ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XVI, n° 11.
Séance du 8 novembre 1930, pp. 1195-1205.

GÉOMÉTRIE.

Sur les Quadriques de Darboux d'une Surface,

par LUCIEN GODEAUX,
professeur à l'Université de Liége, correspondant de l'Académie.

Soit Φ_0 la quadrique de Lie attachée à un point x d'une surface (x). Les quadriques du faisceau déterminé par Φ_0 et par le plan tangent à la surface (x) au point x, compté deux fois, ont un contact du second ordre avec la surface au point considéré. Ce sont les quadriques de Darboux. Au point x de la surface (x), nous avons attaché une suite de quadriques Φ_0, Φ_1, ..., Φ_n, ... dont la première est la quadrique de Lie. Deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points dont le lieu fait partie de l'enveloppe de ces quadriques [1]. Il est naturel de considérer, à côté du faisceau des quadriques de Darboux, les faisceaux de quadriques déterminés par deux quadriques consécutives de la suite dont il vient d'être question. Il convient alors de chercher à établir une projectivité entre deux quelconques des faisceaux considérés. C'est là l'objet de cette note. La projectivité établie ne tombe en défaut que pour une classe particulière de surfaces, où il faut utiliser un autre procédé. Par contre, lorsque la surface (x) est isotherme asymptotique, la projectivité s'établit d'une manière particulièrement simple.

1. Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 d'un

(1) Voir, à ce sujet, différentes notes que nous avons publiées dans les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-51, 158-186, 315-358, 455-466; 1929, pp. 37-53, 126-133, 702-710, 943-958. Nous supposerons connu le contenu de ces notes.

point de la surface (x) satisfont au système d'équations aux dérivées partielles, complètement intégrable,

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2x = 0.$$

Considérons un point x de la surface. Tout point de l'espace peut être représenté par

$$z_1x + z_2x^{10} + z_3x^{01} + z_4x^{11};$$

z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées locales de ce point, par rapport au point x.

La quadrique de Lie attachée au point x a pour équation locale

$$\Phi_0 \equiv z_1z_4 - z_2z_3 + 2abz_4^2 = 0$$

et le plan tangent à la surface au même point a pour équation

$$z_4 = 0.$$

Le faisceau des quadriques de Darboux est représenté par

$$\Theta \equiv z_1z_4 - z_2z_3 + 2abz_4^2 + \theta z_4^2 = 0.$$

Soit Q l'hyperquadrique d'un espace linéaire S_5 à cinq dimensions représentant les droites de l'espace ordinaire S_3 auquel la surface (x) appartient. Désignons par U, V les points de Q représentant les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} de la surface (x) au point x. On sait que ces points sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$\ldots,\ U_i,\ \ldots,\ U_1,\ U,\ V,\ V_1,\ \ldots,\ V_i,\ \ldots,$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u (Bompiani, Tzitzeica). Les sections de Q par les plans $U\,U_1\,U_2$, $V\,V_1\,V_2$ représentent les génératrices rectilignes des deux modes de la quadrique de Lie Φ_0.

Les génératrices rectilignes de la quadrique de Darboux Θ sont représentés par les sections de l'hyperquadrique Q par deux plans déterminés : le premier par les points U, U_1,

$U_2 + 2\theta V$; le second par les points $V, V_1, V_2 + 2\theta U$. Ces deux plans sont conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q. Nous désignerons ces plans respectivement par ϖ_u, ϖ_v.

2. Traçons, sur la surface (U), une courbe tangente en U à la droite UU_1. Le plan osculateur à cette courbe au point U est déterminé par les points

$$U, \quad U^{01}, \quad U^{02} + U^{10}\frac{d^2u}{dv^2},$$

c'est-à-dire par les points

$$U, \quad U_1, \quad U_2 - 2bV\frac{d^2u}{dv^2}.$$

Par suite, si nous traçons sur la surface (U) une courbe telle qu'au point U nous ayons

$$\frac{du}{dv} = 0, \qquad \frac{du^2}{dv^2} = -\frac{\theta}{b},$$

le plan osculateur à cette courbe au point U coïncidera avec le plan ϖ_u.

