ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XVI, nº 3.
Séance du 1er mars 1930, pp. 264-273.

GÉOMÉTRIE. — Sur certaines suites de Laplace associées à une suite de Laplace donnée,

par L. GODEAUX, professeur à l'Université de Liége.

Considérons, dans un espace projectif S_r à r dimensions, une suite de Laplace

$$\ldots, X_i, \ldots, X_1, X, Y, Y_1, \ldots, Y_i, \ldots \tag{1}$$

Si P est un point de la droite XY qui engendre un réseau conjugué à la congruence (XY), ce point appartient à une suite de Laplace inscrite dans la suite (1). Considérons deux points $P_{(1)}$, $P_{(2)}$ de la droite XY engendrant des réseaux conjugués à la congruence (XY) et désignons par $P^{(1)}_{-1}$, $P^{(2)}_{-1}$ leurs transformés de Laplace appartenant à la droite X_1X, par $P^{(1)}_1$, $P^{(2)}_1$ leurs transformés de Laplace appartenant à la droite YY_1. Les droites $P^{(1)}P^{(1)}_{-1}$ et $P^{(2)}P^{(2)}_{-1}$ se rencontrent en un point A et les droites $P^{(1)}P^{(1)}_1$, $P^{(2)}P^{(2)}_1$ en un point B. Les points A, B sont consécutifs dans une suite de Laplace dont un point quelconque appartient à un plan déterminé par trois points consécutifs de la suite (1). Nous avons rencontré cette propriété, dans le cas $r = 5$, dans une étude récente sur certaines quadriques introduites par M. Demoulin (*).

On peut se poser une question plus générale : Considérons, sur la droite XY, n points $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(n)}$ engendrant des réseaux conjugués à la congruence (XY). Désignons par $P^{(i)}_1$, $P^{(i)}_2, \ldots, P^{(i)}_{n-1}$ les transformés de Laplace successifs de $P^{(i)}$, appartenant respectivement aux droites YY_1, $Y_1Y_2, \ldots, Y_{n-2}Y_{n-1}$.

(*) Sur la transformation de Guichard et sur certaines quadriques considérées par M. Demoulin. (*Bull. de l Acad. roy. de Belgique*, 1929, pp. 953-958.) Voir aussi, sur cet argument, une note de M. DEMOULIN, Sur la théorie des réseaux. (*C. R. de l'Acad. des Sciences*, 2e semestre 1929, pp. 1053-1054.)

Ces points déterminent, avec P, un espace linéaire $S_{n-1}^{(i)}$ à $n-1$ dimensions. Si nous supposons $r > n$, les n espaces $S_{n-1}^{(1)}, S_{n-1}^{(2)}, \ldots, S_{n-1}^{(n)}$ ont en commun un point. Ce point appartient-il à une suite de Laplace dont chaque point appartient à un espace S_n à n dimensions, déterminé par $n+1$ points successifs de la suite (1) ? La réponse est affirmative, comme nous allons le démontrer dans cette note (*).

1. Soient, dans l'espace S_r, X, Y, deux points dont les coordonnées dépendent de deux paramètres u, v et satisfont aux équations

$$X^{10} = bY, \qquad Y^{01} = aX,$$

a et b étant deux fonctions de u, v et où, si φ est une fonction de u, v, on convient d'écrire

$$\varphi^{ik} = \frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial u^i \partial v^k}.$$

Désignons par $X_1, X_2, \ldots$ les transformés successifs de Laplace de X dans le sens des v, par $Y_1, Y_2, \ldots$ ceux de Y dans le sens des u. Nous formons ainsi la suite (1), dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Tout point P de la droite XY, engendrant un réseau conjugué à la congruence (XY), peut être représenté par

$$P = \lambda X - \mu V,$$

λ et μ étant deux fonctions de u, v satisfaisant aux équations

$$\mu^{10} = b\lambda, \qquad \lambda^{01} = a\mu. \tag{2}$$

Considérons l'espace S_k, à k dimensions, déterminé par les points $P, P_{-1}, P_{-2}, \ldots, P_{-k}$, où $P_{-1}, P_{-2}, \ldots, P_{-k}$ sont les transformés successifs de Laplace de P dans le sens des v. Cet espace coïncide avec l'espace déterminé par les points P, $P^{01}, P^{02}, \ldots P^{0k}$. Les points $P_{-1}, P_{-2}, \ldots P_{-k}$ appartiennent

