ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XVI, no 5.
Séance du 6 mai 1930, pp. 576-580.

GÉOMÉTRIE.

Sur les courbes planes du sixième ordre ayant six points de rebroussement,

par LUCIEN GODEAUX, professeur à l'Université de Liége.

On sait qu'il existe des courbes planes du sixième ordre ayant six points de rebroussement situés sur une conique (1). Dans un mémoire important consacré à la théorie des plans multiples algébriques, M. Zariski (2) a posé la question de savoir s'il existe des courbes planes du sixième ordre ayant six points de rebroussement non situés sur une conique. Dans une note récente (3), M. B. Segre a donné une réponse affirmative à cette question, en se basant sur les résultats établis dans un mémoire en cours d'impression et dont un résumé

(1) Au sujet de ces courbes, on a le théorème suivant : *Si une courbe plane du sixième ordre possède cinq points de rebroussement et un point double situés sur une conique, ce dernier point est également un point de rebroussement et il existe une cubique passant par les six points de rebroussement et tangente en ces points aux tangentes de rebroussement.* L'équation d'une telle courbe peut donc se mettre sous la forme

$$[\varphi_2(x_1, x_2, x_3)]^3 + [f_3(x_1, x_2, x_3)]^2 = 0,$$

$\varphi_2 = 0$ étant une conique et $f_3 = 0$ une cubique.

La première partie de l'énoncé précédent est due à M. Montesano. Voir notre note Sur les Courbes planes du sixième ordre. (*Mathesis*, 1924, pp. 295-299.)

(2) ZARISKI, On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve. (*American Journal of Mathematics*, 1929, pp. 305-328.)

(3) B. SEGRE, Esistenza di sistemi continui distinti di curve piane algebriche con dati numeri plueckeriani. (*Rend. R. Accad. Naz. dei Lincei*, déc. 1929, pp. 557-560.)

seul a paru [1]. Dans ce travail, nous nous proposons de démontrer qu'*il existe effectivement des courbes planes du sixième ordre ayant six points de rebroussement non situés sur une conique* et d'indiquer un mode de construction de ces courbes. Nous arrivons à ce résultat en utilisant la représentation plane de la surface cubique et une certaine transformation rationnelle de l'espace.

1. Soient, dans un plan ϖ, six points distincts $A_1, A_2, \ldots, A_6$, non situés sur une conique et dont trois n'appartiennent pas à une même droite. Rapportons projectivement les cubiques du plan ϖ passant par ces six points aux plans d'un espace S_3. Aux points du plan ϖ correspondent les points d'une surface cubique F et aux points A_1, A_2, ..., A_6 correspondent six droites a_1, a_2, ..., a_6 de F, ne se rencontrant pas deux à deux. D'une manière précise, aux points du plan ϖ infiniment voisins du point A_i correspondent les points de la droite a_i. On sait que, sous les conditions énoncées pour la position des points A_1, A_2, ..., A_6, la surface F est dépourvue de points doubles et ne peut être un cône.

Aux ∞^9 courbes du sixième ordre découpées sur F par les quadriques correspondent, dans le plan ϖ, les ∞^9 sextiques ayant pour points doubles les points A_1, A_2, ..., A_6. Aux deux points de rencontre d'une quadrique et de la droite a_1, par exemple, correspondent les deux points de la sextique correspondante infiniment voisins de A_1 ; les tangentes en A_1 à cette courbe sont donc en général distinctes. Pour que le point A_1 soit un point de rebroussement pour une sextique, il

---

(1) B. Segre, Esistenza e dimensione di sistemi continui di curve piane algebriche con dati caratteri. (*Rend. R. Accad. Lincei*, 2e sem. 1929, pp. 31-38.)

Il convient de remarquer que les théorèmes donnés par M. B. Segre dans cette note permettent d'étudier des cas plus généraux que celui dont il est question ici.

faut donc que la quadrique correspondante soit tangente à la droite a_1. Par conséquent, s'il existe une sextique ayant des points de rebroussement en A_1, A_2, ..., A_6, il existe une quadrique tangente aux six droites a_1, a_2, ..., a_6 (sans contenir une de ces droites) et réciproquement.

