Bulletin de la Classe des sciences

Sur deux suites de congruences W

Lucien Godeaux

Résumé
Construction de deux suites de surfaces telles que deux surfaces consécutives d'une même suite soient les nappes focales d'une congruence W.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Sur deux suites de congruences W. In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 57, 1971. pp. 450-454;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1971.61910

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1971_num_57_1_61910

Fichier pdf généré le 04/06/2020

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur deux suites de congruences W

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction de deux suites de surfaces telles que deux surfaces consécutives d'une même suite soient les nappes focales d'une congruence W.

Persée creative commons BY: $ = $

Dans une note récente (1), nous avons considéré une surface telle que la suite de Laplace L qui lui est associée dans un espace à cinq dimensions ait trois points appartenant à l'hyperquadrique Q de Klein (2). Nous avons établi qu'à la suite de Laplace L sont associées deux suites de Laplace M, M′ à la fois inscrites dans la suite L et circonscrites à cette suite. Ces suites M, M′ sont associées à deux surfaces (x), (x') et ont chacune trois points appartenant à l'hyperquadrique Q. La droite xx' engendre une congruence W dont les surfaces (x), (x') sont les nappes focales. Aux suites de Laplace M, M′ sont à leur tour associées des suites de Laplace ayant trois de leurs points appartenant à Q, et ainsi de suite. On obtient ainsi deux suites infinies de surfaces telles que deux surfaces consécutives d'une de ces suites soient les nappes focales d'une congruence W.

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique Q de Klein,

(1) *Sur une configuration formèe par trois suites de Laplace* (Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei, 1° sem. 1971, pp. 111).

(2) Nous renvoyons pour la compréhension de ce qui précède à notre exposé *La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé* (Mémoires in-8° de l'Académie roy. de Belgique, 1964, tome XXXIV).

de S_5, représentant les tangentes asymptotiques xx_u, xx_v en un point x de la surface (x). Ces points sont consécutifs dans une suite de Laplace L

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots \qquad \text{(L)}$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u et que nous supposerons illimitée dans les deux sens.

Dans une note récente, citée plus haut, nous avons démontré que si $U^n (n > 1)$ est le seul point de la suite L, en dehors de U, V, qui appartienne à l'hyperquadrique Q, et si X, X' sont les points de rencontre de la droite $V^{n-1}V^n$, Y, Y' ceux de la droite V^nV^{n+1} avec Q, le plan $V^{n-1}V^nV^{n+1}$ rencontre Q suivant deux droites $XY, X'Y'$ se rencontrant en U^n. Il existe deux points R^1, R^2 décrivant des surfaces rapportées à leurs asymptotiques u, v et telles que les droites $R^1R^1_u, R^1R^1_v$ sont représentées par les points X, Y et les droites $R^2R^2_u, R^2R^2_v$ par les points X', Y'. De plus les plans tangents aux surfaces $(R^2), (R^1)$ passent par la droite $r = R^1R^2$ qui représente le point U^n.

Nous allons modifier nos notations pour donner plus de clarté à la suite de cet exposé.

Nous représenterons par $(x_1), (x_2)$ les surfaces $(R^1), (R^2)$ et par U_1, U_2 les points X, X', par V_1, V_2 les points Y, Y'. Dans ces conditions, la suite de Laplace attachée à la surface (x_1) dans S_5 sera

$$\ldots, U_1^n, \ldots, U_1^1, U_1, V_1, V_1^1, \ldots, V_1^n, \ldots \qquad (M_1)$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u.

La suite de Laplace attachée à la surface (x_2) sera

$$\ldots, U_2^n, \ldots, U_2^1, U_2, V_2, V_2^1, \ldots, V_2^n, \ldots \qquad (M_2)$$

avec la même remarque pour la transformation des points.

Les suites M_1, M_2 sont à la fois inscrites et circonscrites à la suite L.

La droite x_1x_2 engendre une congruence W dont les nappes focales sont $(x_1), (x_2)$.

2. Le point U_1 appartient à la droite $V^{n-1}V^n$ donc son transformé de Laplace dans le sens des u appartient à la droite $V^{n-2}V^{n-1}$. Plus généralement, le point U_1^k appartient à la droite $V^{n-k-1}V^{n-k}$ et le

point U_1^n à la droite $V^{-1}V$, c'est-à-dire à la droite UV et par conséquent à l'hyperquadrique Q. Nous pouvons donc appliquer à la suite M_1 les raisonnements que nous avons appliqués à la suite L. Observons en effet que la droite U_1V_1 passe par U^n, la droite $V_1V_1^1$ par U^n, la droite $V_1^kV_1^{k+1}$ par U^{n-k-1}, la droite $V_1^{n-1}V_1^n$ par U et la droite $V_1^nV_1^{n+1}$ par $U^{-1} = V$. On sait que les plans $U_1^{n-1}U_1^nU_1^{n+1}$ et $V_1^{n-1}V_1^nV_1^{n+1}$ sont conjugués par rapport à Q.

Désignons par U_{11} le second point de rencontre de la droite $V_1^{n-1}V_1^n$ et par V_{11} le second point de rencontre de la droite $V_1^nV_1^{n+1}$ avec Q. Les points U_{11}, V_{11} sont transformés de Laplace l'un de l'autre, la droite $U_{11}V_{11}$ passe par U_1^n et représente le faisceau des tangentes en un point x_{11} à une surface (x_{11}) dont les asymptotiques sont les courbes u, v. La droite xx_{11} engendre une congruence W dont les nappes focales sont les surfaces (x), (x_{11}).