(*) Dans sa *Géométrie différentielle projective des réseaux* (Paris, 1925), M. Tzitzeica démontre le théorème dans le cas $n=2$ et indique la généralisation pour n quelconque.

respectivement aux droites XX_1, $X_1X_2, \ldots, X_{k-1}\ X_k$; donc l'espace S_k considéré appartient à l'espace S_{k+1} à $k+1$ dimensions, déterminé par les points $Y, X, X_1, \ldots X_k$. Ce dernier espace est déterminé par les points $Y, X, X^{01}, X^{02}, \ldots X^{0k}$.

Un point quelconque de S_{k+1} peut être représenté par

$$\eta Y + \xi X + \xi_1 X^{01} + \cdots + \xi_k X^{0k}$$

et nous dirons que $\eta, \xi, \xi_1, \ldots, \xi_k$ sont les coordonnées de ce point. Nous allons rechercher l'équation de l'espace S_k.

Nous avons, en tenant compte des relations (2),

$$\begin{aligned} P^{01} &= \lambda X^{01} - \mu^{01} Y, \\ P^{02} &= \lambda X^{02} + a\mu X^{01} - a\mu^{01} X - \mu^{02} Y, \end{aligned}$$

et, d'une manière générale, nous écrirons

$$P^{0i} = \lambda X^{0i} + \theta_{i1} X^{0i-1} + \cdots + \theta_{ij} X^{0i-j} + \cdots + \theta_{ii} X - \mu^{0i} Y, \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

θ_{ij} dépendant des entiers i et j, et des fonctions a, b, λ, μ.

L'équation de l'espace S_k sera

$$\begin{vmatrix} \eta & \xi & \xi_1 & \ldots & \xi_k \\ -\mu & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ -\mu^{01} & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ -\mu^{02} & \theta_{22} & \theta_{21} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\mu^{0k} & \theta_{kk} & \theta_{k.k-1} & \ldots & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant par rapport aux éléments de la première colonne, on obtient, après division par λ^k, l'équation de S_k sous la forme

$$\lambda\eta + \mu\xi + \mu^{01}\xi_1 + \cdots + \mu^{0i}\xi_i + \cdots + \mu^{0k}\xi_k = 0. \qquad (3)$$

On observe que la connaissance des expressions θ_{ij} n'est pas nécessaire. Un calcul élémentaire fournit d'ailleurs ces expressions; on trouve

$$\theta_{ij} = \sum_{\rho=0}^{\rho=j-1} \left[\binom{i}{j}\binom{j-1}{\rho} - \binom{i}{\rho}\binom{i-\rho-1}{j-\rho-1} \right] a^{0,j-\rho-1}\mu^{0\rho}.$$

2. Désignons par $P_1, P_2, \ldots, P_l$ les transformés successifs de Laplace de P dans le sens des u. Avec le point P, ces points déterminent un espace S_l à l dimensions. Cet espace est également déterminé par les points P, P^{10}, P^{20}, ... P^{l0} et appartient à l'espace $XYY_1 \ldots Y_l$, c'est-à-dire à l'espace X, Y, $Y^{10}, \ldots Y^{l0}$. Si nous désignons les points de cet espace par la notation

$$\xi X + \eta Y + \eta_1 Y^{10} + \cdots + \eta_l Y^{l0},$$

l'équation de l'espace S_l sera

$$\lambda^{l0} \eta_l + \lambda^{l-1\,0} \eta_{l-1} + \cdots + \lambda^{10} \eta_1 + \lambda \eta + \mu \xi = 0. \tag{4}$$

On obtiendra ce résultat par un calcul analogue à celui qui a été fait plus haut.

