Bulletin de la Classe des sciences

Suites de quadriques associées à un point d'une surface

Lucien Godeaux

Résumé
Nous avons attaché en 1928 à un point d'une surface une suite de quadriques dont la première est la quadrique de Lie. Dans cette note, nous attachons en ce point deux nouvelles suites de quadriques présentant certaine analogie avec la première.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Suites de quadriques associées à un point d'une surface

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Nous avons attaché en 1928 à un point d'une surface une suite de quadriques dont la première est la quadrique de Lie. Dans cette note, nous attachons en ce point deux nouvelles suites de quadriques présentant certaine analogie avec la première.

Une surface (x) rapportée à ses asymptotiques u,v étant donnée, M. Bompiani a fait correspondre aux tangentes xx_u, xx_v en un point x les points U,V qui représentent ces droites sur l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 et démontré que ces points se correspondent dans une transformation de Laplace. Ce dernier point a également été établi à la même époque par Tzitzeica. Les points U,V appartiennent à une suite de Laplace que nous avons utilisée pour attacher au point x de la surface (x) une suite de quadriques $\Phi, \Phi^1, \Phi^2, \ldots$ dont la première est la quadrique de Lie. Deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points qui sont caractéristiques pour les deux quadriques (1);

Nous avons ensuite défini deux quadriques qui découpent sur la quadrique Φ^n les courbes caractéristiques suivant que u varie seul, ou que v varie seul (2). Dans cette note, nous établissons une liaison

(1) Nous avons exposé nos recherches dans un mémoire *La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé.* (Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique, 1964, pp. 1-84).

(2) *Sur les suites de quadriques associées aux points d'une surface* (Anale Stiintifice ale Universitatii din Jasi, 1965, pp. 283-289). *Réseaux de quadriques associés aux points d'une surface ou aux droites d'une congruence W* (Revue Roumaine de Mathématiques, 1968, pp. 655-660).

entre les quadriques associées aux quadriques Φ^n et Φ^{n-1}. Nous obtenons ainsi deux nouvelles suites de quadriques attachées au point x de (x). Nous reprendrons rapidement certains des raisonnements faits dans des notes antérieures en les simplifiant sur quelques points.

1. Considérons dans l'espace ordinaire une surface (x) rapportée à ses asymptotiques u,v. Représentons par U,V les points de l'hyperquadrique Q de Klein, de S_5, qui représentent les tangentes xx_u,xx_v en un point x. On sait que les points U,V sont transformés de Laplace l'un de l'autre (Bompiani, Tzitzeica) et appartiennent donc à une suite de Laplace L,

$$\ldots,U^n,\ldots,U^1,U,V,V^1,\ldots,V^n,\ldots$$

dans laquelle chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. La suite est autopolaire par rapport à Q en ce sens que le point U^n est le pôle de l'hyperplan $V^{n-2}V^{n-1}V^nV^{n+1}V^{n+2}$ et le point V^n celui de l'hyperplan $U^{n-2}U^{n-1}U^nU^{n+1}U^{n+2}$.

Les plans $U^nU^{n+1}U^{n+2}$ et $V^nV^{n+1}V^{n+2}$ sont conjugués par rapport à Q et leurs sections par cette hyperquadrique représentent les deux systèmes de génératrices rectilignes d'une quadrique Φ^n. Nous obtenons ainsi une suite de quadriques

$$\Phi^0 = \Phi,\Phi^1,\Phi^2,\ldots$$

dont la première est la quadrique de Lie.

Nous avons démontré que deux quadriques consécutives de cette suite se touchent en quatre points caractéristiques pour chacune des quadriques. La quadrique Φ correspond aux plans UU^1U^2 et VV^1V^2 et la quadrique Φ^{-1} est constituée par le plan tangent à la surface (x) compté deux fois. Le point x compte donc pour quatre dans les points caractéristiques de la quadrique de Lie.

Nous supposerons que la suite L est illimitée dans les deux sens, ce qui exclut notamment que la surface (x) soit une réglée ou une surface dont les asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires

2 En général, et nous nous placerons dans ce cas, seuls les points U,V de la suite L appartiennent à l'hyperquadrique Q.

Désignons par C_n, C'_n les points de rencontre de la droite $V^n V^{n+1}$ avec Q et par D_n, D'_n ceux de la droite $U^n U^{n+1}$. Ces points sont les images de droites que nous désignerons respectivement par c_n, c'_n, d_n, d'_n. Observons que les quadriques Φ^n, Φ^{n+1} ont en commun $c_{n+1}, c'_{n+1}, d_{n+1}, d'_{n+1}$ et que ces quadriques se touchent aux sommets du quadrilatère gauche formé par ces droites.