De même, le point U_2^n appartient à la droite UV, donc à Q et les droite $V_2^{n-1}V_2^n$, $V_2^nV_2^{n+1}$ passent respectivement par U et V. Si on appelle U_{21}, V_{21} les seconds points de rencontre avec Q des droites $V_2^{n-1}V_2^n$ et $V_2^nV_2^{n+1}$, ces points sont transformés de Laplace l'un de l'autre, la droite $U_{21}V_{21}$ passe par U_2^n et il existe une surface (x_{21}) dont les asymptotiques sont les courbes u, v. La droite xx_{21} engendre une congruence W.

3. Les points U_{11}, V_{11} sont consécutifs dans une suite de Laplace M_{11},

$$\ldots, U_{11}^n, \ldots, U_{11}^1, U_{11}, V_{11}, V_{11}^1, \ldots, V_{11}^n, \ldots \qquad (M_{11})$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Cette suite M_{11} est inscrite dans la suite M_1 et circonscrite à la fois à la suite M_1 et à la suite L. De même, la suite M_{21} est inscrite dans la suite M_2 et circonscrite à cette suite et à L.

On peut se demander si la droite $x_{11}x_{21}$ engendre une congruence dont les nappes focales seraient les surfaces (x_{11}), (x_{21}). S'il en était ainsi, les droites $U_{11}V_{11}$ et $U_{21}V_{21}$ devraient se rencontrer et les points $u, V, V_1^{n-1}V_2^{n-1}, V_1^n, V_2^n, V_1^{n+1}, V_2^{n+1}$ seraient dans un même plan. Or, du fait que les points V_1, V_2 appartiennent à la droite V^nV^{n+1}, on déduit que les points V_1^{n-1}, V_2^{n-1} appartiennent à la droite $V^{2n-1}V^{2n}$, les points $V^nV^nV_1^n, V_2^n$ à la droite $V^{2n}V^{2n+1}$, les points V_1^{n+1} et V_2^{n+1} à la droite $V^{2n+1}V^{2n+2}$. Par conséquent les quatre points V^{2n-1}, V^{2n},

V^{2n+1}, V^{2n+2} seraient dans un même plan, ce qui est absurde, la suite L ne pouvant appartenir à un hyperplan.

La droite $x_{11}x_{21}$ engendre une congruence dont les nappes focales sont distinctes des surfaces (x_{11}), (x_{21}).

4. Considérons la suite M_{11}. Le point U_{11} appartient à la droite $V_1^{n-1}V_1^n$. Faisons varier v. Le point U_{11}^1 appartient à la droite $V_1^{n-2}V_1^{n-1}$, le point U_{11}^k à la droite $V_1^{n-k-1}V_1^{n-k}$ et le point U_{11}^n à la droite $U_1^{-1}V_1$ c'est-à-dire à la droite U_1V_1. Or cette droite appartient à Q donc le point U_{11}^n appartient à Q.

D'un autre côté, faisons varier v. Le point U_1^{n-1} appartient à la droite $V_{11}V_{11}^1$,, le point U_1^{n-k} à la droite $V_{11}^{k-1}V_{11}^k$,, le point U_1 appartient à la droite $V_{11}^{n-1}V_{11}^n$ et le point $U_{11}^{-1} = V_{11}$ à la droite $V_{11}^nV_{11}^{n+1}$. Comme plus haut, si l'on désigne par U_{12} et par V_{12} les seconds points de rencontre avec Q des droites $V_{11}^{n-1}V_{11}^n$. et $V_{11}^nV_{11}^{n+1}$, la droite $U_{12}V_{12}$ passe par le point U_{11}^n, les points U_{12} et V_{12} sont transformés de Laplace l'un de l'autre et il existe une surface (x_{12}) à laquelle est associée dans S_5 la suite de Laplace dont font partie les points U_{12}, V_{12}. Sur cette surface, les asymptotiques sont les courbes u, v et la droite x_1x_{12} engendre une congruence W dont les nappes focales sont les surfaces (x_1), (x_{12}).

De même, en considérant la suite M_{21} on arriverait à une congruence W ayant pour nappe focale la surface (x_2) et une seconde surface (x_{22}) dont la définition est analogue à celle de la surafce (x_{12}).

Il est clair que ce procédé peut être conduit indéfiniment. Nous obtiendrons ainsi des groupes de congruences W que nous nous bornerons à indiquer.

5. Nous avons établi l'existence de surfaces rapportées à leurs asymptotiques u, v telles que les suites de Laplace de S_5 qui leur sont associées ont trois points appartenant à l'hyperquadrique Q: les points qui représentent les tangentes asymptotiques et le n-ième transformé de l'un d'eux dans le sens des u. Telles sont la suite L dont le point U^n appartient à Q, les suites M_1, M_2 dont les points U_1^n, U_2^n appartiennent à Q, les suites M_{11}, M_{21} dont les points U_{12}^n, U_{22}^n appartiennent à Q.

D'une manière générale, on pourrait définir des suites M_{1k}, M_{2k} telles que les points U_{1k}^n, U_{2k}^n appartiennent à Q, les surfaces auxquelles sont attachées ces suites (x_{1k}), (x_{2k}) ayant pour asymptotiques les courbes u, v.

On parviendra ainsi à deux suites de surfaces

$$\ldots, (x_{14}), (x_{12}), (x_1), (x_2), (x_{22}), (x_{24}), \ldots$$

et

$$\ldots, (x_{13}), (x_{11}), (x), (x_{21}), (x_{21}), \ldots$$

telles que deux surfaces consécutives de chaque suite soient les nappes focales d'une congruence W.

Liège, le 5 avril 1971.