3. Abordons maintenant le problème posé. Soient

$$P^{(1)} = \lambda_1 X - \mu_1 Y,\ P^{(2)} = \lambda_2 X - \mu_2 Y, \ldots,\ P^{(n)} = \lambda_n X - \mu_n Y$$

n points de la droite XY, les fonctions λ, μ de même indice satisfaisant aux équations (2). Ces n points engendrent n réseaux conjugués à la congruence (XY).

Nous supposerons en premier lieu n pair et poserons $n = 2\nu$. Nous supposerons en outre $r \geq n$.

Désignons par $S^{(i)}_{n-1}$ l'espace linéaire à $n - 1$ dimensions déterminé par les ν premiers transformés de Laplace $P^{(i)}_{-1}$, $P^{(i)}_{-2}, \ldots, P^{(i)}_{-\nu}$ de $P^{(i)}$ dans le sens des v, par les $\nu - 1$ premiers transformés de Laplace $P^{(i)}_1, P^{(i)}_2, \ldots, P^{(i)}_{\nu-1}$, de $P^{(i)}$ dans le sens des u, et par $P^{(i)}$. Cet espace coïncide avec celui qui est déterminé par $P^{(i)}$, par ses ν premiers dérivés par rapport à v et par ses $\nu - 1$ premiers dérivés par rapport à u. Dans l'espace déterminé par $X_\nu X_{\nu-1} \ldots X_1 XYY_1 \ldots Y_{\nu-1}$, son équation est, d'après ce qui précède,

$$\lambda_i^{\nu-1.0} \eta_{\nu-1} + \lambda_i^{\nu-2.0} \eta_{\nu-2} + \cdots + \lambda_i^{10} \eta_1 + \lambda_i \eta + \mu_i \xi + \mu_i^{01} \xi_1 + \cdots + \mu_i^{0\nu} \xi_\nu = 0.$$

Le point A, intersection des n espaces $S_{n-1}^{(1)}, S_{n-1}^{(2)}, \ldots, S_{n-1}^{(n)}$, sera donc représenté par

$$A = \begin{vmatrix} X^{0\nu} & \mu_1^{0\nu} & \mu_2^{0\nu} & \cdots & \mu_n^{0\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X^{01} & \mu_1^{01} & \mu_2^{01} & \cdots & \mu_n^{01} \\ X & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ Y & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ Y^{10} & \lambda_1^{10} & \lambda_2^{10} & \cdots & \lambda_n^{10} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y^{\nu-1.0} & \lambda_1^{\nu-1.0} & \lambda_2^{\nu-1.0} & \cdots & \lambda_n^{\nu-1.0} \end{vmatrix}.$$

Considérons de même l'espace linéaire à $n-1$ dimensions déterminé par $P^{(i)}$, par ses $\nu-1$ premiers transformés de Laplace dans le sens des v et par ses ν premiers transformés de Laplace dans le sens des u. Dans l'espace $X_{\nu-1}\ldots X_1 XYY_1\ldots Y_\nu$, il a pour équation

$$\lambda_i^\nu \eta_\nu + \cdots + \lambda_i^{10}\eta_1 + \lambda_i\eta + \mu_i\xi + \mu_i^{01}\xi_1 + \cdots + \mu_i^{0\nu-1}\xi_{\nu-1} = 0.$$

Le point B, intersection des n espaces ainsi obtenus pour $i = 1, 2, \ldots, n$, est représenté par

$$B = \begin{vmatrix} X^{0\nu-1} & \mu_1^{0.\nu-1} & \mu_2^{0.\nu-1} & \cdots & \mu_n^{0\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X^{01} & \mu_1^{01} & \mu_2^{01} & \cdots & \mu_n^{01} \\ X & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ Y & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ Y^{10} & \lambda_1^{10} & \lambda_2^{10} & \cdots & \lambda_n^{10} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y^{\nu 0} & \lambda_1^{\nu 0} & \lambda_2^{\nu 0} & \cdots & \lambda_n^{\nu 0} \end{vmatrix}.$$

Nous allons faire voir qu'il existe une relation linéaire entre A, A^{10}, B et que par suite B est le transformé de Laplace de A dans le sens des u.

