Géométrie algébrique.

Sur une propriété des surfaces algébriques irrégulières contenant une involution régulière d'ordre deux,

par L. GODEAUX, professeur à l'Université de Liége.

Nous nous proposons de poursuivre, dans cette note, nos recherches sur les involutions régulières d'ordre deux, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique irrégulière. Nous établissons le théorème suivant :

Si une surface algébrique irrégulière contient une involution régulière d'ordre deux, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, elle est l'image d'une involution d'ordre deux, privée de points unis, appartenant à une surface algébrique de même irrégularité.

Nous utilisons, dans la démonstration de ce théorème, les résultats que nous avons obtenus antérieurement sur les correspondances (1, 2) entre deux surfaces algébriques (*), résultats que nous rappelons au début de cette note.

1. Soit F une surface algébrique d'irrégularité $q > 0$, dépourvue de faisceau irrationnel de courbes, contenant une involution régulière I_2, d'ordre deux, n'ayant qu'un nombre fini de points unis (ou points de coïncidence). Nous désignerons par T la transformation birationnelle de F en elle-même génératrice de I_2, par Φ une surface image de cette involution, et nous supposerons les surfaces F, Φ irréductibles.

(*) Mémoire sur les *Surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation*. (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914, pp. 289-312.) *Sur les Involutions régulières d'ordre deux appartenant à une surface irrégulière*. (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1924, pp. 434-446; 1925, pp. 37-47, 157-166.)

Dans nos travaux cités plus haut, nous avons obtenu les résultats suivants :

1° Le nombre de points unis de l'involution I_2 ne peut être nul et est multiple de quatre. Nous le désignerons par 4α.

2° Les genres arithmétiques p_a de F et π_a de Φ sont liés par la relation

$$p_a = 2\pi_a - \alpha + 1.$$

3° On peut construire, sur la surface F, un système continu, irréductible, complet, $\{C\}$, dépourvu de points-base, transformé en lui-même par T et jouissant des propriétés suivantes :

a) Le système $\{C\}$ est formé de ∞^q systèmes linéaires.

b) Le système $\{C\}$ contient $2^{2q} = 2k + 2$ systèmes linéaires $|C_0|, |C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{2k+1}|$, transformés chacun en lui-même par T.

c) Chacun des systèmes linéaires $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{2k+1}|$ contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_2 et l'un au moins de ces $4k + 4$ systèmes est dépourvu de points-base.

Nous désignerons par $|C_{i1}|$, $|C_{i2}|$ les systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_2 et appartenant au système $|C_i|$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, 2k + 1)$; nous supposerons que le système $|C_{01}|$ est dépourvu de points-base.

d) Le système $|C_{i1}|$ a pour points-base $4\alpha_{i1}$ points unis de I_2 et le système $|C_{i2}|$ les $4\alpha_{i2} = 4(\alpha - \alpha_{i1})$ points unis restants. En particulier, on a, d'après l'hypothèse faite plus haut, $\alpha_{01} = 0$ et, par suite, $\alpha_{02} = \alpha$.

Si le diviseur de Severi σ de Φ est impair, les nombres α_{i1} $(i = 1, 2, \ldots, 2k + 1)$ sont supérieurs à zéro et inférieurs à α. De plus, deux des $4k + 2$ systèmes $|C_{i1}|$, $|C_{i2}|$ $(i = 1, 2, \ldots, 2k + 1)$ ne peuvent avoir les mêmes points-base.

Si le diviseur σ de Φ est pair, il existera toujours, parmi les systèmes $|C_{i1}|$ ou $|C_{i2}|$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, 2k + 1)$, un second système ayant les mêmes points-base qu'un système choisi arbitrairement. Pour fixer les idées, nous supposerons que les systèmes $|C_{i1}|$, $|C_{k+i+1\,1}|$ $(i=0, 1, 2, \ldots, k|$ ont mêmes points-base et que, par suite, il en est de même des systèmes $|C_{i2}|, |C_{k+i+1\,2}|$. En particulier, le système $|C_{k+1\,1}|$ est dépourvu de points-base et le système $|C_{k+1\,2}|$ a comme points-base les 4α points unis de I_2. Deux quelconques des systèmes $|C_{11}|$, $|C_{21}|, \ldots, |C_{k1}|$ auront des points-base différents et les nombres $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{k1}$ seront supérieurs à zéro et inférieurs à α.

4° Un second système continu complet et irréductible $\{C'\}$, formé de ∞^q systèmes linéaires, transformé en lui-même par T et contenant un système linéaire partiel composé au moyen de I_2 et n'ayant pas pour points-base des points unis de I_2, se comporte vis-à-vis des points unis de I_2 comme le système $\{C\}$. D'une manière précise, il y aura, dans le système $\{C'\}$, $2^{2q+1} = 4k+4$ systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_2 et l'un quelconque de ces systèmes linéaires partiels aura pour points-base les points unis de I_2 qui sont points-base pour l'un des systèmes $|C_{i1}|$, $|C_{i2}|$ $(i=0, 1, 2, \ldots, 2k+1)$.

5° S'il existe sur F un système continu complet $\{C''\}$, transformé en lui-même par T et formé de ∞^q systèmes linéaires, et si, de plus, parmi les 2^{2q} systèmes linéaires de $\{C''\}$, transformés en eux-mêmes par T, il y en a un au moins qui contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_2, le système complet $\{2C''\}$ contient un système linéaire partiel composé au moyen de I_2 et n'ayant pas pour points-base des points unis de I_2.

