ACADEMIE ROYALE DE BELGIQUE

Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*. Séance du 5 mars 1927, n° 3, t. XIII, pp. 114-133.

GÉOMÉTRIE. — **Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un**

(*Troisième communication*),

par LUCIEN GODEAUX, professeur à l'Université de Liége.

Dans cette troisième et dernière note (*), nous nous proposons de considérer les correspondances rationnelles (1, 2) existant entre les surfaces de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) et les surfaces de genres un ($p_a = P_4 = 1$). On sait que M. Enriques a démontré que toute surface de genres zéro et de bigenre un est l'image d'une involution d'ordre deux, privée de points unis, appartenant à une surface de genres un, et précisément à une quadrique double ayant une courbe de diramation du huitième ordre (**). Nous commençons par former les équations de la correspondance (1, 2) existant, d'après ce théorème de M. Enriques, entre une surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, et une quadrique double du type indiqué plus haut. Ceci nous permet de faire quelques remarques. Nous considérons ensuite la surface du quatrième ordre, lieu des couples de points conjugués par rapport aux quadriques d'un système linéaire ∞^3; nous montrons que ces couples de points forment sur cette surface une involution dont une image est la congruence d'ordre sept et de classe trois, formée par les droites appartenant à ∞^1 quadriques du système linéaire envisagé. Nous obtenons ainsi, en particulier, une nouvelle démonstration du théorème de

(*) Les deux premières communications ont paru dans le *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1926, pp. 726-741 et pp. 890-902. Dans la première, nous avons donné la bibliographie complète des surfaces de genres zéro et de bigenre un.

(**) *Rend. R. Accad. Bologna*, 1908.

M. Enriques. Nous appliquons enfin nos résultats au cas particulier d'une surface anallagmatique du quatrième ordre, ce qui nous permet de compléter un théorème établi dans notre seconde communication.

1. Soit F une surface du sixième ordre, passant doublement par les arêtes du tétraèdre de référence. Son équation peut s'écrire

$$\left.\begin{aligned} & a_{11}x_2^2x_3^2x_4^2 + a_{22}x_3^2x_4^2x_1^2 + a_{33}x_4^2x_1^2x_2^2 + a_{44}x_1^2x_2^2x_3^2 \\ & + x_1x_2x_3x_4\begin{pmatrix} a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 \\ + 2a_{12}x_3x_4 + 2a_{13}x_2x_4 + 2a_{14}x_2x_3 \\ + 2a_{23}x_1x_4 + 2a_{24}x_1x_3 + 2a_{34}x_1x_2 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

La surface F est, comme on sait, une surface générale de la classe des surfaces de genres zéro et de bigenre un.

En rapportant projectivement les quadriques

$$\lambda_1x_1x_4 + \lambda_2x_2x_3 + \lambda_3x_2x_4 = 0$$

aux droites

$$\lambda_1z_1 + \lambda_2z_2 + \lambda_3z_3 = 0$$

d'un plan, on obtient un plan double F', birationnellement équivalent à la surface F, et dont la courbe de diramation a pour équation (*)

$$\left.\begin{aligned} & z_1^2z_2^2(a_{13}z_3^2 + a_{23}z_1z_3 + a_{14}z_2z_3 + a_{24}z_1z_2)^2 \\ & - z_1z_2(a_{33}z_1z_3^2 + a_{44}z_1z_2^2 + a_1z_1^2z_2 + a_2z_2z_3^2 + 2a_{34}z_1z_2z_3) \\ & \cdot (a_{11}z_2z_3^2 + a_{22}z_1^2z_2 + a_3z_1z_2^2 + a_4z_1z_3^2 + 2a_{12}z_1z_2z_3) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Les courbes découpées sur la surface F par la famille de surfaces

$$\mu_1x_2^2x_3x_4 + \mu_2x_1^2x_3x_4 + \mu_3x_4^2x_1x_2 + \mu_4x_3^2x_1x_2 + \mu_5x_1x_2x_3x_4 = 0 \quad (3)$$

ont pour homologues, sur le plan double, les courbes doubles

$$\mu_1z_2z_3^2 + \mu_2z_1^2z_2 + \mu_3z_1z_3^2 + \mu_4z_1z_2^2 + \mu_5z_1z_2z_3 = 0. \quad (4)$$

(*) Voir notre première communication.