Supposons $n > 0$. Les tangentes aux lignes u en un point des surfaces $(D_n), (D'_n)$ appartiennent au plan $U^{n-1} U^n U^{n+1}$ et se coupent en un point A^n. Les tangentes aux mêmes points aux lignes v appartiennent au plan $U^n U^{n+1} U^{n+2}$ et se coupent en un point $\overline{A}^n$. Les tangentes aux lignes v en un point des surfaces $(C_n), (C'_n)$ sont dans le plan $V^{n-1} V^n V^{n+1}$ et se coupent en un point B^n tandis que les tangentes aux mêmes points aux lignes v sont dans le plan $V^n V^{n+1} V^{n+2}$ et se coupent en un point $\overline{B}_n$. Observons que les points A^n, B^n d'une part, les points $\overline{A}^n, \overline{B}^n$ d'autre part ne peuvent appartenir à Q.

L'hyperplan polaire de A^n passe par les points $U^n, U^{n+1}, V^{n-1}, V^n, V^{n+1}$ et celui du point B^n par les points $V^n, V^{n+1}, U^{-1}, U^n, U^{n+1}$ donc l'espace conjugué de la droite $A^n B^n$ est $U^n U^{n+1} V^n V^{n+1}$.

De la même manière, on voit que l'espace conjugué de la droite $\overline{A}^n \overline{B}^n$ est également $U^n U^{n+1} V^n V^{n+1}$ et par conséquent les points $A^n, B^n, \overline{A}^n, \overline{B}^n$ sont sur une même droite r_n. Les points d'intersection de cette droite avec Q représentent les diagonales du quadrilatère gauche formé par les droites c_n, c'_n, d_n, d'_n.

On voit de plus que la droite r_n est l'intersection des espaces à trois dimensions $U^{n-1} U^n U^{n+1} U^{n+2}$ et $V^{n-1} V^n V^{n+1} V^{n+2}$.

Si les asymptotiques de l'enveloppe des quadriques Φ^n sont les lignes u, v, les points $\overline{A}^n$ et B^n coïncident, de même que les points A^n et $\overline{B}^n$ et réciproquement. Nous supposerons que cette circonstance ne se présente pas.

3. Représentons par $\Phi^n = 0$ l'équation de la quadrique Φ^n, les deux systèmes de génératrices rectilignes de la quadrique sont représentés sur Q par les sections de cette hyperquadrique par les plans $U^n U^{n+1} U^{n+2}$ et $V^n V^{n+1} V^{n+2}$ dont nous représenterons symboliquement les équations par

$$| U^n U^{n+1} U^{n+2} | = 0, \quad | V^n V^{n+1} V^{n+2} | = 0.$$

La surface $\Phi^n_u = 0$ correspond aux sections de Q par les plans

$$|\, U^{n-1}U^{n+1}U^{n+2} \,| = 0, \qquad |\, V^nV^{n+1}V^{n+3} \,| = 0,$$

par conséquent les lignes caractéristiques de Φ^n lorsque u varie seul sont les droites $d_{n+1}, d'_{n+1}, c_n, c'_n$.

De même, la surface $\Phi^n_v = 0$ correspond aux sections de Q par les plans

$$|\, U^nU^{s+1}U^{s+3} \,| = 0, \quad |\, V^{s-1}V^{s+1}V^{s+2} \,| = 0$$

et les lignes caractéristiques de Φ^n lorsque v varie seul sont les droites $d_n, d'_n, c_{n+1}, c'_{n+1}$.

On voit ainsi que les points caractéristiques de la quadrique Φ^n sont les sommets des quadrilatères gauches formés respectivement par les droites c_n, c'_n, d_n, d'_n, et les droites $c_{n+1}, c'_{n+1}, d_{n+1}, d'_{n+1}$.

4. Les quadriques Φ^n et Φ^n_u appartiennent à un faisceau ayant pour base les droites $c_n, c'_n, d_{n+1}, d'_{n+1}$.

Observons que le point A^{n+1} appartient au plan $U^nU^{n+1}U^{n+2}$ qui est le conjugué du plan $V^nV^{n+1}V^{n+2}$ et que celui-ci contient le point $\bar{B}^n$. Les points A^{n+1} et $\bar{B}^n$ sont donc conjugués par rapport à Q.

Les plans $U^{n+1}U^{n+2}A^{n+1}$ et $V^nV^{n+1}\bar{B}^s$ coïncident respectivement avec les plans $U^nU^{n+1}U^{n+2}$ et $V^nV^{n+1}V^{n+2}$, qui correspondent à la quadrique Φ^n.