2. Désignons par ρ la dimension du système partiel $|C_{01}|$. En remplaçant éventuellement $\{C\}$ par un de ses multiples convenablement choisi, nous pouvons supposer $\rho \geqq 3$. Cela étant, rapportons projectivement les courbes C_{01} aux hyperplans d'un espace linéaire à ρ dimensions, S_ρ; nous obtenons ainsi, dans S_ρ, une surface normale birationnellement identique à Φ. Nous prendrons désormais cette surface comme modèle projectif de Φ et nous continuerons à la désigner par Φ.

Aux 4α points unis de I_2 correspondent, sur Φ, 4α points doubles coniques. Chacun de ces points doubles est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré -2.

Si nous désignons par Γ les sections hyperplanes de Φ, par n l'ordre de cette surface, par π le genre des courbes Γ, les courbes C_{01}, qui correspondent aux courbes Γ, et, par suite, les courbes C, ont le degré $2n$ et le genre $2\pi - 1$.

Nous désignerons par Γ_0 les courbes de Φ qui correspondent aux courbes C_{02} de F, par Γ_{i1} les courbes qui correspondent aux courbes C_{i1}, enfin par Γ_{i2} celles qui correspondent aux courbes C_{i2} $(i = 1, 2, \ldots, 2k+1)$. Les courbes Γ_0 sont d'ordre n, de degré $n - 2\alpha$, de genre $\pi - \alpha$; elles forment un système linéaire complet $|\Gamma_0|$ et passent simplement par les 4α points doubles coniques de Φ. Si l'on désigne par A la somme des courbes rationnelles équivalentes à ces 4α points doubles, on a la relation fonctionnelle

$$2\Gamma \equiv 2\Gamma_0 + A.$$

Les courbes Γ_{i1} ont l'ordre n, le degré $n - 2\alpha_{i1}$, le genre $\pi - \alpha_{i1}$; elles forment un système linéaire complet $|\Gamma_{i1}|$ et passent, simplement, par les $4\alpha_{i1}$ points doubles coniques de Φ qui correspondent aux points-base de $|C_{i1}|$. Si l'on désigne par A_{i1} la somme des courbes rationnelles équivalentes à ces $4\alpha_{i1}$ points doubles, on a

$$2\Gamma \equiv 2\Gamma_{i1} + A_{i1}.$$

De même, les courbes Γ_{i2} ont l'ordre n, le degré $n - 2\alpha_{i2}$, le genre $\pi - \alpha_{i2}$, forment un système linéaire complet $|\Gamma_{i2}|$ et passent par $4\alpha_{i2}$ points doubles coniques de Φ. Si l'on désigne par A_{i2} la somme des courbes rationnelles équivalentes à ces points doubles, on a

$$2\Gamma \equiv 2\Gamma_{i2} + A_{i2}.$$

Parmi les hypersurfaces qui découpent, sur Φ, le système $|2\Gamma|$, il y en a une qui touche la surface Φ le long d'une courbe Γ_0, Γ_{i1} ou Γ_{i2}.

3. Considérons le système continu complet $\{2C\}$; il est irréductible et transformé en lui-même par T; il contient donc $2^{2q} = 2k + 2$ systèmes linéaires transformés chacun en lui-même par T. Le système $|C_i + C_j|$ appartient au système $\{2C\}$ et est transformé en lui-même par T. Si l'on associe deux à deux les $2k + 2$ systèmes $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{2k+1}|$, on obtient $(2k + 2)^2$ systèmes linéaires qui doivent coïncider avec les $2k + 2$ systèmes linéaires de $\{2C\}$ transformés en eux-mêmes par T. Nous avons montré que l'un de ces systèmes est

$$|D_0| = |2C_0| = |2C_1| = \cdots = |2C_{2k+1}|$$

et que les autres systèmes sont

$$|D_1| = |C_0 + C_1|, \quad |D_2| = |C_0 + C_2|, \ldots, |D_{2k+1}| = |C_0 + C_{2k+1}|.$$

Observons que les systèmes

$$|C_1 + C_0|, \quad |C_1 + C_2|, \ldots, |C_1 + C_{2k+1}|$$

ne peuvent coïncider deux à deux et qu'ils ne peuvent, d'autre part, coïncider avec $|D_0|$; par suite, ces systèmes donnent, dans un autre ordre, les systèmes $|D_1|, |D_2|, \ldots, |D_{2k+1}|$. Il en résulte que chacun des systèmes $|D_1|, |D_2|, \ldots, |D_{2k+1}|$ contient $2k + 2$ des systèmes $|C_i + C_j|$. Pour fixer les idées, nous supposerons que $|D_1|$ contient les systèmes

$$|C_0 + C_1|, \quad |C_2 + C_3|, \ldots, |C_{2i} + C_{2i+1}|, \ldots, |C_{2k} + C_{2k+1}|.$$

Cela étant, posons

$$|D_2| = |C_0 + C_2| = |C_1 + C_i|.$$

Nous avons

$$D_1 + D_2 \equiv 2C_0 + C_1 + C_2 \equiv C_1 + C_2 + C_3 + C_i,$$

et, par suite,

$$2C_0 \equiv C_3 + C_i, \qquad C_3 \equiv C_i.$$

On a donc

$$|D_2| = |C_0 + C_2| = |C_1 + C_3|$$

et, de même,

$$|D_3| = |C_0 + C_3| = |C_1 + C_2|.$$

D'après les propriétés rappelées plus haut, le système $|D_1|$ contient deux systèmes linéaires partiels $|D_{11}|$, $|D_{12}|$ composés au moyen de I_2; l'un de ces systèmes, par exemple $|D_{11}|$, a pour points-base les $4\alpha_{11}$ points unis de I_2, qui sont points-base de $|C_{11}|$, et contient les courbes $C_{01} + C_{11}$. Le système $|D_{12}|$ contient les courbes $C_{01} + C_{12}$; il a pour points-base les $4\alpha_{12}$ points unis de I_2, qui sont points-base pour $|C_{12}|$.