Rapportons projectivement les courbes (4) aux hyperplans d'un espace linéaire à quatre dimensions S_4 en posant

$$\frac{X_1}{z_2 z_3^2} = \frac{X_2}{z_1^2 z_2} = \frac{X_3}{z_1 z_3^2} = \frac{X_4}{z_1 z_2^2} = \frac{X_5}{z_1 z_2 z_3}.$$

Le plan double F' se transforme en une surface double F'', birationnellement identique à F' et, par suite, à F, dont le support est la surface du quatrième ordre

$$X_1 X_2 = X_5^2, \qquad X_3 X_4 = X_5^2. \tag{5}$$

Les points de diramation de la surface double F'' correspondent aux points de diramation du plan double. On trouve tout d'abord la courbe de diramation, transformée de la courbe (2) dont on a défalqué les droites $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, intersection de la surface (5) et de l'hyperquadrique

$$\left.\begin{aligned} F(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) &\equiv a_{13}^2 X_1 X_3 + a_{14}^2 X_1 X_4 + a_{23}^2 X_2 X_3 + a_{24}^2 X_2 X_4 \\ &+ 2(a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}) X_5^2 + 2\begin{pmatrix} a_{13}a_{14}X_1 + a_{23}a_{24}X_2 \\ + a_{13}a_{23}X_3 + a_{14}a_{24}X_4 \end{pmatrix} X_5 \\ &- \begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{22}X_2 + a_3 X_4 \\ + a_4 X_3 + 2a_{12}X_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{33}X_3 + a_{44}X_4 + a_1 X_2 \\ + a_2 X_1 + 2a_{34}X_5 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Aux droites $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ correspondent respectivement les points A_1 (1, 0, 0, 0, 0) et A_3 (0, 0, 1, 0, 0) de la surface (5). Ces points sont donc des points de diramation de F''.

Les courbes (4) ayant un point double en $z_1 = z_3 = 0$ ont pour équation

$$\mu_1 z_2 z_3^2 + \mu_3 z_1 z_3^2 + \mu_4 z_1 z_2^2 + \mu_5 z_1 z_2 z_3 = 0.$$

A ces courbes correspondent les sections de la surface (5) par les hyperplans passant par le point A_2 (0, 1, 0, 0, 0). Par suite, aux points du plan double infiniment voisins du point $z_1 = z_3 = 0$ correspondent les points de la surface (5) infiniment voisins de A_2. Ce point est donc un point de diramation de F''. Il en est de même du point A_4 (0, 0, 0, 1, 0), qui correspond au point $z_2 = z_3 = 0$.

La surface (5), du quatrième ordre, est l'intersection de deux cônes du second ordre engendrés, le premier par ∞^1 plans passant par la droite A_3A_4, le second par ∞^1 plans passant par la droite A_1A_2. Il en résulte que les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont les points doubles coniques de la surface (5). On observera que l'hyperquadrique (6) ne passe par aucun de ces quatre points.

Les sections hyperplanes de la surface (5) sont en général des biquadratiques elliptiques. La courbe de diramation de la surface double F'', intersection des trois hyperquadriques (5) et (6), est d'ordre huit; par suite, les sections hyperplanes de la surface double F'' sont de genre cinq.

La surface F'' est, comme sa transformée birationnelle F, une surface générale de la classe des surfaces de genres zéro et de bigenre un. Sur une telle surface, tout système linéaire complet de courbes de genre π a la dimension $\pi - 1$. Par suite, le système des sections hyperplanes de F'' est complet et cette surface est normale.

En résumé : Une surface de genres zéro et de bigenre un peut toujours se ramener, par une transformation birationnelle, à une surface du quatrième ordre, double, normale, de l'espace S_4. Cette surface possède une courbe de diramation du huitième ordre et quatre points de diramation isolés qui sont des points doubles coniques.

2. Considérons maintenant la quadrique

$$y_1y_2 - y_3y_4 = 0 \tag{7}$$

transformée en elle-même par l'homographie biaxiale harmonique

$$y_1' : y_2' : y_3' : y_4' = y_1 : y_2 : -y_3 : -y_4. \tag{8}$$

L'homographie (8) engendre, sur la quadrique (7), une involution d'ordre deux possédant quatre points unis (sommets du tétraèdre de référence). Pour obtenir une image de cette involution, rapportons projectivement aux hyperplans de l'espace S_4, le système des quadriques

$$2(\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \lambda_4 y_4^2) + \lambda_5 (y_1 y_2 + y_3 y_4) = 0,$$

transformées en elles-mêmes par l'homographie (8). A cet effet, posons

$$\frac{X_1}{2y_1^2} = \frac{X_2}{2y_2^2} = \frac{X_3}{2y_3^2} = \frac{X_4}{2y_4^2} = \frac{X_5}{y_1 y_2 + y_3 y_4}.$$

Pour les points de la quadrique (7), ces formules donnent

$$\frac{X_1}{y_1^2} = \frac{X_2}{y_2^2} = \frac{X_3}{y_3^2} = \frac{X_4}{y_4^2} = \frac{X_5}{y_1 y_2} = \frac{X_5}{y_3 y_4}, \tag{9}$$

et, par suite, l'image de l'involution considérée est la surface

$$X_1 X_2 = X_5^2, \qquad X_3 X_4 = X_5^2. \tag{5}$$

Il est facile de voir que les quatre points doubles A_1, A_2, A_3, A_4 de la surface (5) correspondent aux quatre points unis de l'involution, c'est-à-dire aux quatre points de la quadrique (7) appartenant aux axes $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = y_4 = 0$ de l'homographie (8), comme cela résulte d'ailleurs de la théorie des involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis (*).