Observons que l'on a

$$X^{11} = abX + b^{01}Y, \qquad \mu^{11} = ab\mu + b^{01}\lambda.$$

Par suite X^{1k} et μ^{1k} s'expriment linéairement le premier en fonction de $X^{0k-1} \ldots X, Y$, le second en fonction de $\mu^{0k-1} \ldots \mu, \lambda$, au moyen d'une même formule. On en conclut que si, dans le déterminant donnant la valeur de A, on dérive par rapport à u les éléments de l'une des $\nu + 1$ premières lignes, on obtient un déterminant identiquement nul. Il en est de même si l'on dérive par rapport à u les éléments d'une des $\nu + 2$, $\nu + 3, \ldots, 2\nu$ — ième lignes. Par conséquent, on a

$$A^{10} = \begin{vmatrix} X^{0\nu} & \mu_1^{0\nu} & \ldots & \mu_n^{0\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X^{01} & \mu_1^{01} & \ldots & \mu_n^{01} \\ X & \mu_1 & \ldots & \mu_n \\ Y & \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ Y^{10} & \lambda_1^{10} & \ldots & \lambda_n^{10} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y^{\nu-2.0} & \lambda_1^{\nu-2.0} & \ldots & \lambda_n^{\nu-2.0} \\ Y^{\nu.0} & \lambda_1^{\nu 0} & \ldots & \lambda_n^{\nu.0} \end{vmatrix}.$$

Représentons par

$$| \mu^{0.\nu} \quad \mu^{0.\nu-1} \quad \ldots \quad \lambda^{\nu-2.0} |,$$
$$| \lambda^{\nu-1.0} \quad \mu^{0\nu-1} \quad \ldots \quad \lambda^{\nu-2.0} |,$$
$$| \lambda^{\nu 0} \quad \mu^{0\nu-1} \quad \ldots \quad \lambda^{\nu-2.0} |$$

les déterminants obtenus en affectant successivement des indices $1, 2, \ldots, n$ les éléments de la ligne écrite. Le déterminant à $n + 2$ lignes

$$\begin{vmatrix} | \mu^{0\nu} \quad \mu^{0\nu-1} \quad \ldots \quad \lambda^{\nu-2.0} | & X^{0\nu} & \mu^{0\nu} \\ 0 & X^{0\nu-1} & \mu^{0\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & Y^{\nu-2.0} & \lambda^{\nu-2.0} \\ | \lambda^{\nu-1.0} \quad \mu^{0\nu-1} \quad \ldots \quad \lambda^{\nu-2.0} | & Y^{\nu-1.0} & \lambda^{\nu-1.0} \\ | \lambda^{\nu 0} \quad \mu^{0\nu-1} \quad \ldots \quad \lambda^{\nu-2.0} | & Y^{\nu 0} & \lambda^{\nu 0} \end{vmatrix}$$

dans lequel la première colonne ne contient que trois éléments non nuls et où les n dernières colonnes s'obtiennent en affectant des indices $1, 2, \ldots, n$ la dernière colonne écrite, est identiquement nul. Cela étant, si nous posons

$$\beta = | \, \mu^{0\nu} \quad \mu^{0\nu-1} \quad \ldots \quad \lambda^{\nu-20} \, |,$$

$$\alpha = | \, \mu^{0\nu-1} \quad \ldots \quad \lambda^{\nu-20} \quad \lambda^{\nu-10} \, |,$$

nous avons

$$\alpha^{10} = | \, \mu^{0\nu-1} \quad \ldots \quad \lambda^{\nu-2.0} \quad \lambda^{\nu 0} \, |$$

et l'identité

$$\alpha A^{10} - \alpha^{10} A = \beta B.$$

Le point B est donc le transformé de Laplace du point A dans le sens des u.