Les courbes $C_{21} + C_{31}$, $C_{22} + C_{32}$, $C_{21} + C_{32}$, $C_{22} + C_{31}$ appartiennent à l'un ou l'autre des systèmes $|D_{11}|$, $|D_{12}|$, puisqu'elles sont transformées en elles-mêmes par T. Supposons, pour fixer les idées, que les courbes $C_{21} + C_{31}$ appartiennent à $|D_{11}|$. Si les courbes $C_{21} + C_{32}$ appartenaient au même système, les points unis de I_2 qui sont point-base de $|D_{11}|$ appartiendraient tous aux courbes C_{21}, ce qui est impossible. Un raisonnement analogue prouve que $|D_{11}|$ contient les courbes $C_{22} + C_{32}$ et le système $|D_{12}|$, les courbes $C_{21} + C_{32}$, $C_{22} + C_{31}$.

Cela étant, désignons par le même symbole $[C_{ih}, C_{jl}]$ à la fois l'ensemble des points unis de I_2 communs aux courbes C_{ih}, C_{jl}, et le nombre de ces points.

Les courbes $C_{21} + C_{31}$, $C_{22} + C_{32}$ ont en commun les points $[C_{21}, C_{32}]$, $[C_{22}, C_{31}]$ et parmi ces points se trouvent les $4\alpha_{11}$ points-base de $|D_{11}|$. Supposons que l'un de ces points ne soit pas point-base pour $|D_{11}|$; il est alors point-base pour $|D_{12}|$. Mais alors, il doit appartenir à l'un des groupes $[C_{21}, C_{31}]$, $[C_{22}, C_{32}]$, ce qui est impossible. Donc les points $[C_{21}, C_{32}]$, $[C_{22}, C_{31}]$ forment les $4\alpha_{11}$ points-base de $|D_{11}|$ et, de même, les points $[C_{21}, C_{31}]$, $[C_{22}, C_{32}]$ forment les $4\alpha_{12}$ points-base de $|D_{12}|$. On en conclut, par un calcul simple,

$$[C_{11}C_{21}] = [C_{11}C_{32}] = [C_{21}C_{32}] = 2(\alpha_{11} + \alpha_{21} - \alpha_{31}),$$
$$[C_{11}C_{31}] = [C_{11}C_{22}] = [C_{22}C_{31}] = 2(\alpha_{11} - \alpha_{21} + \alpha_{31}),$$
$$[C_{12}C_{21}] = [C_{12}C_{31}] = [C_{21}C_{31}] = 2(-\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31}),$$
$$[C_{12}C_{22}] = [C_{12}C_{32}] = [C_{22}C_{32}] = 2(\alpha + \alpha_{12} - \alpha_{21} - \alpha_{31}).$$

Par un raisonnement analogue, on obtient

$$[C_{11}C_{2i1}] = [C_{11}C_{2i+12}] = [C_{2i1}C_{2i+12}] = 2(\alpha_{11} + \alpha_{2i1} - \alpha_{2i+11}),$$
$$[C_{11}C_{2i+11}] = [C_{11}C_{2i2}] = [C_{2i2}C_{2i+11}] = 2(\alpha_{11} - \alpha_{2i1} + \alpha_{2i+11}),$$
$$[C_{12}C_{2i1}] = [C_{12}C_{2i+11}] = [C_{2i1}C_{2i+11}] = 2(-\alpha_{11} + \alpha_{2i1} + \alpha_{2i+11}),$$
$$[C_{12}C_{2i2}] = [C_{12}C_{2i+12}] = [C_{2i2}C_{2i+12}] = 2(\alpha + \alpha_{12} - \alpha_{2i1} - \alpha_{2i+11}).$$

4. La surface Φ possédant $4\alpha_{11}$ points doubles coniques et des courbes Γ_{11} donnant lieu à la relation fonctionnelle

$$2\Gamma \equiv 2\Gamma_{11} + A_{11},$$

il existe, d'après un théorème que nous avons établi (*), une surface Ψ' contenant une involution J_2', d'ordre deux, possédant $4\alpha_{11}$ points unis, dont Φ est l'image. Aux courbes Γ et Γ_{11} de Φ correspondent sur Ψ' des courbes appartenant à un même système linéaire que nous désignerons par $|L'|$. Le système $|L'|$ est de degré $2n$ et de genre $2\pi - 1$. Les points unis de l'involution J_2' ont pour homologues, sur Φ, les $4\alpha_{11}$ points doubles coniques appartenant aux courbes Γ_{11}. Nous prendrons comme modèle projectif de la surface Ψ' la surface (que nous désignerons toujours par Ψ') ayant pour sections hyperplanes les courbes L'. Cette surface Ψ' possède $8\alpha_{12}$ points doubles coniques qui correspondent aux $4\alpha_{12}$ points doubles coniques de Φ non situés sur les courbes Γ_{11}.

Il existe de même une surface Ψ'' contenant une involution d'ordre deux, J_2'', possédant $4\alpha_{12}$ points unis et dont Φ est

(*) Mémoire sur les *Surfaces algébriques doubles*... (loc. cit.).

l'image. Aux points unis de J_2'' correspondent sur Φ les $4\alpha_{12}$ points doubles coniques de Φ situés sur les courbes Γ_{12}. Aux courbes Γ, Γ_{12} correspondent sur Ψ'' des courbes appartenant à un système linéaire $|L''|$, de degré $2n$ et de genre $2\pi - 1$. Si l'on prend pour modèle projectif de Ψ'' la surface dont les sections hyperplanes sont les courbes L'', cette surface possède $8\alpha_{11}$ points doubles coniques qui correspondent aux $4\alpha_{11}$ points doubles de Φ situés sur les courbes Γ_{11}.

