ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XVI, n° 8.
Séance du 2 août 1930, pp. 983-988.

GÉOMÉTRIE.

# Sur les groupes de trois congruences W ayant une nappe focale commune,

par LUCIEN GODEAUX,
professeur à l'Université de Liége, correspondant de l'Académie.

Représentons les droites d'un espace projectif ordinaire $S_3$ par les points d'une hyperquadrique Q d'un espace projectif $S_5$ à cinq dimensions et considérons, dans ce dernier espace, une suite de Laplace. Trois points consécutifs de cette suite déterminent un plan coupant l'hyperquadrique Q suivant une conique dont les points représentent les génératrices rectilignes d'une demi-quadrique de $S_3$. Les quadriques supports de ces demi-quadriques forment une famille, dépendant de deux paramètres, telle que deux quadriques consécutives de la famille se touchent en quatre points, caractéristiques pour chacune des quadriques.

Aux tangentes aux asymptotiques en un point d'une surface $(x)$ non réglée de $S_3$ correspondent, sur Q, deux points consécutifs dans une suite de Laplace (Bompiani, Tzitzeica). Cette suite de Laplace donne une première famille de quadriques attachée en chaque point de la surface $(x)$ (1); cette famille comprend la quadrique de Lie. La droite engendrant une congruence W, dont $(x)$ est une nappe focale, est représentée sur Q par un point engendrant un réseau conjugué; ce réseau donne naissance à une suite de Laplace et par suite à une famille de quadriques que nous avons étudiée (2). Deux

(1) L. GODEAUX, Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé. (*Bulletins de l'Acad. roy. de Belgique*, 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-51.)

(2) Sur quelques familles de quadriques attachées aux points d'une surface. (*Annales de la Soc. polonaise de Mathém.*, 1928, pp. 213-226.)

congruences W ayant $(x)$ comme nappe focale donnent naissance à une famille de quadriques comprenant deux quadriques rencontrées par M. Demoulin [1].

Dans cette note, nous considérons trois congruences W ayant une surface $(x)$ comme nappe focale commune et nous montrons que l'on peut associer à ces congruences une famille de quadriques dont nous étudions quelques propriétés [2].

**1**. Soient $(x)$ une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques $u$, $v$; $(x^{(1)})$, $(x^{(2)})$, $(x^{(3)})$ trois transformées de Guichard de $(x)$. Les droites $xx^{(1)}$, $xx^{(2)}$, $xx^{(3)}$ engendrent donc trois congruences W ayant $(x)$ pour nappe focale commune, les autres nappes focales étant respectivement les surfaces $(x^{(1)})$, $(x^{(2)})$, $(x^{(3)})$. Sur ces surfaces, les asymptotiques sont les courbes $u$, $v$.

Désignons par U, V les points de Q représentant les tangentes aux asymptotiques $u$, $v$ de la surface $(x)$; par $U^{(i)}$, $V^{(i)}$ ceux qui représentent les tangentes aux asymptotiques $u$, $v$ de la surface $(x^{(i)})$. Ces points déterminent des suites de Laplace

$$\ldots,\ U_n,\ \ldots,\ U,\ V,\quad \ldots,\ V_n,\ \ldots, \tag{1}$$

$$\ldots,\ U_n^{(1)},\ \ldots,\ U^{(1)},\ V^{(1)},\ \ldots,\ V_n^{(1)},\ \ldots, \tag{2}$$

$$\ldots,\ U_n^{(2)},\ \ldots,\ U^{(2)},\ V^{(2)},\ \ldots,\ V_n^{(2)},\ \ldots, \tag{3}$$

$$\ldots,\ U_n^{(3)},\ \ldots,\ U^{(3)},\ V^{(3)},\ \ldots,\ V_n^{(3)},\ \ldots, \tag{4}$$

---

(1) A. DEMOULIN, Sur la transformation de Guichard et sur les systèmes K. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1919, pp. 101-112.) Les deux quadriques en question avaient été rencontrées dès 1911 par M. Demoulin, dans un mémoire couronné par l'Académie des Sciences de Paris. La famille de quadriques à laquelle elles appartiennent a été étudiée par M. Demoulin et par nous. Voir A. DEMOULIN, Sur la théorie des réseaux. (*C. R.*, décembre 1929, pp. 1053-1054) et L. GODEAUX, Sur la transformation de Guichard et sur certaines quadriques considérées par M. Demoulin. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1929, pp. 953-958.)