A la courbe représentée par les équations (5) et (6) correspond, sur la quadrique (7), au moyen des formules (9), une courbe représentée par les équations

$$\left.\begin{aligned} & y_1 y_2 - y_3 y_4 = 0, \\ & \Psi(y_1, y_2, y_3, y_4) \equiv (a_{13} y_1 y_3 + a_{14} y_1 y_4 + a_{23} y_2 y_3 + a_{24} y_2 y_4)^2 \\ & \quad - \begin{pmatrix} a_{11} y_1^2 + a_{22} y_2^2 + a_3 y_4^2 \\ + a_4 y_3^2 + 2a_{12} y_1 y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{33} y_3^2 + a_{44} y_4^2 + a_1 y_2^2 \\ + a_2 y_1^2 + 2a_{34} y_3 y_4 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Cette courbe est transformée en elle-même par l'homographie (8).

(*) Voir notre mémoire des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914

Considérons la quadrique double Ψ, ayant comme support la quadrique (7) et comme courbe de diramation la courbe (10). Passons, pour plus de clarté, aux coordonnées cartésiennes ordinaires en posant $y_1 = x$, $y_2 = y$, $y_3 = z$, $y_4 = 1$.

La quadrique double Ψ est représentée par les équations

$$z = xy, \qquad u^2 = \Psi(x, y, z, 1).$$

Cette quadrique double est transformée en elle-même par la transformation involutive

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = -z, \qquad u' = -u. \tag{I}$$

Cette transformation engendre sur Ψ une involution d'ordre deux dont une image est constituée par la surface double F''. Considérons en effet sur Ψ les points $P(x,y,z,u)$, $P_1(x,y,z,-u)$; leurs homologues dans la transformation (I) sont respectivement $P'(x, y, -z, -u)$, $P_1'(x, y, -z, u)$. Aux deux couples de points superposés P et P', P_1 et P_1' de l'involution engendrée sur Ψ par la transformation (I), correspondent deux points superposés de la surface (5); donc l'image de l'involution est une surface double dont le support est la surface (5). Si pour P et P_1 on a $u = 0$, c'est-à-dire si P et P_1 sont pris sur la courbe (10), les couples P et P', P_1 et P_1' coïncident; donc la courbe (5), (6) fait partie de la courbe de diramation de la surface double envisagée. Les couples P et P', P_1 et P_1' ne peuvent plus coïncider que si P appartient à l'un des axes de l'homographie (8), par exemple si P a pour coordonnées $(0, 0, 0, u)$. On a alors nécessairement u différent de 0 et les points P', P_1, P_1' ont pour coordonnées $P'(0, 0, 0, -u)$, $P_1(0, 0, 0, -u)$, $P_1'(0, 0, 0, u)$. Il en résulte que les points A_1, A_2, A_3, A_4 de la surface (5) sont des points de diramation de la surface double, image de l'involution engendrée sur Ψ par la transformation (I). Cette surface double coïncide donc bien avec F''. Par suite, F, transformée birationnelle de F'', est également une image de cette involution.

La quadrique double Ψ ayant une courbe de diramation d'ordre huit, est une surface de genres un ; donc :

Entre la surface F, *de genres zéro et de bigenre un, et la quadrique double* Ψ, *de genres un, existe une correspondance rationnelle* (1, 2) *représentée par les formules*

$$\frac{x_2^2 x_3 x_4}{2y_1^2} = \frac{x_1^2 x_3 x_4}{2y_2^2} = \frac{x_4^2 x_1 x_2}{2y_3^2} = \frac{x_3^2 x_1 x_2}{2y_4^2} = \frac{x_1 x_2 x_3 x_4}{y_1 y_2 + y_3 y_4}.$$

Cette correspondance s'obtient donc en rapportant projectivement les surfaces (3), qui sont les surfaces du quatrième ordre passant doublement par les droites $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 0$, aux quadriques d'un système linéaire ∞^4, transformées en elles-mêmes par l'homographie (8).

3. La quadrique double Ψ admet, outre la tansformation (I), deux autres transformations birationnelles involutives en ellemême. L'une de ces transformations, représentée par

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad u' = -u, \tag{II}$$

engendre une involution rationnelle dont une image est manifestement la quadrique (7). L'autre transformation est le produit des transformations (I) et (II) et est représentée par

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = -z, \qquad u' = u. \tag{III}$$

Elle engendre sur Ψ une involution I_2, d'ordre deux, ne possédant comme points unis que les points communs à la quadrique double Ψ et aux axes de l'homographie (8). Chacun de ces points doit être compté deux fois (une fois sur chacune des nappes de la quadrique double); l'involution I_2 possède donc huit points unis et est, par suite, de genres un. Une image de cette involution est constituée par une surface double F_1'', dont le support est la surface (5) et dont la courbe de diramation est la courbe (6). Dans un espace linéaire à cinq dimensions, la surface de genres un F_1'' a, par suite, pour équations

$$X_1X_2 = X_5^2, \qquad X_3X_4 = X_5^2,$$
$$X_6^2 = F(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5).$$

Ainsi se trouve confirmé un résultat que nous avions obtenu autrefois par une autre voie (*).