Nous dirons qu'un point de Ψ' et un point de Ψ'' sont homologues s'ils correspondent à un même point de Φ. Dans ces conditions, nous avons entre les surfaces Ψ', Ψ'' une correspondance $(2, 2)$. Nous désignerons par F' une surface image des couples de points homologues dans cette correspondance.

Soient M un point de Φ, M_1', M_2' les points qui lui correspondent sur Ψ' ; M_1'', M_2'', ceux qui lui correspondent sur Ψ''. Au point M correspondent quatre points de la surface F' que nous pouvons représenter par $(M_1' M_1'')$, $(M_1' M_2'')$, $(M_2' M_1'')$ $(M_2' M_2'')$. Au point M_1' de Ψ' correspondent, sur F', deux points $(M_1' M_1'')$, $(M_1' M_2'')$ qui, lorsque M décrit Φ, engendrent une involution I_2' dont Ψ' est l'image. Les points $(M_2' M_1'')$, $(M_2' M_2'')$ forment un couple de cette involution. De même, les couples de points $(M_1' M_1'')$, $(M'_2 M_1'')$ et $(M_1' M_2'')$, $(M_2' M_2'')$ appartiennent à une involution I_2'' dont Ψ'' est l'image. La surface F' admet deux transformations birationnelles θ', θ'' en elles-mêmes, respectivement génératrices des involutions I_2', I_2''. D'après ce qui précède, ces transformations sont permutables et la transformation birationnelle

$$\theta = \theta'\theta'' = \theta''\theta'$$

est involutive et engendre une involution d'ordre deux, J_2.

Pour qu'un point de F' soit uni pour I_2' il faut et il suffit que l'on ait

$$(M_1' M_1'') \equiv (M_1' M_2''),$$

c'est-à-dire que M_1'' et M_2'' soient confondus. Les points unis de I_2' correspondent donc aux points unis de J_2'' sur Ψ'', c'est-à-dire aux $8\alpha_{12}$ points doubles de Ψ'. De même, les points unis de I_2'' correspondent aux $8\alpha_{11}$ points doubles de Ψ''.

Pour qu'un point de F' soit uni pour J_2, il faut et il suffit que l'on ait

$$(M_1'M_1'') \equiv (M_2'M_2'') \qquad \text{ou} \qquad (M_1'M_2'') \equiv (M_2'M_1''),$$

c'est-à-dire que le point M de Φ soit un point de diramation à la fois pour les correspondances (1, 2) existant entre Φ et Ψ', Φ et Ψ''. De tels points n'existent pas, d'après la construction des surfaces Ψ', Ψ''. Il en résulte que l'involution J_2 est privée de points unis.

Soit F_1 une surface image de J_2. Aux quatre points $(M_1' M_2'')$, ..., (M_2', M_2'') de F' (qui forment deux groupes de J_2) correspondent deux points de F_1 qui, lorsque M décrit Φ, engendrent une involution d'ordre deux dont Φ est l'image. Il est facile de voir qu'aux $8\alpha_{12}$ points unis de I_2' correspondent $4\alpha_{12}$ points unis de cette involution et qu'aux $8\alpha_{11}$ points unis de I_2'' correspondent $4\alpha_{11}$ points unis de l'involution envisagée sur F_1. La correspondance (1, 2) existant entre Φ et F_1 a donc comme points de diramation, sur Φ, les 4α points doubles de cette surface. Il en résulte que F_1 et F sont birationnellement identiques. En d'autres termes, F est une image de l'involution J_2 existant sur F'.

5. — Aux courbes C du système continu irréductible $\{C\}$ de F correspondent, sur F', des courbes C' appartenant à un système continu $\{C'\}$. Les courbes C' ont le degré $4n$ et le genre $4\pi - 3$. Le genre arithmétique p_a' de F' a pour valeur $2p_a + 1$ (*). On peut toujours supposer, sans restriction, que les courbes C' sont non spéciales et que l'on a (**)

$$p_a' + 4n - (4\pi - 3) + 1 \geq 0.$$

(*) Voir notre mémoire sur les *Surfaces algébriques doubles*... (loc. cit.).

(**) On peut en effet remplacer $\{C\}$ par $\{\lambda C\}$, λ étant un entier positif quelconque. Cela revient à remplacer n et π respectivement par $\lambda^2 n$ et $\lambda\pi + \frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)n - (\lambda - 1)$. On peut, de plus, disposer de λ de manière que $\{\lambda C\}$ soit non

Dans ces conditions, le système complet $\{C'\}$ est formé de $\infty^{q'}$ systèmes linéaires (*), $q' \geqq q$ étant l'irrégularité de la surface F'.

Parmi les systèmes linéaires appartenant à $\{C'\}$, on trouve les systèmes $|C'_0|$, $|C'_1|, \ldots, |C'_{2k+1}|$, respectivement transformés des systèmes $|C_0|$, $|C_1|, \ldots, |C_{2k+1}|$ de F, mais ces systèmes, supposés complets, ne sont pas tous distincts. En effet, aux courbes Γ, Γ_0 de Φ correspondent, sur F', des courbes C'_0, et aux courbes Γ_{11}, Γ_{12}, des courbes C'_1,. Or, aux courbes Γ, Γ_{11} correspondent, sur Ψ', des courbes d'un même système linéaire $|L'|$; aux courbes L' correspondent, sur F', des courbes formant un système linéaire qui comprend des courbes C'_0, C'_1. Les systèmes linéaires complets $|C'_0|$, $|C'_1|$ coïncident donc.