De même, si nous traçons sur la surface (V) une courbe telle qu'au point V nous ayons

$$\frac{dv}{du} = 0, \qquad \frac{d^2v}{du^2} = -\frac{\theta}{a},$$

le plan osculateur à cette courbe au point V coïncidera avec le plan ϖ_v.

3. La suite de Laplace déterminée par U, V est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q; les plans $U_i U_{i+1} U_{i+2}$, $V_i V_{i+1} V_{i+2}$ sont conjugués par rapport à cette hyperquadrique. Les sections de Q par ces plans représentent les génératrices rectilignes des deux modes d'une quadrique Φ_i. On obtient ainsi une suite de quadriques Φ_0, Φ_1, ... dont la première est la quadrique de Lie.

En utilisant la définition précédente, on pourrait aussi considérer la quadrique Φ_{-1}, en partant des plans V U U_1, U V V_1. Ces deux plans touchent l'hyperquadrique Q suivant la droite U V et la quadrique Φ_{-1} est donc constituée par le faisceau de rayons de centre x, situé dans le plan tangent en ce point à la surface (x), compté deux fois.

Le faisceau déterminé par les quadriques Φ_{-1}, Φ_0 est constitué par les quadriques de Darboux. Il est naturel de considérer ensuite le faisceau déterminé par les quadriques Φ_0, Φ_1 et, plus généralement, les faisceaux déterminés par deux quadriques de la suite $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$.

Nous allons établir entre le faisceau des quadriques Θ de Darboux et celui des quadriques Θ_1, déterminé par Φ_0, Φ_1, une correspondance biunivoque qui fera correspondre à Φ_{-1}, Φ_0, respectivement Φ_0, Φ_1.

4. Entre les surfaces (U), (U_1) existe une correspondance biunivoque, deux points homologues ayant les mêmes coordonnées curvilignes u, v. A la courbe considérée plus haut sur la surface (U) correspondra sur la surface (U_1) une courbe pour laquelle on aura, au point U_1 homologue du point U considéré,

$$\frac{du}{dv} = 0, \qquad \frac{d^2u}{d^2v} = -\frac{\theta}{b}.$$

Le plan osculateur en U_1 à cette courbe est déterminé par les points

$$U_1, \quad U_2, \quad bU_3 - h_1\theta U,$$

où

$$h_1 = -(\log b)^{11} + 4ab.$$

Nous désignerons ce plan par ϖ'_u.

En intervertissant les rôles des points U, V, on obtient de même un plan ϖ'_v déterminé par les points

$$V_1, \quad V_2, \quad aV_3 - k_1\theta V,$$

où

$$k_1 = -(\log a)^{11} + 4ab.$$

Les sections de l'hyperquadrique Q par les plans ϖ'_u, ϖ'_v représentent deux demi-quadriques. Pour que ces deux demi-quadriques aient même support, il faut et il suffit que les plans ϖ'_u, ϖ'_v soient conjugués par rapport à Q. Il suffit pour cela que les points $bU_3 - h_1\Theta U$, $aV_3 - k_1\Theta V$ soient conjugués par rapport à Q, c'est-à-dire que l'expression

$$ah_1\theta\Omega(U, V_3) + bk_1\theta\Omega(V, U_3)$$

soit nulle quel que soit θ,

$$\Omega(p, q) = 0$$

étant la condition pour que deux points p, q soient conjugués par rapport à Q.

Or, on calcule aisément les valeurs de Ω (U, V_3), Ω (V, U_3) en tenant compte des expressions de U_3, V_3 en fonction de U_2, U_1, U, V, V_1, V_2 que nous avons données ailleurs [1]. On trouve précisément

$$\Omega(U, V_3) = -4b\Delta, \qquad \Omega(V, U_3) = 4a\Delta,$$

où l'on a posé

$$\Delta = |x \quad x^{10} \quad x^{01} \quad x^{11}|,$$

le second membre étant le déterminant à seize éléments dont les lignes s'obtiennent en affectant successivement des indices 1, 2, 3, 4 les termes écrits.