Dans une lettre récente, M. Demoulin nous a communiqué certains documents datant de 1922 et montrant que, dès cette époque, il avait considéré les familles de quadriques de $S_3$ provenant de suites de Laplace de $S_5$. Ses recherches sont malheureusement restées inédites.

(2) Voir notre note sur certaines suites de Laplace associées à une suite de Laplace donnée. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 1930, pp. 264-273.) Note au bas de la page 272.

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des $u$.

Le point $J^{(i)}$, représentant sur Q la droite $xx^{(i)}$, est l'intersection des droites UV, $U^{(i)}V^{(i)}$ et engendre un réseau conjugué à la congruence décrite par chacune de ces droites [1]. Nous avons trois nouvelles suites de Laplace

$$\ldots,\ J_n^{(1)},\ \ldots,\ J_1^{(1)},\ J^{(1)},\ J_{-1}^{(1)},\ \ldots,\ J_{-n}^{(1)},\ \ldots, \tag{5}$$
$$\ldots,\ J_n^{(2)},\ \ldots,\ J_1^{(2)},\ J^{(2)},\ J_{-1}^{(2)},\ \ldots,\ J_{-n}^{(2)},\ \ldots, \tag{6}$$
$$\ldots,\ J_n^{(3)},\ \ldots,\ J_1^{(3)},\ J^{(3)},\ J_{-1}^{(3)},\ \ldots,\ J_{-n}^{(3)},\ \ldots, \tag{7}$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des $u$. La suite (5), par exemple, est inscrite dans chacune des suites (1) et (2).

Les droites $J^{(2)}J_1^{(2)}$, $J^{(3)}J_1^{(3)}$ se coupent en un point que nous désignerons par $B^{(1)}$; les droites $J^{(2)}J_{-1}^{(2)}$, $J^{(3)}J_{-1}^{(3)}$ en un point $A^{(1)}$. Les points $A^{(1)}$, $B^{(1)}$ appartiennent à une même suite de Laplace

$$\ldots,\ B_n^{(1)},\ \ldots,\ B^{(1)},\ A^{(1)},\ \ldots,\ A_n^{(1)},\ \ldots \tag{8}$$

dont chaque point est le transformé de Laplace du précédent dans le sens des $u$. La suite (8) est inscrite dans chacune des suites (6), (7).

Par permutation tournante, on définit deux nouvelles suites de Laplace

$$\ldots,\ B_n^{(2)},\ \ldots,\ B^{(2)},\ A^{(2)},\ \ldots,\ A_n^{(2)},\ \ldots, \tag{9}$$
$$\ldots,\ B_n^{(3)},\ \ldots,\ B^{(3)},\ A^{(3)},\ \ldots,\ A_n^{(3)},\ \ldots. \tag{10}$$

Les suites (1), (2), (3), (4) sont autopolaires par rapport à l'hyperquadrique Q. Nous désignerons les suites polaires par rapport à cette hyperquadrique des suites (5) à (10) respectivement par

$$\ldots,\ P_n^{(1)},\ \ldots,\ P^{(1)},\ \ldots,\ P_{-n}^{(1)},\ \ldots, \tag{11}$$
$$\ldots,\ P_n^{(2)},\ \ldots,\ P^{(2)},\ \ldots,\ P_{-n}^{(2)},\ \ldots, \tag{12}$$
$$\ldots,\ P_n^{(3)},\ \ldots,\ P^{(3)},\ \ldots,\ P_{-n}^{(3)},\ \ldots, \tag{13}$$

$$\ldots,\ A_n'^{(1)},\ \ldots,\ A'^{(1)},\ B'^{(1)},\ \ldots,\ B_n'^{(1)},\ \ldots, \tag{14}$$
$$\ldots,\ A_n'^{(2)},\ \ldots,\ A'^{(2)},\ B'^{(2)},\ \ldots,\ B_n'^{(2)},\ \ldots, \tag{15}$$
$$\ldots,\ A_n'^{(3)},\ \ldots,\ A'^{(3)},\ B'^{(3)},\ \ldots,\ B_n'^{(3)},\ \ldots, \tag{16}$$

---

[1] Cela résulte d'un théorème de M. DEMOULIN, Sur les surfaces R. (*C. R.*, 1911, t. 153, pp. 707-709).

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des $u$. Le point $P^{(i)}$ est le pôle par rapport à Q de l'hyperplan $J^{(i)}_{-2} J^{(i)}_{-1} J^{(i)} J^{(i)}_1 J^{(i)}_2$; le point $A'^{(i)}$ celui de l'hyperplan $A^{(i)}_2 A^{(i)}_1 A^{(i)} B^{(i)} B^{(i)}_1$ [1].

