un certain ordre, les nombres 1, 3.

On trouve de même

$$\left.\begin{aligned} 3\Gamma \equiv 3\Gamma_{23} + A_2 - A_{12} - A_{23} + A_{13} + 2(A_3 - A_{13} - A_{21} + A_{12}) \\ + 2(B_{12} + B_{3j}) + B_{13} + B_{3l}, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

où j, l sont, dans un certain ordre, les nombres 1, 2.

Rapprochons des relations (7) et (8) la relation (6) et rappelons que les systèmes linéaires $|\Gamma_{21}|$, $|\Gamma_{22}|$, $|\Gamma_{23}|$ proviennent d'un même système $|C_2|$ de $\{C\}$, de la surface F. Désignons par C_{21}, C_{22}, C_{23} les transformées des courbes Γ_{21}, Γ_{22}, Γ_{23} respectivement, sur la surface F. Nous désignerons de plus par A'_{12}, A'_{13}, ... l'ensemble des points unis de I_3, sur F, qui correspondent respectivement aux points de diramation de Φ équivalents aux courbes composantes de A_{12}, A_{13}, ...

Les points unis de I_3 sur F, doubles pour les courbes C_{21}, sont les points des groupes A'_{21}, A'_{31}. Ces points sont simples, soit pour les courbes C_{22}, soit pour les courbes C_{23}. Mais on sait que les points de A'_{31} n'appartiennent pas aux courbes C_{22}; par suite, ces points appartiennent aux courbes C_{23}. Observons que les autres points simples des courbes C_{23} (points unis de première espèce) sont ceux du groupe A'_{13}. On a, par suite, en retournant à la surface Φ, l'égalité fonctionnelle

$$A_2 \equiv A_{12} + A_{23} + A_{31}.$$

On a de même

$$A_3 = A_{13} + A_{21} + A_{32}.$$

Observons enfin que deux seules des courbes C_{21}, C_{22}, C_{23} peuvent passer par un point uni de seconde espèce de I_3 sur F, en y touchant chacune une des directions unies pour T. Il en résulte que l'on a nécessairement $i = 3$, $h = 1$, $j = 2$, $l = 1$.

Les formules (7) et (8) s'écrivent donc

$$3\Gamma \equiv 3\Gamma_{22} + A_{12} + A_{21} + 2(A_{13} + A_{23}) + 2(B_{13} + B_{23}) + B_{12} + B_{21}, \quad (9)$$

$$3\Gamma \equiv 3\Gamma_{23} + A_{31} + A_{13} + 2(A_{32} + A_{12}) + 2(B_{32} + B_{12}) + B_{31} + B_{13}. \quad (10)$$

On peut remarquer que les formules (9), (10) se déduisent respectivement des formules (4), (3), comme (6) se déduit de (2). Mais pour déduire (6) de (2), on a supposé que $\beta_2 + \beta_3$ n'était pas nul; pour déduire (9) de (4) et (10) de (3) par le même procédé, il faudrait supposer $\beta_3 + \beta_1$ et $\beta_1 + \beta_2$ non nuls, ce qui ne résulte pas de l'hypothèse $\beta > 0$. On est donc forcé d'utiliser un autre procédé de démonstration.

9. Les formules (2) et (6), définissant les systèmes linéaires $|\Gamma_{11}|$ et $|\Gamma_{21}|$; (3) et (10), définissant $|\Gamma_{12}|$ et $|\Gamma_{23}|$; (4) et (9), définissant $|\Gamma_{12}|$ et $|\Gamma_{22}|$, présentent une certaine symétrie, qui est la propriété que nous voulions établir dans cette note. Pour énoncer cette propriété, nous introduirons l'expression suivante :

Un point de diramation de première espèce de la surface Φ équivaut à une courbe rationnelle a de degré -3. Nous dirons que deux courbes tracées sur la surface Φ et rencontrant l'une en un point, l'autre en deux points, se comportent d'une manière complémentaire au point de diramation considéré, ou encore qu'elles ont un « comportement complémentaire » en ce point.

Un point de diramation de seconde espèce de Φ équivaut à deux courbes rationnelles b_1, b_2, de degré -2, ayant un point commun. Deux courbes tracées sur la surface Φ et rencontrant l'une en un point la courbe b_1, sans rencontrer la courbe b_2, l'autre la courbe b_2 en un point sans rencontrer la courbe b_1, seront dites se comporter d'une manière complémentaire au point de diramation considéré, ou encore avoir en ce point un « comportement complémentaire ».

La propriété établie dans cette note peut maintenant s'énoncer ainsi :

Si une surface algébrique régulière représente une involution d'ordre trois appartenant à une surface algébrique d'irrégularité $q > 1$ *et possédant* α *points unis de première espèce et* $\beta > 1$ *points unis de seconde espèce, cette surface contient* 3^{q+1} *systèmes linéaires complets de courbes du même ordre; les courbes d'un ou de trois de ces systèmes ne passent pas par les points de diramation de la surface. A un de ces systèmes dont les courbes passent par certains points de diramation sans passer par tous* *ces points est associé un second système dont les courbes ont un comportement complémentaire de celles du premier système aux points de diramation considérés.*

Il importe de remarquer que si le diviseur de Severi σ de la surface Φ est multiple de trois, il existe trois couples de systèmes linéaires dont les courbes ont des comportements complémentaires aux mêmes points de diramation de Φ.

Liége, 21 septembre 1927.

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.