2. Soient O_1, O_2, O_3 trois points, non en ligne droite, appartenant respectivement aux droites a_1, a_2, a_3. Considérons les quadriques Q tangentes en ces points à ces droites. Elles forment un système linéaire ∞^3, $|Q|$, de degré deux. En rapportant projectivement les quadriques Q aux plans d'un espace S'_3, on obtient donc une correspondance (1, 2) entre les espaces S'_3, S_3.

Observons que parmi les quadriques Q se trouvent trois cônes : l'un de sommet O_1, contenant la droite a_1 ; le second de sommet O_2, contenant la droite a_2 ; le troisième de sommet O_3, contenant la droite a_3. Ces trois cônes ont en commun une cubique gauche K, tangente en O_1, O_2, O_3 respectivement aux droites a_1, a_2, a_3. Cette cubique gauche K est irréductible et ne rencontre pas les droites a_4, a_5, a_6. Parmi les quadriques Q se trouvent donc les ∞^2 quadriques passant par K et la correspondance (1, 2) établie entre S'_3 et S_3 est donc celle qui a été étudiée par M. Bolus dans un travail présenté en même temps que celui-ci à l'Académie (¹).

La surface de diramation, dans l'espace S'_3, est formée d'une surface cubique Φ, possédant quatre points doubles coniques, et d'un plan φ, qui correspond au plan $O_1 O_2 O_3$, coupant Φ suivant les trois droites de cette surface ne passant par aucun point double.

Aux quadriques Q passant par K correspondent dans S'_3 les plans passant par un des points doubles O' de la surface Φ.

(¹) F. Bolus, Sur les Surfaces du quatrième ordre possédant trois points doubles singuliers. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1930.)

On sait que les deux points de S_3 qui correspondent à un point de S'_3 sont situés sur une même bisécante de la cubique gauche K. Cela étant, si nous désignons par I_2 l'involution de S_3 dont les groupes sont formés par les points qui correspondent aux points de S'_3, cherchons le lieu des points qui, avec ceux de la droite a_4, forment des couples de I_2. Ces points sont situés, d'une part, sur la surface du quatrième ordre lieu des bisécantes de K s'appuyant sur a_4; d'autre part, sur la quadrique Q contenant la droite a_4. Leur lieu est donc une courbe du septième ordre coupant a_4 en quatre points dont l'un appartient au plan $O_1\,O_2\,O_3$. Aux deux surfaces déterminant ce lieu et considérées plus haut correspondent, dans S'_3 : à la première, un cône de sommet O'; à la seconde, un plan ne passant pas par O' en général. A la droite a_4 correspond donc, dans S'_3, une conique γ_4. On sait d'ailleurs que le conique γ_4 est tangente au plan φ et tritangente à la surface Φ.

Soient γ_5, γ_6 les coniques qui correspondent dans S'_3 aux droites a_5, a_6. Les coniques γ_4, γ_5, γ_6 ne se trouvent pas en général deux à deux dans un même plan, car la quadrique Q contenant l'une des droites a_4, a_5, a_6 ne contient pas en général une seconde de ces droites. De plus, les coniques γ_4, γ_5, γ_6 ne se rencontreront pas en général deux à deux.

Il existe huit plans tangents aux trois coniques γ_4, γ_5, γ_6; l'un de ces plans est φ et il lui correspond, dans S_3, la quadrique Q formée du plan $O_1\,O_2\,O_3$ compté deux fois. A chacun des sept autres plans correspond une quadrique Q tangente aux six droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$ (1).

3. — Revenons maintenant au problème initial. L'existence de quadriques tangentes aux six droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$ prouve

(1) Un de ces sept plans ne peut toucher γ_4, par exemple, en un point de contact de cette conique avec la surface Φ, car alors la quadrique Q serait un cône dont le sommet serait sur la droite a_4. Dans ces conditions, en projetant la surface F de ce point sur un plan, le contour apparent serait dégénéré et la surface F ne serait pas une surface générale.

celle de sextiques ayant des points de rebroussement en six points choisis arbitrairement dans le plan. En même temps se trouve démontré que

Il existe sept sextiques planes ayant des points de rebroussement en six points choisis arbitrairement dans un plan, les tangentes de rebroussement en trois de ces points étant fixées.

Liége, le 12 mars 1930.

Marcel Hayez, imprimeur de l'Académie royale de Belgique
Rue de Louvain, 112, Bruxelles