4. Nous passerons maintenant à l'étude de la surface lieu des points conjugués par rapport aux quadriques d'un système linéaire ∞^3.

Considérons tout d'abord trois quadriques

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad \varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

n'ayant qu'un nombre fini de points communs.

Si deux points $Y(y_1, y_2, y_3, y_4)$, $Z(z_1, z_2, z_3, z_4)$ satisfont aux conditions

$$y_1\frac{\partial\varphi_i}{\partial z_1} + y_2\frac{\partial\varphi_i}{\partial z_2} + y_3\frac{\partial\varphi_i}{\partial z_3} + y_4\frac{\partial\varphi_i}{\partial z_4} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

ils sont conjugués par rapport à toutes les quadriques du réseau

$$\lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda_2\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda_3\varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0. \quad (1)$$

Les points Y, Z se correspondent dans une transformation birationnelle involutive bien connue (**). La courbe fonda-

(*) *Rend. R. Accad. Lincei*, 1914.

(**) Cette transformation est un cas particulier de celle que l'on obtient en considérant les couples de points conjugués dans trois réciprocités distinctes de l'espace. Au sujet de cette transformation, on pourra consulter les mémoires de Cremona (*Journal de Crelle*, 1868, t. LXVIII, pp. 72-75; *Rend. R. Ist. Lombardo*, 1871; *Annali di Matematica*, 1871, 2e série, t. V; *Œuvres complètes*, t. III); Cayley (*Proc. of the Lond. Math. Soc.*, 1870; *Math. Annalen*, 1871); Nœther (*Math. Annalen*, 1871, t. III); Loria (*Atti di Torino*, 1890) et R. Sturm (*Jahr. Deutsche Math. Verein.*, 1905). Dans le cas étudié ici, la transformation a été considérée récemment par MM. V. Snyder et Sharpe (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 1923, t. XXV).

mentale de cette transformation est la sextique de genre trois

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_4} \end{array} \right\| = 0. \qquad (2)$$

Aux points d'un plan correspondent les points d'une surface cubique circonscrite à la courbe (2). Aux points d'une droite correspondent les points d'une cubique gauche s'appuyant en huit points sur la courbe (2).

La transformation possède huit points unis qui sont les points-base du réseau de quadriques (1). Ces points ne peuvent appartenir à la courbe (2).

Soit g la droite joignant les deux points homologues distincts Y, Z. Aux points de g correspondent ceux d'une cubique gauche Γ s'appuyant en huit points sur la courbe (2) et passant par Y et par Z. Considérons la quadrique du réseau (1) passant par Y, Z. Ces points étant conjugués par rapport à cette quadrique, le plan tangent en Y à cette quadrique passe par Z et, de même, le plan tangent en Z passe par Y. Il en résulte que la quadrique du réseau (1) passant par Y, Z contient la droite g. Le lieu de la droite g est le complexe formé par les droites appartenant aux quadriques du réseau (1). Ce complexe, que nous désignerons par Σ_4, est du troisième ordre (*). Suivant

(*) Ce complexe a été étudié par Reye (*Geometrie der Lage,* t. III); R. Sturm (*Journal de Crelle,* t. LXX; *Math. Annalen,* t. VI); M. Montesano (*Mem. R. Accad. di Bologna,* 1893); J. Neuberg (*Mathesis,* 1902). Le complexe Σ_4 est rationnel; M. Montesano a montré qu'à une droite g de Σ_4 on peut faire correspondre le point M de g tel que, si A est un des points-base du réseau (1), la droite AM appartienne à la quadrique de ce réseau contenant g. Les droites g de Σ_4 et les points M de l'espace se correspondent birationnellement. Voir aussi Snyder et Sharpe, *loc. cit.*

une remarque de J. Neuberg, son équation peut s'écrire sous la forme

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(y, y) & \varphi_1(y, z) & \varphi_1(z, z) \\ \varphi_2(y, y) & \varphi_2(y, z) & \varphi_2(z, z) \\ \varphi_3(y, y) & \varphi_3(y, z) & \varphi_3(z, z) \end{vmatrix} = 0,$$

où nous avons posé, suivant une notation souvent employée,

$$\varphi_i(y, z) = \frac{1}{2}\left(y_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_2} + y_3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_3} + y_4 \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_4}\right).$$

On a alors

$$\varphi_i(x, x) = \varphi_i(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Observons, d'autre part, que la droite g ne contient en général que deux points conjugués; par suite, il existe une correspondance birationnelle entre ces couples de points conjugués et les droites de Σ.

