EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*,
N° 11, 1932.

Sur la théorie des surfaces et les suites de Laplace,

par LUCIEN GODEAUX, Professeur à l'Université de Liége.

A une surface non réglée de l'espace ordinaire, on peut associer une suite de Laplace de l'espace à cinq dimensions, autopolaire par rapport à une hyperquadrique (¹). Nous avons examiné récemment quelles sont les conséquences, pour la surface, du fait que cette suite de Laplace se termine (²). Précisément, dans le cas général, la suite de Laplace se termine dans un sens en présentant le cas de Laplace et dans l'autre sens en présentant le cas de Goursat. Mais il peut arriver que la suite de Laplace se termine

(¹) Voir L. GODEAUX, Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé (*Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-51).

(²) IDEM, Sur les surfaces donnant lieu, dans l'espace réglé, à une suite de Laplace terminée. (*Idem*, 1931, pp. 730-739); Note sur les congruences W (*Idem*, 1932, pp. 662-671).

dans les deux sens en présentant le cas de Laplace; c'est l'étude de cette circonstance qui fait l'objet de ce travail. Nous montrons que la suite de quadriques que nous avons attachée autrefois à chaque point d'une surface, et dont la première est la quadrique de Lie, se termine par une quadrique fixe qui peut être dégénérée en deux plans ou en un plan compté deux fois.

Parmi les cas particuliers des surfaces envisagées, on trouve les surfaces dont les asymptotiques des deux systèmes appartiennent à des complexes linéaires. Ces surfaces ont fait l'objet d'études approfondies de C. Segre et de M. Terracini (1). Un autre cas particulier intéressant, et sur lequel nous espérons revenir, est fourni par les surfaces dont les tangentes aux asymptotiques d'un système, le long d'une asymptotique de l'autre système, appartiennent à des complexes linéaires.

1. Soit (x) une surface non réglée, rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes d'un point x de la surface satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles que l'on peut mettre sous la forme

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0,$$

a, b n'étant pas nulles.

Désignons par Q l'hyperquadrique de S_5 représentant les droites de l'espace et soient

$$U = | x \quad x^{10} |, \qquad V = | x \quad x^{01} |$$

les points de Q représentant les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} de la surface (x). Les points U, V sont consécutifs dans une suite de Laplace, autopolaire par rapport à Q,

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots, \tag{I}$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u. On a

$$U^{10} + 2bV = 0, \quad V^{01} + 2aU = 0.$$

2. Supposons que la suite (I) se termine dans les deux sens, aux points U_n, V_n, en présentant le cas de Laplace. On a

$$U_n^{10} = h_n U_{n-1}, \quad V_n^{01} = k_n V_{n-1},$$

---

(1) Un excellent exposé de ces travaux a été fait par M. Terracini dans une note « Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari », insérée dans le tome II de la *Geometria proiettiva differenziale*, de G. Fubini et E. Cech (Bologne, Zanichelli, 1927).

h_n et k_n étant définis sur les formules récurrentes

$$h_i = -(\log b h_1 \dots h_{i-1})^{11} + h_{i-1}, \quad k_i = -(\log a k_1 \dots k_{i-1}) + k_{i-} .$$

On doit donc avoir

$$h_n = 0, \quad k_n = 0.$$

Ecrivons l'équation de la polarité par rapport à Q sous la forme

$$\Omega(p, q) = 0,$$

de sorte que l'équation de cette hyperquadrique soit

$$\Omega(p, p) = 0.$$

Nous avons

$$\Omega(U_n, V_n) = 0, \quad \Omega(U_n, V_{n-1}) = 0, \quad \Omega(U_n, V_{n-2}) = 0,$$
$$\Omega(U_{n-1}, V_n) = 0, \quad \Omega(U_{n-2}, V_n) = 0.$$

De ces relations on déduit, par dérivation,

$$\Omega(U_n^{01}, V_n) = 0, \quad \Omega(U_n^{01}, V_{n-1}) = 0,$$
$$\Omega(U_n, V_n^{01}) = 0, \quad \Omega(U_{n-1}, V_n^{01}) = 0$$

et ensuite

$$\Omega(U_n^{0i}, V_n^{j0}) = 0, \qquad (i \geq 1, j \geq 1).$$

Lorsque u varie, le point U_n reste fixe et le point V_n décrit une courbe (V_n); lorsque v varie, le point U_n décrit une courbe (U_n) et le point V_n reste fixe.