Les plans $U^{n+1}U^{n+1}\bar{B}^n$ et $V^nV^{n+1}A^{n+1}$ sont conjugués par rapport à Q et leurs sections par cette hyperquadrique représentent les génératrices rectilignes d'une quadrique passant par les droites $d_{n+1}, d'_{n+1}, c_n, c'_n$. Nous désignerons cette quadrique par Θ^n_u, elle détermine avec Φ^n un faisceau contenant la quadrique Φ^n_u.

Observons que l'espace conjugué de $A^{n+1}\bar{B}^n$ par rapport à Q est $U^{n+1}U^{n+2}V^nV^{n+1}$ et que par conséquent si M est un point de la droite $A^{n+1}\bar{B}^n$, son hyperplan polaire coupe cette droite en un point M′ conjugué de M. Cela étant, les plans $U^{n+1}U^{n+2}M$ et $V^nV^{n+1}M'$ d'une part, les plans $U^{n+1}U^{n+2}M'$ et $V^nV^{n+1}M$ d'autre part représentent deux quadriques du faisceau déterminé par Φ^n et Θ^n_u. Elles se correspondent dans une involution entre les quadriques de ce faisceau.

Le point M peut coïncider avec M′ lorsqu'il appartient à Q. Dans ce cas, les quadriques correspondantes sont dégénérées en deux plans. Il en résulte que ce sont les seules quadriques dégénérées du faisceau et que Θ^n_u est une quadrique irréductible.

Un raisonnement analogue conduit à déterminer une quadrique irréductible Θ_v^n rencontrant Φ^n suivant les droites $c_{n+1}, c'_{n+1}, d_n, d'_n$. Les points B^{n+1} et $\bar{B}^s$ sont conjugués par rapport à Q et les plans $V^{n+1}V^{n+2}\bar{A}^n$, $U^nU^{n+1}B^{n+1}$ coupent Q suivant les coniques représentant les génératrices rectilignes de Θ_v^n. La quadrique Φ_v^n appartient au faisceau déterminé par Φ^n et Θ_v^n.

Les quadriques $\Phi^n, \Theta_u^n, \Theta_v^n$ appartiennent à un réseau qui a pour bases les sommets du quadrilatère gauche formé par les droites $c_n, c'_n, d_{n+1}, d'_{n+1}$ et du quadrilatère gauche formé par les droites $c_{n+1}, c'_{n+1}, d_n, d'_n$.

5. Considérons une quadrique Θ_u^n et une quadrique Θ_v^{n-1}. La première correspond aux sections de l'hyperquadrique Q par les plans

$$U^{n+1}U^{n+2}\bar{B}^s \quad \text{et} \quad V^nV^{n+1}A^{n+1},$$

la seconde aux sections de Q par les plans

$$U^{n+1}U^nB^n \quad \text{et} \quad V^nV^{n+1}V^{n-1}.$$

Les seconds plans ont en commun la droite V^nV^{n+1} donc les deux quadriques ont en commun les droites c_n, c'_n. Elles ont par conséquent en commun deux autres droites rencontrant en un point chacune des premières.

La droite $r_n = B^n\bar{B}^n$ appartient à l'espace à trois dimensions $U^{n-1}U^nU^{n+1}U^{n+2}$ et par conséquent les plans $U^{n+1}U^{n+2}\bar{B}^n$ et $U^{n-1}U^nB^n$ appartiennent également à cet espace. Ces plans se rencontrent donc suivant une droite qui s'appuie sur $U^{n-1}U^n$ en un point R^{n-1} et sur la droite $U^{n+1}U^{n+2}$ en un point R^{n+1}.

Le point U^{s-1} appartenant à la droite $U^{n-1}U^n$, son hyperplan polaire passe par l'espace $V^{n-2}V^{n-1}V^nV^{n+1}$. Comme ce point appartient au plan $U^{n+1}U^{n+2}\bar{B}^n$, cet hyperplan passe également par le plan conjugué $V^nV^{n+1}A^{n+1}$. Le point R^{n-1} a donc pour hyperplan polaire l'espace $V^{n-2}V^{n-1}V^nV^{n+1}A^{n+1}$. Les points R^{n-1} et A^{n+1} sont donc conjugués et l'hyperplan polaire du point A^{n+1}, c'est-à-dire l'hyperplan $U^{n+1}U^{n+2}V^nV^{n+1}V^{n+2}$ coupe donc $U^{n-1}U^n$ au point R^{n-1} qui est complètement déterminé.

L'hyperplan polaire de R^{n+1} qui appartient à la droite $U^{n+1}U^{n+2}$ et au plan $U^{n-1}U^nB^n$ passe par les points $V^n, V^{n+1}, V^{n+2}, V^{n+3}, \bar{A}^{n-1}$ et est donc complètement déterminé. Les points $\bar{A}^{n-1}$ et R^{n+1} étant conjugués, ce dernier est l'intersection de l'hyperplan $U^{n-1}U^nU^{n-1}V^n$ V^{n+1} polaire de $\overline{A}^{n-1}$ et de la droite $U^{n+1}U^{n+2}$.