5. Proposons-nous de rechercher les surfaces du quatrième ordre circonscrites à la courbe (2) et qui soient invariantes pour la transformation entre les points Y, Z envisagée. Posons

$$\Psi_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

et

$$\Psi'_i(x) = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + a_{4i}x_4.$$

L'équation de la surface du quatrième ordre la plus générale, circonscrite à la courbe (2), peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \Psi_1(x) & \Psi_2(x) & \Psi_3(x) & \Psi_4(x) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_4} \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

La transformée de cette surface par la transformation étudiée ici a pour équation

$$\begin{vmatrix} \Psi'_1(x) & \Psi'_2(x) & \Psi'_3(x) & \Psi'_4(x) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_4} \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Pour que la surface (3) soit invariante, c'est-à-dire pour que les surfaces (3) et (4) coïncident, on doit avoir

$$\frac{\Psi_1(x)}{\Psi'_1(x)} \equiv \frac{\Psi_2(x)}{\Psi'_2(x)} \equiv \frac{\Psi_3(x)}{\Psi'_3(x)} \equiv \frac{\Psi_4(x)}{\Psi'_4(x)}.$$

Ces identités peuvent être vérifiées dans deux cas :

1° Lorsque les fonctions $\psi_i(x)$ sont les dérivées partielles du premier membre de l'équation d'une quadrique

$$\varphi_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

n'appartenant naturellement pas au réseau (1). On a donc

$$\Psi_i(x) \equiv \Psi'_i(x) \equiv \frac{\partial \varphi_4(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

La surface considérée est alors le lieu des couples de points conjugués par rapport aux quadriques du système linéaire ∞^3

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 + \lambda_4\varphi_4 = 0, \tag{5}$$

c'est-à-dire la jacobienne de ce système. Nous désignerons par F_1 une surface de cette espèce. Si la quadrique $\varphi_4 = 0$ ne passe par aucun des points-base du réseau (1), il en est de même de la surface F_1.

Les surfaces telles que F_1 sont, comme les quadriques n'appartenant pas au réseau (1), en nombre ∞^6; elles forment un système linéaire ayant pour base la courbe (2).

2° Lorsque

$$y_1\Psi_1(x) + y_2\Psi_2(x) + y_3\Psi_3(x) + y_4\Psi_4(x) = 0$$

est l'équation d'un système nul. On a alors

$$a_{ii} = 0, \qquad a_{ik} + a_{ki} = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$
$$\Psi'_i(x) \equiv -\Psi_i(x). \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

La surface considérée est le lieu des couples de points conjugués par rapport à trois quadriques linéairement indépendantes et à un système nul. Cette surface passe simplement par les points-base du réseau (1). Nous désignerons par F_2 une surface de cette espèce. Les surfaces telles que F_2 sont en nombre ∞^5; elles forment un système linéaire ayant une courbe-base (2) et huit points-base simples (points-base du réseau de quadriques). Ce système linéaire est rapporté projectivement au système des complexes linéaires de l'espace.

Les surfaces F_1 et F_2 appartiennent à un même système linéaire ∞^{12}, formé par les surfaces du quatrième ordre passant par la courbe (2). Ces surfaces sont, par suite, en général de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

6. Considérons la surface F_1 lieu des couples de points conjugués par rapport aux quadriques du système linéaire (5), que nous supposerons dépourvu de points-base. Ces couples de points forment, sur F_1, une involution I_2, d'ordre deux, privée de points unis, puisque (5) n'a pas de point-base.

Soient Y, Z deux points formant un couple de I_2, g la droite qu'ils déterminent. Nous avons vu que la droite g appartient à une quadrique du réseau (1). Les quadriques $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$ jouant des rôles symétriques dans la définition de la surface F_1, la droite g appartiendra également à une quadrique du réseau

$$\lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 + \lambda_4\varphi_4 = 0,$$

par exemple. La droite g appartient, par suite, à ∞^1 quadriques du système (5). Il en résulte que le lieu des droites g est la congruence G, d'ordre sept et de classe trois, formée des rayons communs à ∞^1 quadriques du système linéaire (5). Nous avons vu, d'autre part, qu'une droite g ne contient en général qu'un seul couple YZ, donc la congruence G est une image de l'involution I_2 appartenant à F.

La congruence G, ou, si l'on préfère, la surface d'ordre dix d'un espace linéaire à cinq dimensions qui la représente au sens de Klein, est un modèle projectif général de la classe des surfaces de genres zéro et de bigenre un (*). Par suite :

Sur la surface du quatrième ordre et de genres un, jacobienne d'un système linéaire ∞^3 de quadriques sans point-base, les couples de points conjugués par rapport à ces quadriques forment une involution générale de genres zéro et de bigenre un, dont une image est constituée par la congruence lieu des droites appartenant à ∞^1 quadriques du système linéaire considéré.

7. Observons que se donner la congruence G revient à se donner le système linéaire de quadriques (5) et, par suite, la surface F_1 ; il résulte donc du théorème précédent que toute surface de genres zéro et de bigenre un est l'image d'une involution d'ordre deux, privée de points unis, appartenant à une surface de genres un. C'est là le théorème de M. Enriques rappelé au début de cette note. M. Enriques a établi de plus que cette surface de genres un pouvait ramener, par une transformation birationnelle, à une quadrique double. Ce dernier point peut aussi s'établir en partant de la surface F_1 ; c'est ce que nous allons faire voir en nous limitant, pour plus de simplicité, au cas général.

