Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination de la singularité d'un point de diramation isolé d'une surface algébrique multiple.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Détermination de la singularité d'un point de diramation isolé d'une surface algébrique multiple.

Soit sur une surface algébrique F une involution cyclique I d'ordre premier $p = 2\nu + 1$, ne possédant qu'un nombre fini de points unis. Désignons par Φ une surface normale dans un espace S_r à r dimensions sur laquelle les points de diramation sont isolés. Au système $|\Gamma|$ des sections hyperplanes de Φ correspond sur F un système linéaire $|C|$ dépourvu de points-base. Considérons un point uni O de seconde espèce de l'involution, c'est-à-dire tel que dans son domaine du premier ordre, l'involution possède deux points unis. Il y a donc en O deux tangentes, a,b à la surface F unies pour l'involution. Soit O′ le point de diramation correspondant sur Φ.

Comme nous l'avons exposé dans notre ouvrage sur les involutions [1] les courbes C passant par O forment ν systèmes linéaires $|C^1|$, $|C^2|$, ..., $|C^\nu|$ dont les courbes ont en O des multiplicités croissantes, les tangentes en ce point coïncident toutes avec a et b. Le système $|C^{i+1}|$ se déduit du système $|C^i|$ en imposant aux courbes C^i de toucher en O une droite distincte de a,b. Les systèmes $|C^1|$, $|C^2|$, ..., $|C^\nu|$ ont les dimensions $r - 1, r - 2, \ldots, r - \nu$.

[1] *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Roma, Edizioni Cremonese, 1963).

Nous désignerons par $\Gamma^1,\Gamma^2,\ldots,\Gamma^v$ les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes $C^1,C^2,\ldots,C^v$ et par $\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_v$ les surfaces dont les sections hyperplanes sont respectivement les courbes $\Gamma^1,\Gamma^2,\ldots,\Gamma^v$ La surface Φ_i est la projection de la surface Φ_{i-1}.

A priori, on pourrait croire que la singularité de la surface Φ en O′ est un point multiple auquel sont infiniment voisins successifs des points de multiplicités non croissantes, les courbes C^v assujetties à toucher en O une droite distincte de a,b ayant en ce point la multiplicité p et des tangentes variables. Il n'en est rien comme on va le voir sur l'exemple suivant (1).

Nous nous contenterons d'indiquer le comportement des courbes $C^1,C^2,\ldots$ au point O, leur détermination pouvant être faite en appliquant les méthodes indiquées dans notre ouvrage cité plus haut.

1. Supposons $p = 31$ et que dans le domaine du premier ordre de O l'involution détermine l'involution binaire

$$x_1' : x_2' = x_1 : \varepsilon^{22} x_2,$$

où ε est une racine primitive d'ordre 31 de l'unité.

Les courbes C^1 ont en O la multiplicité trois et passent par les 26 points $(\alpha,1),(\alpha,2),\ldots,(\alpha,26)$ (2), quatre fois par $(\beta,1)$, deux fois $(\beta,2)$, une fois par une suite de points infiniment voisins successifs $(\beta,3)$, $(\beta,4),\ldots,(\beta,22)$ situés sur une branche linéaire, une fois par les points $(\beta,2,1),(\beta,2,2)$ situés sur une branche superlinéaire d'origine O.

Les points $(\alpha,26),(\beta,22),(\beta,2,2)$ sont unis de première espèce pour l'involution. Il correspond à leurs domaines du premier ordre sur la surface Φ_1 respectivement les droites ρ_1,ρ_2,τ. Le cône tangent en O′ à la surface Φ est la projection de ces trois droites et ce point est

(1) Cette observation a été l'objet d'une communication au IX^e Congrès de l'*Unione Matematica Italiana* tenu à Bari du 27 septembre au 3 octobre 1971.

