

SUR LES COURBES PLANES DU SIXIÈME ORDRE,

par M. L. GODREUX, professeur à l'École militaire.

Si les équations

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0$$

représentent respectivement, en coordonnées cartésiennes, une cubique plane et une conique, la courbe du sixième ordre

$$[f(x, y)]^2 + \lambda [\varphi(x, y)]^3 = 0$$

possède six points doubles de rebroussement sur la conique  $\varphi = 0$  (\*). Nous allons montrer que réciproquement, toute courbe plane du sixième ordre possédant six points doubles de rebroussement situés sur une conique, peut être représentée par une équation de cette forme. Chemin faisant, nous démontrerons le théorème suivant, dû à M. MONTESANO (\*\*):

*Si une courbe plane du sixième ordre possède six points doubles sur une conique, cinq de ces points étant de rebroussement, il en est de même du sixième.*

1. Soient, dans un plan  $\pi$ , six points  $A_1, A_2, \dots, A_6$  appartenant à une conique  $C_2$ . Considérons les cubiques planes  $C_3$  passant par ces six points; elles sont en nombre  $\infty^3$  et forment un système linéaire. Parmi ces courbes  $C_3$ , il y en a  $\infty^2$  dégénérées en la conique  $C_2$  et en une droite du plan  $\pi$ . Observons que les courbes  $C_3$  passant par un point P de  $\pi$ , ne passent pas, en conséquence, par un second point du plan (distinct de  $A_1, A_2, \dots, A_6$ ), car celui-ci devrait appartenir à

---

(\*) Nous avons rencontré cette courbe dans notre étude *Sur les plans doubles de genre un et de rang trois* (*Annali da Academia Polyt. do Porto*, 1920, t. XIV).

(\*\*) M. MONTESANO a proposé ce théorème dans les *Esercizioni Matematiche*, pubblicazione del Circolo Matematico di Catania, 1921, t. I. — (question n° 55, p. 178). Aucune solution n'en a été publiée jusqu'à présent (décembre 1923).

toutes les droites du plan passant par P, ce qui est impossible, ou bien ce second point devrait appartenir à la conique  $C_2$  et toutes les courbes  $C_3$  passant par P seraient dégénérées, ce qui est impossible également (pour une position arbitraire de P).

Cela étant, établissons une projectivité entre les courbes  $C_3$  et les plans d'un espace ordinaire S. Aux points du plan  $\omega$  correspondent les points d'une surface F de S et cette surface est du troisième ordre, car deux courbes  $C_3$  se rencontrent, en dehors des points fixes  $A_1, A_2, \dots, A_6$ , en trois points. Entre les points du plan  $\omega$  et ceux de la surface F, nous avons une correspondance birationnelle, faisant correspondre aux points d'une courbe  $C_3$  ceux d'une section plane de F.

Cette correspondance présente des exceptions : Le point qui correspond sur F au point  $A_1$ , par exemple, est indéterminé. Puisque toutes les courbes  $C_3$  passent par  $A_1$ , il y a, sur chaque section plane de F, un point qui correspond à  $A_1$ . Par suite, les points de F qui correspondent à  $A_1$  forment une droite  $a_1$ . De même, aux points  $A_2, \dots, A_6$  correspondent les points de cinq droites  $a_2, \dots, a_6$  de F.

Une courbe  $C_3$  ne rencontre pas la conique  $C_2$  en dehors des points  $A_1, A_2, \dots, A_6$ , donc une section plane de F ne peut rencontrer le lieu des points correspondants à ceux de  $C_2$ . Par conséquent, aux points de  $C_2$  correspond un point isolé de F. Les sections planes de F passant par ce point ont pour correspondantes, dans le plan  $\omega$ , les courbes  $C_3$  formées de la conique  $C_2$  et d'une droite du plan  $\omega$ . Ces sections planes sont donc rationnelles et possèdent par suite un point double. Nous allons voir que ce point double est précisément le point A de F qui correspond aux points de  $C_2$ .

Soit P un point du plan  $\omega$ . Par ce point passent  $\infty^1$  courbes  $C_3$  formées de  $C_2$  et d'une droite variable (passant par P). A ces courbes  $C_3$  dégénérées correspondent sur F des sections planes ayant un point double chacune et les plans de ces sections passent par A et par le point P' de F correspondant à P. Si les points doubles de ces sections planes ne tombaient pas en A, la surface F posséderait une courbe double. Or, cela est impossible, car toutes les sections planes de F, et par suite toutes les courbes  $C_3$  seraient rationnelles, alors qu'en général ces courbes sont elliptiques. Nous voyons donc que les sections planes de F passant par A ont ce point

double, par suite  $A$  est un point double de la surface  $F$ . De plus,  $A$  est un point double conique de  $F$ , et il y a une correspondance birationnelle entre les tangentes à  $F$  en  $A$  et les points de  $C_2$ .

Observons enfin que la conique  $C_2$  passant par chacun des points  $A_1, \dots, A_6$ , les droites  $a_1, a_2, \dots, a_6$  doivent passer par  $A$ . (On sait d'ailleurs que par un point double conique d'une surface cubique, passent six droites de cette surface.)

2. Soit maintenant  $C_6$  une courbe plane du sixième ordre ayant  $A_1, A_2, \dots, A_6$  comme points doubles. Cette courbe est par suite de genre 4. A la courbe  $C_6$  correspond sur  $F$  une courbe  $\Gamma$ , de genre 4, qui est également d'ordre six, car une courbe  $C_3$  rencontre  $C_6$  en six points en dehors de  $A_1, A_2, \dots, A_6$ . La courbe  $\Gamma$  est nécessairement gauche et on sait qu'une courbe gauche d'ordre six et de genre quatre est nécessairement l'intersection d'une surface cubique et d'une quadrique. La courbe  $\Gamma$  est donc l'intersection de  $F$  et d'une quadrique  $Q$ .