La droite $R^{n-1}R^{n+1}$ coupe Q en deux points S_n,S'_n. Les droites s_n,s'_n qui sont représentées par ces points appartiennent aux quadriques Θ_u^n,Θ_v^{n-1} et rencontrent c_n,c'_n.. Ces deux quadriques ont donc en commun les cotés d'un quadrilatère gauche.

6. Les quadriques Θ_u^{n-1},Θ_v^n correspondent respectivement aux sections de Q par les couples de plans

$$V^{n-1}V^nA^n \quad \text{et} \quad U^nU^{n+1}\overline{B}^{n-1},$$

$$V^{n+1}V^{n+2}\overline{A}^n \quad \text{et} \quad U^nU^{n+1}B^{n+1}.$$

Ces quadriques ont donc en commun les droites d_n,d'_n.

Comme dans le cas précédent, on montre que les plans $V^{n-1}V^nA^n$ et $V^{n+1}V^{n+2}\overline{A}^n$ appartiennent à un espace à trois dimensions et ont en commun une droite qui rencontre la droite $V^{n-1}V^n$ en un point R'_{n-1} et la droite $V^{n+1}V^{n+2}$ en un point R'_{n+1}. On démontre que le point R'_{n-1} appartient à l'hyperplan polaire de B^{n+1} et que le point R_{n+1} appartient à l'hyperplan polaire de $\overline{B}^{n-1}$.

La droite $R'_{n-1}R'_{n+1}$ coupe Q en deux points T_n,T'_n et les droites t_n,t'_n représentées par ces points complètent l'intersection des deux quadriques.

7. Dans ce qui précède, nous avons suposé $n \geqslant 1$. Pour $n = 0$, la droite UU^1 touche Q en U et la droite VV^1 en V. Les points D_0,D'_0 coïncident donc avec U et les points C_0,C'_0 avec V. Les points A^0,B^0 sont indéterminés sur la droite UV, le point $\overline{A}^0$ sur la droite UU^1 et le point $\overline{B}^0$ sur la droite VV^1. On sait d'ailleurs que si $\Phi = 0$ est l'équation de la quadrique de Lie, les quadriques $\Phi_u = 0$ et $\Phi_v = 0$ se réduisent à des couples de plans passant les uns par la droite xx_u, les autres par la droite xx_v.

Observons que l'on pourrait supposer que $\overline{A}^0$ coïncide avec U et $\overline{B}^0$ avec V. Les quadriques Θ_u^0 et Θ_v^0 correspondraient alors respectivement aux sections de Q par les couples de plans.

$$U^1U^2V \quad \text{et} \quad VV^1A^1,$$

$$UU^1B^1 \quad \text{et} \quad V^1V^2U.$$

Au point x de la surface (x), nous pouvons attacher deux suites de quadriques

$$\Theta_u^1 \Theta_v^2 \Theta_u^3 \ldots \Theta_u^{2n+1} \Theta_v^{2n+2} \ldots, \tag{I}$$

$$\Theta_v^1 \Theta_u^2 \Theta_v^3 \ldots \Theta_v^{2n+1} \Theta_u^{2n+2} \ldots \tag{II}$$

Chaque quadrique de l'une des suites rencontre la suivante et la précédente suivant les côtés d'un quadrilatère gauche.

Les quadriques Θ_v^1 et Θ_u^2 par exemple se rencontrent suivant les droites c_1, c_1 et suivant deux droites s_1, s_1' représentant les points de rencontre avec Q de la droite joignant le point R_0 de la droite UU^1 au point R_2 de la droite U^2U^3. Le point R_0 est situé sur l'hyperplan polaire de A^2 et le point R_2 sur l'hyperplan polaire de $\bar{A}^0$.

8. Envisageons les sommets du quadrilatère gauche formé par les droites c_n, c_n', s_n, s_n'. En ces points, les quadriques Θ_u^n et Θ_v^{n-1} ont même plan tangent. Désignons par F le lieu de ces points lorsque u et v varient.

L'enveloppe de chacune des quadriques envisagées s'obtient en éliminant u,v entre l'équation de la quadrique et ses dérivées par rapport à u,v égalées à zéro. En un point de l'enveloppe, celle-ci et la surface enveloppée ont même plan tangent. On en conclut que la surface F fait partie de l'enveloppe des quadriques Θ_u^n et de celle des quadriques Θ_v^{n-1}. Par conséquent:

Deux quadriques consécutives des suites I et II se touchent en quatre points caractéristiques pour chacune des quadriques.

Liège, le 17 septembre 1971