Observons qu'à une courbe Γ_0 de Φ correspond, sur Ψ', une courbe L'_0 irréductible, car Γ_0 passe par les points de diramation pour la correspondance (1, 2) entre Φ et Ψ'. Aux courbes L'_0 de Ψ' correspondent, sur F', des courbes irréductibles, car les courbes L'_0 passent par les $8\alpha_{12}$ points de diramation pour la correspondance (1, 2) entre Ψ' et F'. Il en résulte que les courbes C' sont généralement irréductibles et que, par suite, $\{C'\}$ est irréductible. Il en est donc de même de la surface F'.

Le système continu $\{C'\}$, contenant des systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par θ, θ' et θ'', est transformé en lui-même par ces transformations.

A une courbe C' non transformée en elle-même par θ correspond sur F une courbe $\overline{C}$, de genre effectif $4\pi - 3$, possédant $2n$ points doubles (variables et en des points simples de F). Lorsque C' varie d'une manière continue dans $\{C'\}$ et vient

spécial. Alors $|\Gamma|$ et $\{C'\}$ sont respectivement remplacés par $|\lambda\Gamma|$ et par $\{\lambda C'\}$. Le système canonique de F ayant pour transformé sur F' le système canonique de cette surface, $\{\lambda C'\}$ est non spécial. On observera que $|\Gamma_{11}|$, par exemple, n'est pas remplacé par $|\lambda\Gamma_{11}|$, mais par un système $|\overline{\Gamma}_{11}|$ tel que $2\lambda\Gamma \equiv 2\overline{\Gamma}_{11} + A_{11}$.

(*) SEVERI, *Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica.* (ATTI DELLA R. ACCAD. DI TORINO, 1904-1905.)

coïncider avec une courbe C'_0, $\overline{C}$ varie d'une manière continue sur F et vient coïncider avec une courbe C_0 comptée deux fois. Par suite, la courbe $\overline{C}$ appartient au système $\{2\,C\}$ et à cette courbe $\overline{C}$ correspondent deux courbes C' transformées l'une dans l'autre par θ.

6. — Les systèmes $|C'_0| = |C'_1|, |C'_2|, \ldots, |C'_{2k+1}|$ sont transformés en eux-mêmes par θ, θ', θ''. Ces systèmes (complets) peuvent ne pas être tous distincts; nous connaissons donc au plus $2^{2q} - 1$ systèmes linéaires de $\{C'\}$ transformés en eux-mêmes par θ. Supposons qu'il puisse exister un autre système linéaire $|C'_m|$, dans $\{C'\}$, transformé en lui-même par θ'. Deux cas peuvent se présenter :

1° Le système $|C'_m|$ n'est pas transformé en lui-même par θ (ni par suite par θ''). Les transformations θ, θ'' font correspondre à $|C'_m|$ un système linéaire $|C'_n|$ appartenant à $\{C'\}$ et transformé en lui-même par θ'. Aux courbes C'_m correspondent sur F des courbes $\overline{C}_m$ de genre $4\pi - 3$, ayant $2n$ points doubles variables et appartenant, comme courbes totales, à un système linéaire $|\overline{C}_m|$, de degré $8n$ et de genre $4\pi + 2n - 3$, ce système $|\overline{C}_m|$ appartenant, d'après une observation faite plus haut, au système continu $\{2C\}$. Aux courbes $\overline{C}_m$ du système complet $|\overline{C}_m|$ correspondent sur F' des courbes du système $|C'_m + C'_n|$, formant un système (éventuellement partiel) composé au moyen de J_2 et transformé en lui-même par θ'. Il en résulte que le système $|\overline{C}_m|$ est transformé en lui-même par T et est donc l'un des 2^{2q} systèmes linéaires appartenant à $\{2C\}$, transformés en eux-mêmes par T.

2° Le système $|C'_m|$ est également transformé en lui-même par θ (et, par suite, par θ''). Deux hypothèses peuvent être faites :

a) Il existe, dans $|C'_m|$, au moins une courbe transformée en elle-même par θ et θ' (et, par suite, par θ''). A cette courbe correspond, sur F, une courbe C_m transformée en elle-même par T, et, d'autre part, d'après l'observation faite à la fin du paragraphe précédent, la courbe $2C_m$ appartient au système continu $\{2C\}$.

Le diviseur σ de Severi de la surface F ne peut être impair, car alors la courbe C_m appartiendrait à l'un des systèmes $|C_0|$, $|C_1|, \ldots, |C_{2k+1}|$ et, par suite, C'_m appartiendrait à l'un des systèmes $|C'_0|$, $|C'_2|, \ldots, |C'_{2k+1}|$, contrairement à l'hypothèse.

Le diviseur σ de F étant pair, C_m appartient à un système continu complet irréductible, de degré $2n$ et de genre $2\pi - 1$, distinct de $\{C\}$. Ce système contient, comme $\{C\}$, 2^{2q} systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par T et C_m appartient à l'un de ces systèmes.

b) Il n'existe, dans $|C'_m|$, aucune courbe qui soit transformée en elle-même par θ et θ'. Alors $|C'_m|$ contient deux systèmes linéaires partiels $|C'_{m1}|$, $|C'_{m2}|$ composés au moyen de I'_2 et θ fait correspondre à une courbe C'_{m1} une courbe C'_{m2}. En raisonnant comme dans le premier cas, on voit qu'il correspond aux courbes C'_{m1} de F', sur F, des courbes $\overline{C}_m$ appartenant à un système linéaire $|\overline{C}_m|$ contenu dans le système $\{2C\}$ et transformé en lui-même par T.