On voit donc que la condition nécessaire et suffisante pour

[1] Congrès national des Sciences. Bruxelles, 1930.

que les plans ϖ'_u, ϖ'_v soient conjugués par rapport à Q, quel que soit θ, est

$$h_1 = k_1.$$

Il faut donc que la surface (x) soit isotherme-asymptotique.

5. Le support de la demi-quadrique représentée par la section de Q par le plan ϖ'_u a pour équation locale

$$\left.\begin{aligned}
&[4z_1 + 2z_2(\log a)^{10} + 2z_3(\log b)^{01} + \{8ab + (\log a)^{10}(\log b)^{01}\}z_4]^2 \\
&\quad + \alpha[2z_2 + z_4(\log b)^{01}]^2 + \beta[2z_3 + z_4(\log a)^{10}]^2 + \alpha\beta z_4^2 \\
&\quad + \frac{4h_1\theta + 2b\beta(\log b^2\beta)^{01}}{ab}(z_1z_4 - z_2z_3 + 2abz_4^2) = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

où l'on a posé

$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_2),$$

$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_1).$$

Observons que l'on a d'ailleurs

$$b\beta(\log b^2\beta)^{01} = a\alpha(\log a^2\alpha)^{10}.$$

Pour $\theta = 0$, l'équation précédente représente la quadrique Φ_1. Nous indiquerons par Φ_1 le premier membre de l'équation de cette quadrique; de sorte que l'équation (1) s'écrira

$$ab\Phi_1 + 4h_1\theta\Phi_0 = 0. \qquad (2)$$

De même, le support de la demi-quadrique représentée par la section de Q par le plan ϖ'_v a pour équation locale

$$ab\Phi_1 + 4k_1\theta\Phi_0 = 0. \qquad (3)$$

Dans le faisceau de quadriques déterminé par Φ_0, Φ_1, la quadrique qui, avec Φ_1, partage harmoniquement les quadriques (2) et (3), a pour équation

$$ab\Phi_1 + \frac{8h_1k_1\theta}{h_1 + k_1}\Phi_0 = 0.$$

Nous représenterons cette quadrique par Θ_1. Il y a, comme on voit, une correspondance biunivoque entre les quadriques Θ et Θ_1, correspondance qui est d'ailleurs une projectivité.

La construction de la quadrique Θ_1 tombe cependant en défaut lorsque, pour la surface (x), on a

$$h_1 + k_1 = 0.$$

Dans ce cas, en effet, les quadriques (2) et (3) partagent harmoniquement le couple de quadriques Φ_0, Φ_1. Nous laisserons ce cas de côté dans la suite; bornons-nous à observer que l'on peut faire correspondre à la quadrique Θ une quadrique Θ_1' telle que le rapport anharmonique des quatre quadriques (2), (3), Φ_1, Θ_1' ait une valeur donnée, différente de -1.

6. La correspondance qui vient d'être établie entre les quadriques Θ et Θ_1 permet de déterminer une quadrique de Darboux distincte, sauf dans un cas, de la quadrique de Lie et du plan tangent à la surface (x) au point x, compté deux fois.

La section de la quadrique Θ_1 par le plan $z_4 = 0$ est une conique par rapport à laquelle la polaire du point x est la droite

$$2z_1 + z_2(\log a)^{10} + z_3(\log b)^{01} = 0.$$

Les tangentes à cette conique passant par le point x ont pour équation

$$ab(\alpha z_2^2 + \beta z_3^2) - \left[\frac{8h_1k_1\theta}{h_1+k_1} + 2b\beta(\log b^2\beta)^{01}\right] z_2z_3 = 0.$$

Pour que les tangentes considérées partagent harmoniquement les tangentes asymptotiques de la surface (x) au point x, on doit avoir

$$\theta = -\frac{b\beta(\log b^2\beta)^{01}}{4h_1k_1}(h_1 + k_1).$$

La quadrique de Darboux correspondante a pour équation

$$4h_1k_1\Phi_0 - b\beta\,(\log b^2\beta)^{01}\,(h_1 + k_1)\,z_4^2 = 0;$$

cette quadrique est intrinsèque.