Le système linéaire (5) contient dix quadriques dégénérées en deux plans. La droite commune aux deux plans formant une

(*) Enriques, *Memorie Soc. Ital. delle Scienze*, 1906. Au sujet de la congruence G, voir Reye, *Geometrie der Lage*, Bd III, et Fano, *Memorie R. Accad di Torino*, 1901 ; *Rendiconti Circolo Matem. Palermo*, 1er sem. 1910.

de ces quadriques appartient à la surface F_1, jacobienne du système (5). La surface F_1 contient dix droites. Nous plaçant dans l'hypothèse où le système linéaire (5) est le plus général possible, nous supposerons ces dix droites distinctes; de plus, nous supposerons que deux de ces droites r_1, r_2 sont gauches (*). Observons enfin que le système linéaire (5) ne peut contenir une quadrique formée de deux plans confondus sans que la congruence G cesse d'être de genres zéro et de bigenre un (**).

Une droite s'appuyant sur r_1, r_2 rencontre encore F_1 en deux points P, Q qui, en général, ne forment pas un groupe de l'involution I_2. Les couples de points tels que P, Q forment une seconde involution I'_2, d'ordre deux, appartenant à F_1. Les quadriques passant par r_1, r_2 découpent sur F_1, des courbes du sixième ordre C, s'appuyant en quatre points sur chacune des droites r_1, r_2 et formant un système linéaire $|C|$ de degré 4 et de dimension 3, irréductible. Les courbes C sont, par suite, des courbes hyperelliptiques de genre trois. Le système $|C|$ étant composé au moyen de l'involution I'_2, en rapportant projectivement les courbes C aux plans de l'espace, la surface F_1 se transforme birationnellement en une quadrique double de genres un, possédant, par suite, une courbe de diramation d'ordre huit. Ainsi se trouve établie, dans le cas général, la seconde partie du théorème de M. Enriques.

La jacobienne d'un système linéaire ∞^3 de quadriques, dépourvu de points-base, est en général birationnellement équivalente à une quadrique double ayant une courbe de diramation du huitième ordre (***).

(*) On peut, en effet, choisir le système (5) de manière à ce que deux des dix droites de la surface F_1 soient gauches.

(**) La congruence G est alors rationnelle. (FANO, *Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1er sem. 1910.)

(***) Nous nous sommes borné dans ce travail au cas général, mais les cas particuliers obtenus en partant des systèmes linéaires ∞^3 de quadriques assujettis à la seule condition de donner naissance à des congruences G de genres zéro et de

On peut aller plus loin et établir le complément au théorème de M. Enriques que nous avons donné autrefois (*), à savoir que si P' et Q' sont les points de F_1 conjugués de P, Q par rapport aux quadriques du système (5), les couples de points PQ', $P'Q$ appartiennent à une involution d'ordre deux et de genres un.

Désignons par Q_1 la quadrique du système (5) formée de deux plans distincts ϖ_{11}, ϖ_{12} passant par r_1; par Q_2 la quadrique du même système formée de deux plans ϖ_{21}, ϖ_{22} passant par r_2. Les point P', Q' appartiennent par définition aux plans polaires de la droite PQ par rapport aux quadriques Q_1, Q_2; donc la droite $P'Q'$ s'appuie sur les droites r_1, r_2. Il en résulte que les quatre points P, Q, P', Q' forment deux groupes PP', QQ' de I_2, deux groupes PQ, $P'Q'$ de I'_2; par suite, les coordonnées de Q' (ou de P') peuvent s'exprimer rationnellement en fonction des coordonnées de P (ou de Q). En d'autres termes, Q' et P' correspondent respectivement à P, Q dans une transformation birationnelle involutive de la surface F_1 en elle-même; cette transformation détermine sur F_1 une involution I''_2, d'ordre deux, dont PQ', $P'Q$ sont des couples. Les points unis de I''_2 seront donnés par les droites PQ, $P'Q'$ coïncidentes; il existe quatre de ces droites : les droites $\varpi_{11}\varpi_{21}$, $\varpi_{11}\varpi_{22}$, $\varpi_{12}\varpi_{21}$, $\varpi_{12}\varpi_{22}$; chacune d'elles fournit deux points unis de I''_2. L'involution d'ordre deux I''_2, appartenant à une surface de genres un F_1 et possédant huit points unis, est de genres un, comme nous devions le démontrer.

bigenre un conduisent aux mêmes conclusions. Par exemple, si les dix droites de F_1 sont confondues, les quadriques passant par r_1, r_2 sont remplacées par des quadriques se raccordant le long d'une droite. L'examen de tous les cas possibles conduit à une discussion assez longue; c'est pourquoi nous ne l'avons pas faite ici. Une étude approfondie de la question ne semble cependant pas inutile, car elle pourrait jeter quelque lumière sur les propriétés des surfaces de genres zéro et de bigenre un à modules particuliers. Nous espérons y revenir.

(*) L. Godeaux, *Rend. R. Accad. Lincei,* 1914.