3. Supposons que la courbe (U_n) soit une droite; cette droite contient les points U_n^{01}, U_n^{02}, ... et le point V_{n-1} appartient à l'espace S_3 conjugué de la droite (U_n), espace restant fixe lorsque u, v varient; mais alors la suite (I) appartient tout entière à cet espace S_3, ce qui est impossible. De même la courbe (V_n) ne peut être une droite.

La courbe (U_n) ne peut appartenir à un espace S_3 (et non à un plan), car alors les points V_n, V_n^{10}, ... appartiendraient à une droite et la courbe (V_n) coïncidérait avec cette droite, ce qui est impossible. La courbe (U_n) doit nécessairement appartenir à un plan $U_n U_n^{01} U_n^{02}$ et alors la courbe (V_n) appartient au plan conjugué $V_n V_n^{10} V_n^{20}$ par rapport à Q.

Considérons la suite de quadriques

$$\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \dots$$

attachée au point x; la première est la quadrique de Lie et deux quadriques consécutives se touchent en quatre points, caractéris tiques pour les deux quadriques. Les génératrices rectilignes de Φ_i sont représentées, sur $\underset{\sim}{Q}$, par les sections de cette hyperquadrique par les plans conjugués $U_i U_{i+1} U_{i+2}$, $V_i V_{i+1} V_{i+2}$. Dans le cas actuel, la quadrique Φ_n est donc fixe ; elle fait (quatre fois) partie de l'enveloppe des quadriques Φ_{n-1}.

4. Trois cas peuvent se présenter :

1° Les plans $U_n U_n^{01} U_n^{02}$ et $V_n V_n^{10} V_n^{20}$ ne se rencontrent pas. La quadrique Φ_n est alors irréductible.

2° Ces plans ont en commun un point P. Ce point appartient à $\underset{\sim}{Q}$ et l'hyperplan tangent à $\underset{\sim}{Q}$ en P contient les deux plans et chacun de ceux-ci coupe $\underset{\sim}{Q}$ suivant deux droites passant par P. Soient r, r' les droites suivant lesquelles le plan $U_n U_n^{01} U_n^{02}$ coupe $\underset{\sim}{Q}$, s et s' les droites de $\underset{\sim}{Q}$ appartenant à $V_n V_n^{10} V_n^{20}$. L'espace linéaire à trois dimensions tangent à $\underset{\sim}{Q}$ le long de r coupe $\underset{\sim}{Q}$ suivant deux plans passant par r; cet espace doit contenir le plan $V_n V_n^{10} V_n^{20}$; donc les plans rs, rs' et de même les plans $r's$, $r's'$ appartiennent à $\underset{\sim}{Q}$.

Soit p la droite de l'espace ordinaire ayant pour image P. L'un des plans rs, rs', par exemple le premier, est l'image d'un plan réglé ϖ_1 passant par β, et l'autre est l'image d'une gerbe réglée dont le sommet P_1 appartient à p. La droite r est l'image du faisceau de droites (P_1, ϖ_1). Le plan $r's$ est l'image d'une gerbe de rayons dont le sommet P_2 appartient à p; le plan $r's'$ est l'image d'un plan réglé ϖ_2 passant par p. Les droites r', s, s' représentent respectivement les faisceaux de rayons (P_2, ϖ_2), (P_2, ϖ_1), (P_1, ϖ_2).

La quadrique Φ_n dégénère en deux plans ϖ_1, ϖ_2, si on la considère comme surface-lieu; en deux gerbes de sommets P_1, P_2, si on la considère comme surface-enveloppe.