La quadrique de Darboux qui vient d'être considérée coïncide avec la quadrique de Lie lorsqu'on a

$$b\beta\,(\log b^2\beta)^{01} = b\beta^{01} + 2\beta b^{01} = 0.$$

Nous avons montré que cette relation est la condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotiques se correspondent sur les différentes nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface (x). Cette condition se traduit donc géométriquement par le fait que les tangentes menées du point x à la quadrique Φ_1, dans le plan tangent $z_4 = 0$, partagent harmoniquement les tangentes asymptotiques de la surface au point considéré.

7. Envisageons maintenant la correspondance entre les surfaces (U), (U_n), deux points homologues ayant les mêmes coordonnées curvilignes u, v. A la courbe considérée plus haut, sur la surface (U), correspond une courbe tracée sur la surface (U_n) et pour laquelle on a, au point U_n homologue du point U considéré,

$$\frac{du}{dv} = 0, \qquad \frac{d^2u}{dv^2} = -\frac{\theta}{b}.$$

Le plan osculateur à cette courbe au point U_n est déterminé par les points

$$U_n, \quad U_{n+1}, \quad bU_{n+2} - h_n\theta\,U_{n-1}, \tag{I}$$

h_n étant défini par la formule récurrente

$$h_n = -(\log b\,h_1h_2 \ldots h_{n-1})^{11} + h_{n-1}.$$

En intervertissant les rôles des points U, V, on trouve de même le plan déterminé par les points

$$V_n, \quad V_{n+1}, \quad aV_{n+2} - k_n\theta\,V_{n-1}, \tag{II}$$

où l'on définit k_n par la relation récurrente

$$k_n = -(\log a k_1 k_2 \dots k_{n-1})^{11} + k_{n-1}.$$

Les deux plans obtenus ne sont pas en général conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q; pour qu'ils le soient quel que soit θ, l'expression

$$b k_n \Omega(U_{n+2}, V_{n-1}) + a h_n \Omega(V_{n+2}, U_{n-1})$$

doit être identiquement nulle.

Pour calculer $\Omega(U_{n+2}, V_{n-1})$, observons que par suite du fait que la suite de Laplace ..., U, V, ... est autopolaire par rapport à Q, on a

$$\Omega(U_{n+1}, V_{n-1}) = 0.$$

En dérivant cette relation par rapport à v, on a

$$\Omega(U_{n+1}, V_{n-1}) + k_{n-1}\Omega(U_{n+1}, V_{n-2}) = 0.$$

On calculera ensuite $\Omega(U_{n+1}, V_{n-2})$ en partant de

$$\Omega(U_n, V_{n-2}) = 0,$$

et ainsi de suite. On trouvera finalement

$$\Omega(U_{n+2}, V_{n-1}) = (-1)^{n+1} 4 a k_1 k_2 \dots k_{n-1} \Delta.$$

On aura de même

$$\Omega(V_{n+2}, U_{n-1}) = -(-1)^{n+1} . 4 b h_1 h_2 \dots h_{n-1} \Delta.$$

Pour que les deux plans soient conjugués par rapport à Q, on doit donc avoir, pour la surface (x), la condition

$$h_1 h_2 \dots h_n = k_1 k_2 \dots k_n.$$

Observons en particulier que cette condition est remplie par les surfaces isothermes asymptotiques, pour lesquelles on a $h_i = k_i$.