**2**. Les trois plans $J^{(1)}_{-1} J^{(1)} J^{(1)}_1$, $J^{(2)}_{-1} J^{(2)} J^{(2)}_1$, $J^{(3)}_{-1} J^{(3)} J^{(3)}_1$ appartenant à l'espace à trois dimensions $U_1UVV_1$ se coupent en un point C appartenant aux droites $A^{(1)}B^{(1)}$, $A^{(2)}B^{(2)}$, $A^{(3)}B^{(3)}$ et décrit un réseau conjugué aux congruences engendrées par ces droites. Le point C appartient à une suite de Laplace

$$..., C_n, ..., C_1, C, C_{-1}, ..., C_{-n}, ..., \qquad (17)$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des $u$. Si nous représentons par $C'$ le pôle de l'hyperplan $C_2 C_1 C C_{-1} C_{-2}$ par rapport à l'hyperquadrique Q, le point $C'$ appartient à une suite de Laplace

$$..., C'_n, ..., C'_1, C', C'_{-1}, ..., C'_{-n}, ..., \qquad (18)$$

le point $C'_n$ étant le pôle de l'hyperplan $C_{-n+2} C_{-n+1} C_{-n} C_{-n-1} C_{-n-2}$.

La suite (17) est inscrite dans les suites (8), (9), (10) et, par suite, la suite (18) est circonscrite aux suites (14), (15) et (16).

Les suites (11), (12), (13) sont d'ailleurs respectivement circonscrites aux suites (1) et (2), (1) et (3), (1) et (4). Les suites (14), (15), (16) sont respectivement circonscrites aux suites (12) et (13), (13) et (11), (11) et (12).

**3**. Les plans $C_1 C C_{-1}$ et $C'_1 C' C'_{-1}$ étant conjugués par rapport à Q, leurs sections par cette hyperquadrique représentant

---

[1] Les plans

$$A^{(3)}_1 A^{(3)} B^{(3)} \quad \text{et} \quad A'^{(3)}_1 A'^{(3)} B'^{(3)}, \qquad A^{(3)} B^{(3)} B^{(3)}_1 \quad \text{et} \quad A'^{(3)} B'^{(3)} B'^{(3)}_1$$

correspondent aux quadriques de Demoulin associées aux congruences $xx^{(1)}$ et $xx^{(1)}$.

deux demi-quadriques ayant pour support commun la quadrique $\Gamma$.

Envisageons en premier lieu le plan $C'_1C'C'_{-1}$.

La droite $C'C'_1$ passe par les points $A'^{(1)}$, $A'^{(2)}$, $A'^{(3)}$. D'autre part, le point $A'^{(1)}$ est l'intersection des droites $P^{(2)}P^{(3)}$ et $P_1^{(2)}P_1^{(3)}$, le point $A'^{(2)}$ l'intersection des droites $P^{(3)}P^{(1)}$ et $P_1^{(3)}P_1^{(1)}$; enfin le point $A'^{(3)}$ l'intersection des droites $P^{(2)}P^{(3)}$ et $P_1^{(2)}P_1^{(3)}$. Par suite, la droite $C'C'_1$ est l'intersection des plans $P^{(1)}P^{(2)}P^{(3)}$ et $P_1^{(1)}P_1^{(2)}P_1^{(3)}$.

De même, la droite $C'C'_{-1}$ est l'intersection des plans $P^{(1)}P^{(2)}P^{(3)}$ et $P_{-1}^{(1)}P_{-1}^{(2)}P_{-1}^{(3)}$. Il en résulte que le plan $C'_1C'C'_{-1}$ coïncide avec le plan $P^{(1)}P^{(2)}P^{(3)}$. Or, les points $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$ représentent les complexes linéaires osculateurs aux congruences $(xx^{(1)})$, $(xx^{(2)})$, $(xx^{(3)})$ le long des droites $xx^{(1)}$, $xx^{(2)}$, $xx^{(3)}$. D'une manière précise, ces points sont les secondes images de ces complexes. Il en résulte que le plan $C'_1C'C'_{-1}$ coupe l'hyperquadrique Q suivant une conique dont les points représentent les axes des complexes linéaires spéciaux appartenant au réseau de complexes déterminé par les trois complexes osculateurs envisagés.