En résumé, les systèmes linéaires du système $\{C'\}$ transformés en eux-mêmes par θ' sont compris dans l'une des catégories suivantes :

1° $2^{2q} - 1$ systèmes (au plus) $|C'_0|$, $|C'_2|, \ldots, |C'_{2k+1}|$;

2° 2^{2q+1} systèmes auxquels correspondent, sur F, les 2^{2q} systèmes linéaires de $\{2C\}$ transformés en eux-mêmes par T;

3° 2^{2q} systèmes, dans le cas où le diviseur σ de Severi de F est pair, auxquels correspondent, sur F, des systèmes transformés en eux-mêmes par T et appartenant à un système complet continu, de degré $2n$ et de genre $2\pi - 1$, distinct de $\{C\}$. (Les courbes de ce système rencontrent les courbes C en $2n$ points.)

Les nombres indiqués pour les systèmes de chacune des catégories sont d'ailleurs des maxima; par suite, $\{C'\}$ contient un nombre fini de systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par θ', au plus égal à

$$2^{2q} - 1 + 2^{2q+1} + 2^{2q} = 2^{2q+2} - 1.$$

7. — Nous allons tout d'abord déduire de ce résultat que la surface Ψ' est régulière.

Supposons en effet que la surface Ψ' puisse avoir l'irrégularité $q'' > 0$. On peut supposer, sans restriction (*), que le système $|L'|$, de degré $2n$ et de genre $2\pi - 1$, est non spécial et que, de plus, on a

$$\pi'_a + 2n - (2\pi - 1) + 2 \geq 0,$$

$\pi'_a = 2\pi_a - \alpha_{11} + 1$ étant le genre arithmétique de Ψ'. Dans ces conditions, $|L'|$ appartient à un système continu irréductible $\{L'\}$, formé de $\infty^{q''}$ systèmes linéaires. Aux systèmes linéaires appartenant à $\{L'\}$ correspondent, sur F', des systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par θ' et formant un système continu irréductible contenant le système $|C'_0|$, transformé de $|L'|$. Il en résulte que les systèmes linéaires ainsi obtenus sur F' appartiennent au système complet $\{C'\}$. Mais nous venons de voir que ce système ne peut contenir qu'un nombre fini de systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par θ'; nous parvenons donc à une absurdité et, par suite, la surface Ψ' doit être régulière. Il en est naturellement de même de la surface Ψ''.

Cela étant établi, observons que la surface F' contenant une involution régulière I'_2, d'ordre deux, n'ayant qu'un nombre fini de point unis, le système $\{C'\}$ contient $2^{2q'}$ systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par la transformation θ' génératrice de I'_2. On doit donc avoir

$$2^{2q'} \leq 2^{2q+2} - 1,$$

c'est-à-dire

$$2^{2(q'-q)} < 4.$$

Comme on a, d'autre part, $q' \geqq q$, on en déduit $q' = q$.

(*) Il suffit de remplacer éventuellement $|C_0|$ par $|\lambda C_0|$; d'où $|\Gamma'|$ par $|\lambda\Gamma'|$.

La surface F' a donc la même irrégularité que F et contient une involution J_2, d'ordre deux, privée de points unis, dont F est l'image. Nous avons ainsi démontré le théorème énoncé dans le préambule.

8. — Il convient d'examiner de plus près les systèmes linéaires de $\{C'\}$ transformés en eux-mêmes par θ'.

Sur la surface F, nous avons

$$|C_0 + C_1| = |C_2 + C_3|;$$

donc sur la surface F', en tenant compte du fait que les courbes C'_0, C'_1 sont linéairement équivalentes,

$$|C'_0 + C'_1| = |C'_2 + C'_3| = |2C'_0|.$$

Ce système est transformé en lui-même par θ' et appartient à $\{2C'\}$. Appliquons à l'involution régulière I'_2, appartenant à la surface irrégulière F', les propriétés rappelées au début. Nous avons

$$|2C'_0| = |2C'_2| = |2C'_3|$$

et, par suite,

$$2C'_2 \equiv C'_2 + C'_3.$$

On en conclut

$$|C'_2| = |C'_3|.$$

On démontrerait, de même, que l'on a

$$|C'_4| = |C'_5|, \ldots, |C'_{2i}| = |C'_{2i+1}|, \ldots, |C'_{2k}| = |C'_{2k+1}|.$$

Aux 2^{2q} systèmes linéaires de $\{C\}$, transformés en eux-mêmes par T *sur* F, *correspondent, sur* F', *2^q systèmes linéaires de $\{C'\}$, transformés en eux-mêmes par θ' (et par θ'').*

Nous allons déduire de ce théorème quelques propriétés des systèmes de courbes tracées sur Ψ'.

Les courbes Γ_{21} passent par $2(\alpha_{11} + \alpha_{21} - \alpha_{31})$ des points doubles coniques de Φ qui sont des points de diramation pour la correspondance (1, 2) existant entre Φ et Ψ'. A ces courbes Γ_{21} correspondent, sur Ψ', des courbes L'_{21} de degré effectif $2n - 4\alpha_{21}$

et de genre $2\pi - 1 + \alpha_{11} - \alpha_{21} - \alpha_{31}$. Les courbes L'_{21} passent par les $2(\alpha_{11} + \alpha_{21} - \alpha_{31})$ points unis de J'_2 qui correspondent aux points doubles de Φ communs aux courbes Γ_{11}, Γ_{21} et, simplement, par les $8(-\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31})$ points doubles coniques de Ψ' qui correspondent aux points doubles de Φ appartenant aux courbes Γ_{12}, Γ_{21}. Si nous désignons par A'_{11} la somme des courbes rationnelles équivalentes à ces points doubles, la relation fonctionnelle

$$2F \equiv 2\Gamma_{21} + A_{21}$$

donne, sur Ψ',

$$2L' \equiv 2L'_{21} + A'_{11}.$$

Les courbes L'_{31}, qui correspondent, sur Ψ', aux courbes Γ_{31} de Φ, donnent, de même, la relation fonctionnelle