(2) Nous utilisons les notations définies dans notre ouvrage cité plus haut, n° 35. Nous désignons par $(\alpha,1)$ le point infiniment voisin de 0 sur la droite a et par $(\beta,1)$ celui qui est situé sur la droite b. Les points infiniment voisins successifs de $(\alpha,1)$, situés sur une branche linéaire, unis pour l'involution, seront désignés par $(\alpha,2),(\alpha,3),\ldots$ Si le point (α,k) est uni de seconde espèce pour l'involution, il contient dans son domaine du premier ordre deux points unis. L'un est le point $(\alpha,k+1)$, l'autre sera désigné par $(\alpha,k,1)$. Si ce dernier point est uni de seconde espèce, il contient dans son domaine du premier ordre deux points unis qui seront désignés par $\alpha(,k,2)$ et $(\alpha,k,1,1)$. De même pour les points infiniment voisins de $(\beta,1)$.

donc multiple d'ordre trois pour la surface Si n est l'ordre de la surface Φ, la surface Φ_1 est d'ordre $n - 3$.

2. Les courbes C^2 ont en O la multiplicité 9 et passent simplement par les points $(\beta,1),(\beta,2),\ldots,(\beta,22)$, trois fois par le point $(\alpha,1)$, deux fois par les points $(\alpha,2),\ldots,(\alpha,10)$, une fois par les points $(\alpha,11),(\alpha,11,1)$, enfin une fois par les points $(\alpha,1,1),(\alpha,1,2),\ldots,(\alpha,1,5)$.

Les points $(\alpha,1,5)$ et $(\alpha,11,1)$ sont unis de première espèce pour l'involution et il correspond à leur domaine sur la surface Φ_2 respectivement deux droites ρ_3,ρ_4. Sur cette surface se trouve également la droite ρ_2. On en conclut que Φ_2 est la projection de la surface Φ_1 à partir d'un point O'_1 commun aux droites ρ_1,τ. Le point O'_1 est double biplanaire pour la surface Φ_1, le cône tangent en ce point projetant les droites ρ_3,ρ_4. Ces droites se rencontrent en un point. La surface Φ_2 est d'ordre $n - 5$.

3. Les courbes C^3 ont en O la multiplicité 10. Elles passent deux fois par les points $(\alpha,1),(\alpha,2),\ldots,(\alpha,10)$, une fois par $(\alpha,11),(\alpha,11,1)$, 8 fois par $(\beta,1)$, 4 fois par $(\beta,2)$, deux fois par $(\beta,3),\ldots,(\beta,6)$, une fois par $(\beta,7),(\beta,7,1)$, deux fois par $(\beta,2,1),(\beta,2,2)$.

Les points $(\alpha,11,1),(\beta,2,2)$, déjà rencontrés et le point $(\beta,7,1)$ sont unis de première espèce et à leurs domaines du premier ordre correspond sur Φ_3 respectivement une droite ρ_4, une conique τ et une droite ρ_5.

La surface Φ_3 est la projection de Φ_2 à partir du point O'_2 commun aux droites ρ_2,ρ_3. Il est triple pour la surface Φ_2 et le cône tangent à celle-ci en ce point est la projection de la droite ρ_5 et de la conique τ. Le point O'_2 étant triple pour Φ_2 ne peut être la projection du point de Φ_1 infiniment voixin de O'_1. Effectivement, ce dernier point a pour projection sur Φ_2 le point commun à ρ_3 et ρ_4.

Ainsi se trouve démontrée notre assertion.

On observera que sur la surface Φ_1, il correspond aux courbes Γ^3 les sections de la surface par les hyperplans passant par la droite τ.

4. Bien que cela ne soit pas nécessaire pour notre objet, nous indiquerons que les points $(\alpha,6,2)$ et $(\beta,1,3,2)$ sont unis de première espèce pour l'involution et nous désignerons par ρ_6 et ρ_7 les droites qui leur correspondent sur les surfaces Φ_4 et Φ_5.

Sur la surface Φ_4 se trouvent trois droites ρ_3,τ,ρ_5 et cette surface est d'ordre $n - 10$. Sur la surface Φ_5 se trouvent trois droites ρ_5,ρ_6, ρ_7, cette surface est d'ordre $n - 11$.

La surface Φ_4 est la projection de Φ_3 à partir du point O_3 commun à la conique τ et à la droite ρ_4. La surface Φ_5 est la projection de Φ_4 à partir du point O_4 commun aux droites τ et ρ_3. La droite ρ_7 est exceptionnelle.

Les droites $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_6$ ont le degré virtuel -2 et τ a le degré virtuel -3.

On a la relation fonctionnelle

$$\Gamma \equiv \Gamma^4 + \rho_1 + 2\tau + \rho_2 + 2\rho_3 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_6.$$

Liège, le 14 octobre 1971