8. Nous avons rencontré plus haut des surfaces F_2, du quatrième ordre et de genres un, lieux des couples de points conjugués par rapport aux quadriques d'un réseau et d'un système nul. Considérons une de ces surfaces, définie en partant du réseau de quadriques (1) et d'un système-nul générique σ. Sur cette surface F_2, les couples de points conjugués forment une involution d'ordre deux que nous allons démontrer être de genres un.

Soient Q_1, Q_2, Q_3 trois quadriques linéairement indépendantes du réseau (1); r une droite n'appartenant pas au complexe linéaire Σ' déterminé par le système-nul σ; r_1, r_2, r_3 les conjuguées de r par rapport à Q_1, Q_2, Q_3; r' la conjuguée de r par rapport à σ. Le lieu des points conjugués, par rapport à Q_1, Q_2, Q_3, des points de r est une cubique gauche K ayant comme bisécantes r, r_1, r_2, r_3. Le lieu des intersections des plans polaires des points de r par rapport à Q_1 et à σ est une quadrique Q passant par r_1 et r'. La quadrique Q rencontre la cubique gauche K, en dehors de r_1, en quatre points qui sont conjugués, par rapport à Q_1, Q_2, Q_3, σ, des quatre points où r rencontre F_2. Si en particulier la droite r passe par un point-base A du réseau (1), comme A est son propre conjugué par rapport à Q_1, Q_2, Q_3, σ, la cubique gauche K est tangente à r en A, et l'un des quatre points d'intersection de K et de Q considérés plus haut tombe en A. Par suite, r ne rencontre plus F_2 qu'en trois points en dehors de A. Ce point A est donc simple pour F_2.

Si la droite r coïncide avec r', c'est-à-dire si r appartient au complexe Σ', le raisonnement précédent montre que les deux points d'appui de la cubique K sur r appartiennent à F_2, comme cela résulte d'ailleurs de la définition de la surface. En particulier, si r passe par A, cette droite est tangente en ce point à F_2.

La surface F_2, *lieu des couples de points conjugués par rapport aux quadriques d'un réseau et à un système-nul, a l'ordre quatre et passe simplement par les points-base du réseau; les plans tangents en ces points sont les plans polaires de ces points par rapport au système-nul.*

Le couple de points conjugués Y, Z par rapport à Q_1, Q_2, Q_3, σ, sur F_2, détermine une droite g qui appartient, d'une part, au complexe cubique Σ_4, lieu des droites des quadriques du réseau (1), et, d'autre part, au complexe linéaire Σ'. Comme nous l'avons vu, une droite g de Σ_4 ne contient en général qu'un couple de points conjugués par rapport aux quadriques du réseau (1). Par suite, une image de l'involution d'ordre deux formée par les couples Y, Z sur F_2 est constituée par la congruence G', d'ordre et de classe trois, intersection des complexes Σ_4 et Σ'.

L'involution considérée sur F_2 possède huit points unis qui sont les points-base du réseau (1); par suite, cette involution et la congruence G' doivent être de genres un. Effectivement, on sait que la congruence G' possède les caractères $p_a = 1$, $P_4 = 1$ (*). D'ailleurs, si l'on représente l'espace réglé par les points d'une hyperquadrique d'un espace linéaire S_5 à cinq dimensions, à la manière de Klein, la surface qui représente G' est l'intersection d'un hyperplan, d'une hyperquadrique et d'une hypersurface cubique; c'est le type d'une surface de genres un dans un espace linéaire à quatre dimensions (cet espace est ici l'hyperplan correspondant au complexe Σ').

Sur la surface de quatrième ordre et de genres un, lieu des couples de points conjugués par rapport aux quadriques d'un réseau n'ayant que huit points-base et à un système-nul, ces couples de points forment une involution de genres un ayant comme points unis les points-base du réseau.

On observera que puisque les gerbes ayant pour sommets les points-base du réseau (1) appartiennent au complexe Σ_4, aux points de F_2, infiniment voisins de ces points, correspondent, dans la congruence G', les droites du complexe Σ' passant par ces points.

(*) Fano, *Mem. R. Accad. Torino,* 1901.

9. Considérons le cas particulier où le réseau de quadriques (1) est déterminé par les quadriques

$$\varphi_1 \equiv x_1^2 - x_4^2 = 0, \quad \varphi_2 \equiv x_2^2 - x_4^2 = 0, \quad \varphi_3 \equiv x_3^2 - x_4^2 = 0. \qquad (6)$$

Si Y (y_1, y_2, y_3, y_4), Z (z_1, z_2, z_3, z_4) sont deux points conjugués par rapport aux quadriques (6), on a

$$y_1 z_1 = y_2 z_2 = y_3 z_3 = y_4 z_4,$$

et les points Y, Z sont donc homologues dans une inversion dont le tétraèdre fondamental est le tétraèdre de référence.

Le réseau (1) a actuellement pour points-base les points

$A_1(-1,1,1,1)$, $A_2(1,-1,1,1)$, $A_3(1,1,-1,1)$, $A_4(1,1,1,-1)$,
$B(1,1,1,1)$, $B_1(1,1,-1,-1)$, $B_2(1,-1,1,-1)$, $B_3(-1,1,1,-1)$.