4. Le cas $n = 2\nu + 1$ se traite de la même manière. Nous prendrons pour A le point commun aux n espaces linéaires à $n - 1$ dimensions déterminés par $P^{(i)}$, ses ν premiers transformés de Laplace dans le sens des v et dans le sens des u $(i = 1, 2, \ldots, n)$. On aura alors

$$A = \begin{vmatrix} X^{0\nu} & \mu_1^{0\nu} & \ldots & \mu_n^{0\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y^{\nu 0} & \lambda_1^{\nu 0} & \ldots & \lambda_n^{\nu 0} \end{vmatrix}.$$

On prendra pour B le point commun aux n espaces linéaires à $n - 1$ dimensions déterminés par $P^{(i)}$, ses $\nu - 1$ premiers transformés de Laplace dans le sens des v et ses $\nu + 1$ premiers transformés de Laplace dans le sens des $u (i = 1, 2, \ldots, n)$. On aura alors

$$B = \begin{vmatrix} X^{0\nu-1} & \mu_1^{0\nu-1} & \ldots & \mu_n^{0\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y^{\nu+1.0} & \lambda_1^{\nu+1.0} & \ldots & \lambda_1^{\nu+1.0} \end{vmatrix}.$$

En posant

$$\beta = | \, \mu^{0\nu} \quad \mu^{0\nu-1} \quad \ldots \quad \lambda^{\nu-1.0} \, |,$$

$$\alpha = | \, \mu^{0\nu-1} \quad \ldots \quad \lambda^{\nu-1.0} \quad \lambda^{\nu 0} \, |;$$

d'où

$$\alpha^{10} = | \, \mu^{0\nu-1} \quad \ldots \quad \lambda^{\nu-1.0} \quad \lambda^{\nu+1.0} \, |;$$

on trouve la relation

$$\alpha A^{10} - \alpha^{10} A = - \beta B$$

et B est le transformé de Laplace de A dans le sens des u, comme dans le premier cas (*).

5. M. Demoulin (*loc. cit.*) a appelé ligne brisée de Laplace l'ensemble des droites joignant deux points consécutifs de la suite de Laplace (1). Appelons plus généralement polyèdre de Laplace d'espèce $k - 1$ $(k < r)$ l'ensemble des espaces linéaires à $k - 1$ dimensions déterminés par k points consécutifs de la suite (1). Le polyèdre de Laplace d'espèce un est donc la ligne brisée de Laplace. Cette définition posée, le théorème que nous venons d'établir peut s'énoncer sous la forme suivante :

Si, dans un espace linéaire à r *dimensions, on considère une ligne brisée de Laplace* L *et* n (n $\leq$ r) *réseaux conjugués à la congruence engendrée par une droite de cette ligne brisée, le point commun aux espaces linéaires à* n — 1 *dimensions* n — *osculateurs aux lignes de même nom aux points générateurs de ces réseaux, engendre une suite de Laplace inscrite dans le polyèdre de Laplace d'espèce* n, *associé à la ligne brisée* L.

6. Dans le cas $n = 2$, le théorème peut être démontré comme nous l'avons fait dans notre note citée plus haut (dans l'hypothèse $r = 5$). On peut en donner une autre démonstration pour r quelconque.

Désignons par $x_0, x_1, \ldots, x_r$ les coordonnées projectives homogènes de l'espace S_r, par $x_0, x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}$ celles d'un espace linéaire S_{r+1} à $r + 1$ dimensions dont S_r est l'hyperplan $x_{r+1} = 0$. Soient $O_0, O_1, O_2, \ldots, O_r, O_{r+1}$ les sommets de la pyramide de référence de S_{r+1}, $\varpi_0, \varpi_1, \ldots, \varpi_r, \varpi_{r+1}$ les faces opposées de cette pyramide.