3° Les plans $U_n U_n^{01} U_n^{20}$, $V_n V_n^{10} V_n^{20}$ se rencontrent suivant une droite r. Alors l'espace linéaire à trois dimensions tangent à $\underset{\sim}{Q}$ le long de r contient les deux plans et coupe $\underset{\sim}{Q}$ suivant deux plans ρ_1, ρ_2 (partageant harmoniquement les premiers). L'un de ces plans représente un plan réglé ϖ, l'autre une gerbe de rayons dont le sommet P appartient à ϖ. La quadrique Φ_n dégénère en un faisceau de rayons (P, ϖ) compté deux fois.

5. Les quatre points de contact des quadriques Φ_{n-1}, Φ_n ou, mieux, les faisceaux de rayons ayant pour sommets ces points de contact et pour plans, respectivement les plans tangents en ces points aux quadriques, sont représentés par les droites de $\underset{\sim}{Q}$ joignant les points de rencontre des droites $U_n U_n^{01}$ et $V_n V_n^{10}$ avec cette hyperquadrique.

Dans le premier des cas examinés plus haut, les quatre points de contact des quadriques Φ_{n-1}, Φ_n sont en général distincts. Il en est de même dans le second cas, mais ici une particularité se présente. Les points d'intersection de la droite $U_n U_n^{01}$ avec Q sont des points R, R' des droites r, r' et les points de la droite $V_n V_n^{10}$ appartenant à Q sont des points S, S' des droites s, s'. La droite RS appartient au plan rs et est l'image d'un faisceau de rayons de plan ϖ_1; de même R'S' est l'image d'un faisceau de rayons de plan ϖ_2. La droite RS' est l'image d'un faisceau de rayons de centre P_1, la droite R'S l'image d'un faisceau de rayons de centre P_2. Il en résulte que les quadriques Φ_{n-1} passent par les points P_1, P_2 et touchent les plans ϖ_1, ϖ_2 qu'elles rencontrent donc chacun suivant deux droites passant l'une par P_1, l'autre par P_2.

Plaçons-nous dans le troisième cas. Les droites $U_n U_n^{01}$, $V_n V_n^{10}$ touchent l'hyperquadrique Q en des points de la droite r. Par suite, les quadriques Φ_{n-1} sont tangentes du plan ϖ au point P. Ces quadriques coupent le plan ϖ suivant deux droites du faisceau (P, ϖ); ces droites sont variables.

6. Supposons $n = 1$. L'hyperplan polaire de U_1 par rapport à Q est $U V V_1 V_1^{10} V_1^{20}$. Lorsque u varie, U_1 et cet hyperplan restent fixes, le point U décrit, sur la surface (U), l'image de la développable des tangentes asymptotiques xx^{10} à une ligne u de (x); cette ligne u appartient donc à un complexe linéaire. Le même raisonnement peut être fait en partant de V_1. Les asymptotiques des deux systèmes de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires. On retrouve ainsi des résultats de C. Segre et de M. Terracini (*loc. cit.*)

Supposons $n = 2$. L'hyperplan polaire de U_2 par rapport à Q est $V V_1 V_2 V_2^{10} V_2^{20}$. Lorsque u varie, le point U_2 et cet hyperplan restent fixes; le point V décrit une courbe appartenant à cet hyperplan et qui est l'image de la réglée gauche engendrée par les tangentes asymptotiques xx^{01} le long d'une courbe u de la surface (x). Cette réglée appartient donc à un complexe linéaire Nous dirons que cette réglée est une surface gauche asymptotique attachée à la surface (x) le long de la ligne u. Le même raisonnement pouvant être fait partant de V_2, on voit que les surfaces gauches asymptotiques relatives aux deux systèmes de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires. Nous reviendrons sur l'étude de ces surfaces en considérant les transformations W dont elles sont une surface focale.

MARCEL HAYEZ, Imprimeur, 112, rue de Louvain, Bruxelles.