La courbe (2), du sixième ordre et de genre trois, est dégénérée et formée précisément des arêtes du tétraèdre de référence.

Le tétraèdre de référence, le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ et le tétraèdre $BB_1B_2B_3$ forment un groupe de trois tétraèdres desmiques.

Considérons la quadrique

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \sum a_{ik} x_i x_k = 0, \qquad (7)$$
$$(i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Le lieu des couples de points conjugués par rapport aux quadriques (6) et (7) est la surface anallagmatique du quatrième ordre

$$\left.\begin{aligned} &a_{12}x_3x_4(x_1^2 + x_2^2) + a_{13}x_2x_4(x_1^2 + x_3^2) + a_{14}x_2x_3(x_1^2 + x_4^2) \\ &+ a_{23}x_1x_4(x_2^2 + x_3^2) + a_{24}x_1x_3(x_2^2 + x_4^2) + a_{34}x_1x_2(x_3^2 + x_4^2) \\ &+ (a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44})x_1x_2x_3x_4 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

D'après ce que nous avons établi plus haut, cette surface contient une involution d'ordre deux, I_2, dont chaque groupe est formé de deux points inverses l'un de l'autre. Si la quadrique (7) ne passe par aucun des points-base du réseau

$$\lambda_1(x_1^2 - x_4^2) + \lambda_2(x_2^2 - x_4^2) + \lambda_3(x_3^2 - x_4^2) = 0,$$

l'involution I_2 est de genres zéro et de bigenre un. Une image de cette involution est constituée par la congruence G lieu des droites appartenant à ∞^1 quadriques du système linéaire

$$\lambda_1 (x_1^2 - x_4^2) + \lambda_2 (x_2^2 - x_4^2) + \lambda_3 (x_3^2 - x_4^2) + \lambda_4 \varphi (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0. \quad (9)$$

Désignons par T le tétraèdre de référence, par T_a le tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$, par T_b le tétraèdre $BB_1 B_2 B_3$, et supposons que la quadrique (7) ne passe par aucun des sommets de ces tétraèdres. Nous avons montré, dans notre première note, que la congruence lieu des droites appartenant à ∞^1 quadriques du système linéaire ∞^3 déterminé par la quadrique (7) et les quadriques circonscrites aux tétraèdres T, T_b, représentait une involution d'ordre deux, appartenant à une surface anallagmatique d'ordre six, passant doublement par les arêtes du tétraèdre T et passant par les sommets du tétraèdre T_a. De même, la congruence lieu des droites appartenant à ∞^1 quadriques du système linéaire ∞^3 déterminé par la quadrique (7) et les quadriques circonscrites aux tétraèdres T, T_a, représente une involution d'ordre deux, appartenant à une surface anallagmatique du sixième ordre, passant doublement par les arêtes du tétraèdre T et simplement par les sommets du tétraèdre T_b.

A une quadrique (7) correspondent donc trois surfaces anallagmatiques : deux du sixième ordre, de genres zéro et de bigenre un; une du quatrième ordre et de genres un.

10. La surface anallagmatique (8) passe simplement par les arêtes du tétraèdre de référence T, et les sommets de T sont des points doubles coniques. Les points inverses des points de la surface (8), infiniment voisins de l'un des sommets du tétraèdre T, sont les points de cette surface situés dans la face opposée de T, en dehors des arêtes de ce tétraèdre. Ce sont donc les points d'une droite. Par suite, aux couples de points inverses de la surface (8) qui viennent d'être considérés correspondent, dans la congruence G', les rayons de quatre faisceaux. D'une manière précise, aux couples de points de l'involution I_2, sur la surface (8), comprenant les points infiniment voisins du sommet (0, 0, 0, 1) de T, par exemple, correspondent, dans la congruence G′, les droites d'un faisceau ayant ce sommet pour centre et pour plan, le plan

$$a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 = 0$$

projetant de ce sommet la droite de la surface (8) située dans le plan $x_4 = 0$ et distincte des arêtes du tétraèdre T.

La congruence G′ contient donc quatre faisceaux de rayons; c'est donc une congruence de genres zéro et de bigenre un à modules particuliers, ce qui provient de ce que la surface (8) est une surface F_1 particulière.

Il serait aisé de poursuivre l'étude de la surface (8). Bornons-nous à remarquer que cette surface contient dix droites : les arêtes du tétraèdre T et les quatre droites situées dans les faces de ce tétraèdre. Les six premières de ces droites proviennent de quadriques dégénérées du système linéaire (9). En rapportant projectivement les quadriques passant par deux arêtes opposées du tétraèdre T aux plans de l'espace, il est aisé de voir que l'on transforme birationnellement la surface (8) en une quadrique double ayant une courbe de diramation d'ordre huit. On pourrait vérifier, dans le cas actuel, les conclusions que nous avons obtenues plus haut dans le cas général.

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.