(*) Il est possible de démontrer simultanément le théorème dans les deux cas en prenant pour A le point commun aux n espaces linéaires à $n - 1$ dimensions n — osculateurs aux lignes v aux points $P_1^{(1)}, \ldots, P_1^{(n)}$ transformés de Laplace de $P^{(1)}, \ldots, P^{(n)}$ sur XX_1, et pour point B le point commun aux n espaces à $n - 1$ dimensions n — osculateurs aux lignes v aux points $P^{(1)}, \ldots, P^{(n)}$. Nous avons préféré la démonstration du texte en vue de recherches ultérieures.

Le point
$$P = \lambda X - \mu Y$$
engendrant un réseau conjugué à la congruence (XY), considérons le point $\overline{X}$ de S_{r+1} dont les coordonnées $x_0, x_1, \ldots, x_r$ sont celles du point X, la coordonnée x_{r+1} étant égale à μ. Considérons de même le point $\overline{Y}$ dont les coordonnées $x_0, x_1, \ldots, x_r$ sont celles de Y et dont la dernière coordonnée x_{r+1} est λ. En vertu des équations (2), les points $\overline{X}$, $\overline{Y}$ sont consécutifs dans une suite de Laplace que nous désignerons par
$$\ldots, \overline{X}_i, \ldots, \overline{X}_1, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_i, \ldots \tag{5}$$
La suite (1) est la projection de la suite (5) sur l'hyperplan ϖ_{r+1} ou S_r, à partir du point O_{r+1}. D'autre part, la ligne brisée de Laplace $\overline{L}$ déterminée par la suite (5) est coupée par l'hyperplan ϖ_{r+1} ou S_r suivant les points d'une suite de Laplace. Si l'on remarque que la droite $\overline{X}\overline{Y}$ coupe ϖ_{r+1} au point P, on voit que la section de la ligne brisée $\overline{L}$ par cet hyperplan est inscrite dans la ligne brisée L.

Cela étant, soit $\overline{P}'$ un point de la droite $\overline{X}\overline{Y}$ engendrant un réseau conjugué à la congruence $(\overline{X}\overline{Y})$. Soit $\overline{P}'_1$ le transformé de Laplace de $\overline{P}'$ dans le sens des v; ce point appartient donc à la droite $\overline{X}_1\overline{X}$. En projetant $\overline{P}'$, $\overline{P}'_1$ de O_{r+1} sur ϖ_{r+1}, on obtient deux points P' de XY, P'_1 de X_1X, consécutifs dans une suite de Laplace inscrite dans (1). D'autre part, la droite $\overline{P}'\overline{P}'_1$ coupe ϖ_{r+1} suivant un point appartenant à PP_1 et engendrant un réseau (u, v). Ce point étant l'intersection des droites PP_1, $P'P'_1$, on en déduit la démonstration du théorème démontré plus haut, dans l'hypothèse $n = 2$.

Nous terminerons en observant que du théorème établi dans cette note (*), on déduit immédiatement le résultat

(*) Lorsque $r = 5$ et que les droites XY appartiennent toutes à une hyperquadrique Q non spéciale, les points XY représentent les tangentes asymptotiques d'une surface de l'espace ordinaire. Le théorème peut être appliqué dans les cas $n = 2, 3, 4, 5$. Pour $n = 2$, on obtient les quadriques de M. Demoulin. Les autres cas fournissent d'autres séries de quadriques sur lesquelles nous reviendrons.

suivant : Considérons, dans un espace S_{r+n} à $r+n$ dimensions ($r \geq n$), un espace linéaire S_r et un espace linéaire S_{n-1} ne rencontrant pas S_r. La section par S_r d'un polyèdre de Laplace L_n d'espèce n est une suite de Laplace inscrite dans le polyèdre de Laplace d'espèce n, projection de L_n sur S_r à partir de S_{n-1}.

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain 112 Bruxelles.