$$2L' \equiv 2L'_{31} + A'_{11}.$$

Si nous désignons par L'_{22}, L'_{32} les courbes de Ψ' qui correspondent respectivement aux courbes Γ_{22}, Γ_{32} de Φ, et par A'_{12} la somme des courbes rationnelles équivalentes aux points doubles coniques de Ψ' n'appartenant pas aux courbes L'_{21}, L'_{31}, nous avons, de même,

$$2L' \equiv 2L'_{22} + A'_{12}, \qquad 2L' \equiv 2L'_{32} + A'_{12}.$$

Aux courbes L'_{21}, L'_{31} correspondent, sur F', des courbes du système $|C'_2| = |C'_3|$, passant par $4(-\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31})$ points unis de I'_2. Aux courbes L'_{22}, L'_{32} correspondent les courbes du même système, passant par les $4(\alpha + \alpha_{12} - \alpha_{21} - \alpha_{31})$ points unis restants de I'_2. Le système complet $|C'_2|$ contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de I'_2 et ayant pour points-base des points unis de cette involution. Les transformées des courbes L'_{21}, L'_{31} appartiennent nécessairement à l'un de ces systèmes et les transformées des courbes L'_{22}, L'_{32} à l'autre. Il en résulte que les courbes L'_{21}, L'_{31} sont linéairement équivalentes et appartiennent à un système $|L'_1|$ défini par la relation fonctionnelle

$$2L' \equiv 2L'_1 + A'_{11}.$$

De même, les courbes L'_{22}, L'_{32} appartiennent à un système linéaire $|L'_2|$ défini par la relation fonctionnelle

$$2L' \equiv 2L'_2 + A'_{12}.$$

Le même raisonnement prouve que les courbes qui correspondent sur Ψ' aux courbes Γ_{2i1}, Γ_{2i+11} de Φ sont linéairement équivalentes et qu'il en est de même des courbes qui correspondent à Γ_{2i2}, Γ_{2i+12}. Enfin, on montre encore, par le même procédé, que les courbes qui correspondent, sur Ψ', aux courbes Γ_0, Γ_{12} sont linéairement équivalentes.

Aux couples de courbes Γ *et* Γ_{11}, Γ_0 *et* Γ_{12}, Γ_{21} *et* Γ_{31}, Γ_{22} *et* Γ_{32}, ... *de* Φ *correspondent, sur* Ψ', *des couples de courbes linéairement équivalentes.*

De même,

Aux couples de courbes Γ *et* Γ_{12}, Γ_0 *et* Γ_{11}, Γ_{21} *et* Γ_{32}, Γ_{22} *et* Γ_{31}, ... *de* Φ *correspondent, sur* Ψ'', *des couples de courbes linéairement équivalentes.*

On observera que chacun des systèmes $|C'_o|$, $|C'_2|$, $|C'_4|$, ..., $|C'_{2k}|$ de F', transformés en eux-mêmes par θ, ne peut contenir plus de deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de J_2 ; par suite, ces 2^q systèmes sont distincts.

9. A un système linéaire quelconque $|C_r|$ de $\{C\}$ correspond, sur F', un système linéaire $|C'_r|$ de $\{C'\}$. Si le système $|C'_r|$, qui est transformé en lui-même par θ, est plus ample que $|C_r|$, il contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de J_2 : l'un est formé de courbes transformées des courbes de $|C_r|$, l'autre est formé des courbes transformées des courbes d'un certain système $|C_s|$ tracé sur F. Faisons varier $|C_r|$ d'une manière continue dans $\{C\}$ et amenons-le à coïncider avec $|C_o|$; alors $|C'_r|$ varie d'une manière continue dans $\{C'\}$ et $|C_s|$ décrit un système continu sur F. Lorsque $|C_r|$ est venu coïncider avec $|C_o|$, $|C'_r|$ est venu coïncider avec $|C'_0| = |C'_1|$ et $|C_s|$ avec $|C_1|$. Il en résulte que le système $|C_s|$ appartient au système complet irréductible $\{C\}$.

On observera qu'un système linéaire de $\{C'\}$, transformé en lui-même par θ, ne peut contenir plus de deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de J_2 et, par suite, qu'il ne peut correspondre à plus de deux systèmes linéaires appartenant à $\{C\}$.

Désignons respectivement par V_q, V'_q les variétés de Picard, toutes deux de dimension q, de F, F'. Il existe, par définition, une correspondance birationnelle entre les points de V_q (ou de V'_q) et les systèmes linéaires de $\{C\}$ (ou de $\{C'\}$) (*). Nous venons de voir qu'à un système linéaire de $\{C\}$ correspond un système linéaire de $\{C'\}$; donc à un point de V_q correspond un point de V'_q. Les variétés V_q, V'_q étant irréductibles et de même dimension q, tout point de V'_q sera nécessairement obtenu comme correspondant d'un point de V_q. D'autre part, d'après l'observation faite plus haut, un point de V'_q est le correspondant de deux points au plus de V_q et, de plus, il existe effectivement des points de V'_q qui correspondent à deux points distincts de V_q. Il en résulte que la correspondance entre V'_q, V_q ne saurait être birationnelle et que c'est précisément une correspondance (1, 2).

Il existe une correspondance (2, 1) *entre les variétés de Picard de* F *et de* F'.

D'après ce résultat, il existe sur la variété de Picard V_q une involution d'ordre deux dont V'_q est l'image. Cette involution est engendrée par une transformation birationnelle involutive τ de V_q en elle-même. Nous allons montrer que τ est une transformation ordinaire, de première espèce, de la variété V_q.

(*) Les systèmes continus $\{C\}$, $\{C'\}$ sont irréductibles comme ensembles de systèmes linéaires.