Les deux points communs à la quadrique  $Q$  et à la droite  $a_1$  par exemple, correspondent aux deux points de  $C_6$  infiniment voisins de  $A_1$ . Il en résulte que si la courbe  $C_6$  possède en  $A_1$  un point de rebroussement, la quadrique  $Q$  est tangente à la droite  $a_1$ .

3. Passons à la démonstration du théorème de M. MONTESANO.

Supposons que  $C_6$  ait des points de rebroussement en  $A_1, A_2, \dots, A_5$ . Alors, la quadrique  $Q$  est tangente aux cinq droites  $a_1, a_2, \dots, a_5$ .

Le cône du second ordre formé par les tangentes à la surface  $F$  en  $A$ , contient les droites  $a_1, a_2, \dots, a_6$ . Les cinq premières de ces droites étant tangentes à la quadrique  $Q$ , le plan polaire de  $A$  par rapport à cette quadrique passe par les points de contact de ces droites. Par suite, le cône considéré est tangent à la quadrique  $Q$  et en particulier, la génératrice  $a_6$  de ce cône est tangente à cette quadrique. Il en résulte que  $A_6$  est un point de rebroussement pour  $C_6$ , et le théorème de M. MONTESANO est démontré.

1. Désignons par  $\alpha$  le plan polaire de  $A$  par rapport à  $Q$ .

Toutes les quadriques inscrites au cône tangent à F en A et ayant, par rapport à A, le plan polaire  $\alpha$ , forment un faisceau. Parmi les quadriques de ce faisceau, il y en a une formée par le plan  $\alpha$  compté deux fois. Une autre quadrique de ce faisceau est le cône tangent à F en A. Les quadriques de ce faisceau découpent sur F des courbes  $\Gamma$  d'ordre six tangentes aux droites  $a_1, a_2, \dots, a_6$  en des points fixes. A ces courbes  $\Gamma$  correspondent sur le plan  $\pi$  des courbes  $C_6$  du sixième ordre ayant en  $A_1, A_2, \dots, A_6$  des points doubles de rebroussement, les tangentes de rebroussement étant fixes. Ces courbes  $C_6$  forment un faisceau. Parmi les courbes de ce faisceau se trouvent la courbe qui correspond à la section de F par le plan  $\alpha$  compté deux fois et celle qui correspond à la section de F par le cône tangent à cette surface au point A. Ces courbes déterminent le faisceau.

A la section de F par le plan  $\alpha$  compté deux fois, correspond une courbe  $C_3$  comptée deux fois.

Observons qu'une tangente à F en A ne rencontre plus la surface en dehors de ce point. Le cône tangent à F en A rencontre la surface suivant les six droites  $a_1, a_2, \dots, a_6$ . A la section de F par ce cône correspond la conique  $C_2$ , comptée nécessairement trois fois.

Le faisceau des courbes  $C_6$  considéré est donc déterminé par une courbe  $C_3$  comptée deux fois et par la conique  $C_2$  comptée trois fois. Si

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0$$

sont respectivement les équations de ces courbes, une courbe  $C_6$  du faisceau a donc pour équation

$$[f(x, y)]^2 + \lambda [\varphi(x, y)]^3 = 0.$$

En résumé : *Si une courbe plane du sixième ordre possède six points doubles sur une conique*

$$\varphi(x, y) = 0,$$

*et si cinq de ces points sont de rebroussement, il en est de même du sixième. L'équation de cette courbe est de la forme*

$$[f(x, y)]^2 + \lambda [\varphi(x, y)]^3 = 0,$$

où  $f(x, y) = 0$  est l'équation d'une cubique plane.

Ces courbes sont en nombre  $\infty^4$  (les points doubles étant fixés) et forment un système linéaire.

**5. REMARQUE.** Les raisonnements précédents supposent que les courbes  $C_6$  considérées sont de genre 4, c'est-à-dire ne possèdent pas de points singuliers en dehors des points  $A_1, A_2, \dots, A_6$ . La restriction ainsi apportée au théorème établi n'est qu'apparente.

A toute courbe  $C_6$  possédant les seuls points doubles  $A_1, A_2, \dots, A_6$ , correspond sur la surface  $F$  une courbe  $\Gamma$  appartenant à une quadrique. Les quadriques de l'espace étant en nombre  $\infty^9$ , les courbes  $C_6$  envisagées sont donc aussi en nombre  $\infty^9$  (\*). Toute courbe plane d'ordre six, ayant les points doubles  $A_1, A_2, \dots, A_6$ , et d'autres points singuliers, appartient nécessairement à ce système  $\infty^9$ . Il lui correspond donc, sur  $F$ , une courbe  $\Gamma$  section de  $F$  par une quadrique et les raisonnements des nos 3, 4 subsistent. Le théorème est donc général.

On peut d'ailleurs démontrer que la courbe  $\Gamma$  qui correspond à une courbe  $C_6$  douée de points réguliers (en dehors des points doubles  $A_1, A_2, \dots, A_6$ ) quelconques, possède les mêmes singularités en des points simples de  $F$ , et appartient à une quadrique.

---

(\*) Les courbes planes d'ordre six sont  $\infty^{27}$ . Celles qui ont six points doubles sur une conique satisfont à  $6 \times 3 = 18$  conditions ; il résulte du texte que ces 18 conditions sont indépendantes.