*La quadrique* $\Gamma$ *contient les droites communes à ces trois complexes osculateurs.* Ces droites sont représentées sur Q par les points de la section de cette hyperquadrique par le plan $C_1CC_{-1}$.

**4.** Les plans $C_{n+1}C_nC_{n-1}$ et $C'_{-n-1}C'_{-n}C'_{-n+1}$ sont conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q; ils coupent celles-ci suivant deux coniques représentant deux demi-quadriques ayant pour support une même quadrique que nous désignerons par $\Gamma_n$. On obtient ainsi une suite de quadriques

$$\ldots,\ \Gamma_n,\ \ldots,\ \Gamma_1,\ \Gamma,\ \Gamma_{-1},\ \ldots,\ \Gamma_{-n},\ \ldots \tag{19}$$

telle que deux quadriques consécutives se touchent en quatre points qui sont des points caractéristiques de ces quadriques.

Il est aisé de voir que le plan $C'_{-n-1}C'_{-n}C'_{-n+1}$ coïncide avec le plan $P^{(1)}_{-n}P^{(2)}_{-n}P^{(3)}_{-n}$; il suffit de répéter le raisonnement fait plus haut.

Les plans $A_1^{(1)}A^{(1)}B^{(1)}$ et $A_1'^{(1)}A'^{(1)}B'^{(1)}$ représentent deux demi-quadriques ayant pour support une quadrique $\Delta_{u,1}$ de Demoulin; les plans $A^{(1)}B^{(1)}B_1^{(1)}$, $A'^{(1)}B'^{(1)}B_1'^{(1)}$ représentent deux demi-quadriques ayant pour support la seconde quadrique $\Delta_{v,1}$ de Demoulin. Ces quadriques appartiennent à une suite

$$\ldots,\ \Delta^{(n)}_{u,1},\ \ldots,\ \Delta_{u,1},\ \Delta_{v,1},\ \ldots,\ \Delta^{(n)}_{v,1},\ \ldots. \tag{20}$$

On définit de même les suites de quadriques

$$\ldots,\ \Delta^{(n)}_{u,2},\ \ldots,\ \Delta_{u,2},\ \Delta_{v,2},\ \ldots,\ \Delta^{(n)}_{v,2},\ \ldots, \tag{21}$$

$$\ldots,\ \Delta^{(n)}_{u,3},\ \ldots,\ \Delta_{u,3},\ \Delta_{v,3},\ \ldots,\ \Delta^{(n)}_{v,3},\ \ldots. \tag{22}$$

Envisageons les quadriques $\Delta^{(n)}_{u,1}$, $\Delta^{(n)}_{u,2}$, $\Delta^{(n)}_{u,3}$. Les plans $A^{(1)}_{n-1}A^{(1)}_{n}A^{(1)}_{n+1}$, $A^{(2)}_{n-1}A^{(2)}_{n}A^{(2)}_{n+1}$, $A^{(3)}_{n-1}A^{(3)}_{n}A^{(3)}_{n+1}$ ont en commun la droite $C_{-n}C_{-n-1}$ et par suite les trois quadriques envisagées ont en commun deux droites $d$, $d'$. Mais ces deux droites appartiennent également aux deux quadriques $\Gamma_{-n}$, $\Gamma_{-n-1}$ qui correspondent respectivement aux plans $C_{-n+1}C_{-n}C_{-n-1}$ et $C_{-n}C_{-n-1}C_{-n-2}$. De plus, les points caractéristiques de ces deux quadriques appartiennent aux droites $d$, $d'$. On en conclut que les points caractéristiques de la quadrique $\Gamma_{-n}$ appartiennent quatre aux quadriques $\Delta^{(n)}_{u,1}$, $\Delta^{(n)}_{u,2}$, $\Delta^{(n)}_{u,3}$, quatre aux quadriques $\Delta^{(n-1)}_{u,1}$, $\Delta^{(n-1)}_{u,2}$, $\Delta^{(n-1)}_{u,3}$.

En particulier, les points caractéristiques de la quadrique $\Gamma$ appartiennent : quatre aux quadriques de Demoulin $\Delta_{u,1}$, $\Delta_{u,2}$, $\Delta_{u,3}$, quatre aux autres quadriques de Demoulin $\Delta_{v,1}$, $\Delta_{v,2}$, $\Delta_{v,3}$.

On établit sans difficulté la propriété analogue pour les quadriques $\Gamma_n$, en relation avec les quadriques $\Delta^{(n)}_{v,1}$, ...

Liége, le 22 juillet 1930.

M. HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique rue de Louvain, 112, Bruxelles.