Commençons par observer que sur F', le système $|C'_0 + C'_r|$ est transformé en lui-même par θ et contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de J_2. A ces systèmes partiels correspondent, sur F, deux systèmes linéaires distincts, appartenant à $\{2C\}$. Ces systèmes distincts contiennent les courbes $C_0 + C_r$, $C_1 + C_s$, $C_0 + C_s$, $C_1 + C_r$. Mais les courbes $C_0 + C_r$, $C_0 + C_s$ ne peuvent appartenir à un même système linéaire, car alors $|C_r|$ et $|C_s|$ seraient confondus. De même, les couples de courbes $C_0 + C_r$ et $C_1 + C_r$; $C_1 + C_s$ et $C_0 + C_s$; $C_1 + C_s$ et $C_1 + C_r$ ne peuvent être linéairement équivalentes. Par suite, on a

$$|C_0 + C_r| = |C_1 + C_s|, \qquad |C_0 + C_s| = |C_1 + C_r|.$$

Il existe, sur la variété de Picard V_q, une et une seule transformation de première espèce faisant correspondre un point déterminé à un point déterminé, et en particulier la transformation de première espèce qui fait correspondre le point représentant $|C_1|$ au point représentant $|C_0|$ peut s'écrire (*)

$$|K'| = |C_1 - C_0 + K|$$

et fait correspondre, sur F, $|K'|$ à $|K|$. On aura en particulier, d'après les relations précédentes,

$$|C_s| = |C_1 - C_0 + C_r|, \qquad |C_r| = |C_1 - C_0 + C_s|.$$

La transformation τ est donc une transformation ordinaire de première espèce, de V_q en elle-même. On observera que l'on a (cfr. n° 3)

$$|C_{2i+1}| = |C_1 - C_0 + C_{2i}|, \qquad |C_{2i}| = |C_1 - C_0 + C_{2i+1}|.$$

(*) Castelnuovo, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare.* (Rend. R. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1915, pp. 545-556, 593-598, 655-663.) Nous appelons transformations ordinaires de première espèce de V_q celles des transformations de cette variété formant un groupe. Les ∞^q transformations involutives de V_q ne formant pas un groupe sont dites de seconde espèce. Nous croyons utile de rappeler cette terminologie, parce qu'elle n'est pas la même chez tous les auteurs.

La variété de Picard de F′ *est l'image d'une involution d'ordre deux, privée de points unis, appartenant à la variété de Picard de* F *et engendrée par une transformation ordinaire de première espèce de cette variété.*

De ce que la transformation τ ne laisse aucun point de V_q invariant (propriété des transformations de première espèce) il résulte que, dans $\{C'\}$, aucun système linéaire complet n'est composé au moyen de J_2. Si r est la dimension du système linéaire général de $\{C\}$, la dimension du système linéaire général de $\{C'\}$ est $2r+1$.

10. Nous avons montré (*) que T détermine, dans la variété V_q, une transformation de seconde espèce τ'. Si $|C^{(1)}|$, $|C^{(2)}|$ sont deux systèmes linéaires de $\{C\}$ transformés l'un dans l'autre par T, on a

$$|C^{(1)}+C^{(2)}| = |2C_0| = |2C_1|.$$

Envisageons la transformation $\tau\tau'$. A $|C_r|$, τ fait correspondre

$$|C_s| = |C_1 - C_0 + C_r|.$$

A $|C_s|$, τ' fait correspondre

$$|C_t| = |2C_0 - C_s|.$$

On a donc

$$|C_r + C_t| = |C_0 + C_1|.$$

Il en résulte que $|C_t|$ correspond à $|C_r|$ dans une transformation $\tau\tau'$ de seconde espèce (**) de la variété V_q. Cette transformation est involutive et laisse 2^{2q} points de V_q invariants. Il y a donc, sur F, 2^q couples de systèmes linéaires de $\{C\}$ possédant les propriétés suivantes :

a) La transformation T échange les systèmes d'un couple entre eux ;

(*) Voir notre première note *Sur les Involutions régulières*... (loc. cit.).

(**) Castelnovo, *loc. cit.*

b) Les systèmes linéaires qui correspondent, sur F', aux systèmes linéaires d'un couple sont confondus.

Soient $|C_r|$, $|C_s|$ deux systèmes de $\{C\}$ formant un des couples envisagés, $|C'_r|$ le système correspondant sur F'. Le système $|C'_r|$ est transformé en lui-même par θ' et θ''. On voit immédiatement que $|C'_r|$ contient six systèmes linéaires partiels composés : deux au moyen de J_2 et donnant sur F les systèmes $|C_r|$, $|C_s|$; deux au moyen de I'_2 et deux au moyen de I''_2. Ces six systèmes n'ont deux à deux aucune courbe (totale) commune, car alors $|C_r|$ ou $|C_s|$ contiendrait une courbe transformée en elle-même par T, ce qui est impossible.

Aux 2^q couples de systèmes linéaires de $\{C\}$ envisagés correspondent, sur F', 2^q systèmes linéaires de $\{C'\}$ transformés en eux-mêmes par θ' et θ''. Il doit exister 2^{2q} systèmes jouissant de cette propriété; nous en avions déterminé 2^q plus haut (n° 8).

Il existe dans le système $\{C'\}$, sur la surface F', 2^{2q} systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par θ' et θ'' ; 2^q de ces systèmes proviennent des 2^q couples de systèmes linéaires de $\{C\}$ transformés chacun en lui-même par T *; les 2^q systèmes restants proviennent de 2^q couples de systèmes linéaires de $\{C\}$, les systèmes de chaque couple étant transformés l'un dans l'autre par* T.

Marcel HAYEZ, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.