Reprenons le cas général. Le plan conjugué par rapport à Q du premier plan considéré est déterminé par les points

$$V_n, \quad V_{n+1}, \quad a k_1 k_2 \dots k_{n-1} V_{n+2} - h_1 h_2 \dots h_n \theta V_{n-1}. \qquad \text{(III)}$$

De même, le plan conjugué par rapport à Q du second plan considéré est déterminé par les points

$$U_n, \quad U_{n+1}, \quad b h_1 h_2 \dots h_{n-1} U_{n+2} - k_1 k_2 \dots k_n \theta U_{n-1}. \tag{IV}$$

Désignons par I, II, III, IV les plans dans l'ordre où ils ont été rencontrés. Le conjugué harmonique du plan $U_n U_{n+1} U_{n+2}$ par rapport aux plans I et IV est déterminé par les points

$$U_n, \quad U_{n+1}, \quad b(h_1 \dots h_n + k_1 \dots k_n) U_{n+2} - 2k_1 \dots k_n h_n \theta U_{n-1}. \tag{V}$$

Le plan conjugué harmonique du plan $V_n V_{n+1} V_{n+2}$ par rapport aux plans II et III est déterminé par les points

$$V_n, \quad V_{n+1}, \quad a(h_1 \dots h_n + k_1 \dots k_n) V_{n+2} - 2h_1 \dots h_n \theta V_{n-1}. \tag{VI}$$

Les deux plans V et VI ainsi construits sont conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q; les sections de celle-ci par ces plans représentent deux demi-quadriques ayant pour support commun une quadrique appartenant au faisceau déterminé par Φ_{n-1}, Φ_n. Cette quadrique varie avec θ, sauf lorsque, pour la surface (x), on a la condition

$$h_1 \dots h_n + k_1 \dots k_n = 0. \tag{4}$$

Dans ce cas, la quadrique construite coïncide avec Φ_{n-1} quel que soit Θ. Laissons ce cas de côté et désignons par Θ_n la quadrique qui vient d'être construite. Les quadriques Θ et Θ_n se correspondent dans une projectivité. Lorsque la relation (4) n'est vérifiée identiquement par aucune valeur de n, on a donc une projectivité entre les divers faisceaux de quadriques déterminés par deux quadriques consécutives de la suite Φ_{-1} (ou $z_4^2 = 0$), $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n, \dots$.

8. Examinons le cas particulier où les quadriques de Lie de la surface (x) n'ont que deux points caractéristiques; on a alors $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et les points caractéristiques de Φ_0 sont le point x et un point y engendrant une surface (y) sur laquelle les asymptotiques sont les courbes u, v. On sait que Φ_0 est aussi la quadrique de Lie de la surface (y) au point y. La quadrique Φ_1 se réduit au plan tangent

$$\psi \equiv 4z_1 + 2z_2 (\log a)^{10} + 2z_3 (\log b)^{01} + \{ 8ab + (\log a)^{10} (\log b)^{01} \} z_4 = 0,$$

à la surface (y) au point y, compté deux fois. On a donc

$$\Phi_1 \equiv \psi^2 = 0.$$

Les quadriques Θ_1 sont par suite les quadriques de Darboux de la surface (y).

Deux quadriques homologues Θ, Θ_1 se coupent suivant deux coniques passant toutes deux par les points de rencontre des droites xx^{10}, xx^{01} respectivement avec les droites $yy^{10}{}_1$, yy^{01}. Le lieu de cette intersection est la surface

$$ab(h_1 + k_1) z_4^2 \psi^2 - 8 h_1 k_1 \Phi_0^2 = 0.$$

Elle se décompose en deux quadriques

$$z_4 \psi \pm 2 \sqrt{\frac{h_1 k_1}{ab(h_1 + k_1)}} \Phi_0 = 0$$

passant toutes deux par les droites xx^{10}, xx^{01}, yy^{10}, yy^{10}.

Dans les autres cas, où α, β ne sont pas tous deux nuls, l'intersection des deux quadriques homologues Θ, Θ_1 est une quartique en général irréductible ; si l'un des nombres α, β est nul, cette quartique possède un point double fixe.

Liége, le 20 octobre 1930.

MARCEL HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles