Mathematics. — *Sur la congruence formée par les cubiques gauches ayant cinq bisécantes*, par LUCIEN GODEAUX (Liége). (Communicated by Prof. JAN DE VRIES).

(Communicated at the meeting of November 24, 1928).

M. J. DE VRIES a considéré dans une note récente [1]) la congruence linéaire formée par les cubiques gauches ayant cinq bisécantes fixes et en a donné une représentation plane. Nous nous proposons d'indiquer une représentation de cette congruence par le système des cordes d'une cubique gauche; cette représentation constitue une application d'un travail que nous avons publié autrefois [2]).

1. Commençons par considérer une courbe gauche C_6, d'ordre six et de genre trois, dans un espace Σ. Rapportons projectivement les ∞^3 surfaces cubiques F passant par C_6 aux plans d'un second espace Σ'. On sait que l'on obtient ainsi une transformation birationnelle T entre les espaces Σ, Σ' [3]). Aux plans de Σ correspondent des surfaces cubiques F' passant par une courbe C'_6 d'ordre six et de genre trois; aux droites de Σ correspondent des cubiques gauches Γ' de Σ' s'appuyant en huit points sur la courbe C'_6; de même, aux droites de Σ' correspondent des cubiques gauches Γ de Σ s'appuyant en huit points sur la courbe C_6.

Cela étant rappelé, considérons une droite a de Σ ne rencontrant pas C_6 et soit Γ' la cubique gauche qui lui correspond dans Σ'. Aux bisécantes de Γ' correspondent dans Σ des cubiques gauches Γ s'appuyant en huit points sur la sextique C_6 et en deux points sur a. Ces cubiques gauches Γ forment une congruence linéaire G.

Pour obtenir la classe de la congruence G, c'est-à-dire le nombre des cubiques gauches Γ de G ayant pour bisécante une droite d ne rencontrant ni a ni C_6, observons qu'à cette droite d correspond dans Σ' une cubique gauche Δ' et qu'aux cubiques Γ répondant à la question cor-

[1]) *The Congruence of the twisted cubics that cut five given lines twice* (These Proceedings, **31**, 1928, pp. 454—458).

[2]) *Nouveaux types de congruences linéaires de cubiques gauches* (Nouvelles Annales de Mathématique, 1909, 4e série, t. **9**). Citant cette note dans son ouvrage *Algèbre à deux dimensions*" (Gand, 1920), M. STUYVAERT écrit (p. 46) que, énumérant les types obtenus par ce procédé, j'en ai laissé échapper un assez remarquable. M. STUYVAERT ne donne aucun détail sur ce type remarquable, et pour cause! Le lecteur se rendra aisément compte que dans notre note, nous avons signalé tous les types généraux pouvant être obtenus par le procédé en question.

[3]) Voir par exemple CREMONA, *Sulle transformazioni razionali nello spazio* (Rend. R. Instituto Lombardo, 1871, et Annali di Matematica, 1871; Oeuvres complètes, t. III).

pondent les bisécantes communes des cubiques Γ', $\triangle'$. La classe de la congruence G est par suite égale à dix.

L'utilisation de la transformation T permet de poursuivre l'étude des propriétés de la congruence G. Par exemple, les cubiques gauches dégénérées de G correspondent aux bisécantes de Γ' s'appuyant sur la courbe C'_6. Si une telle droite ne passe pas par un des huit points d'appui de Γ' sur C'_6, il lui correspond une cubique Γ de G formée d'une trisécante de C_6 et d'une conique dont le plan passe par la droite a et qui s'appuie en cinq points sur C_6. Les bisécantes de Γ' s'appuyant sur C'_6 considérées forment une surface du huitième ordre passant quatre fois par Γ'; par suite les coniques dont les plans passant par a et qui s'appuient en cinq points sur C_6 forment une surface d'ordre seize passant quatre fois par la droite a et cinq fois par la courbe C_6.

A une corde de Γ' passant par un des huit points d'appui de cette courbe sur C'_6, correspond une cubique Γ de G formée d'une trisécante t de C_6 s'appuyant sur a et d'une conique s'appuyant en un point sur a, en un point sur t et en cinq points sur C_6. Le lieu de ces coniques est une surface du sixième ordre passant doublement par C_6 et par t, simplement par a.

2. Supposons maintenant que la courbe C_6 soit formée de quatre droites a_1, a_2, a_3, a_4 deux-à-deux gauches et des deux droites b_1, b_2 s'appuyant sur ces quatre droites. Alors la courbe C'_6 est également formée de quatre droites deux-à-deux gauches a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 et des deux droites b'_1, b'_2 s'appuyant sur ces quatre droites. On peut le montrer aisément de la manière suivante: Parmi les surfaces cubiques F passant par a_1, a_2. a_3, a_4, il y en a ∞^1, formant un faisceau, contenant comme partie la quadrique R_1 lieu des droites s'appuyant sur a_2, a_3, a_4 et complétées par un plan passant par a_1. A ces surfaces cubiques correspondent dans Σ' les plans d'un faisceau d'axe a'_1. Une surface cubique passant par

$$C_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b_1 + b_2$$

contient, outre ces cinq dernières droites, une génératrice de R_1. A cette surface correspond dans Σ' un plan rencontrant a'_1 en un point. Par suite, aux points de a'_1 correspondent les génératrices de la quadrique R_1. On établit de même l'existence des droites a'_2, a'_3, a'_4. Cela étant, deux surfaces cubiques par a_1, a_2, a_3, a_4 ont en commun les droites b_1, b_2 et une cubique gauche; par suite à un plan de Σ correspond dans Σ' une surface cubique passant par a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 et par b'_1, b'_2.

A une droite de Σ correspond dans Σ' une cubique gauche ayant pour bisécantes a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 et de même, à une droite de Σ' correspond dans Σ une cubique gauche ayant pour bisécantes les droites a_1, a_2, a_3, a_4.

Aux points de la droite b'_1 (ou b'_2) correspondent les points de la droite b_1 (ou b_2) et inversement.

Considérons une cubique gauche Γ' ayant a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 comme bisécantes et soit a la droite qui lui correspond dans Σ, cette droite ne rencontrant pas la courbe dégénérée C_6. Aux bisécantes de Γ' correspondent dans Σ des cubiques gauches Γ ayant comme bisécantes a_1, a_2, a_3, a_4, a, et formant une congruence linéaire G.

Comme dans le premier cas, la classe de la congruence G est égale au nombre des bisécantes communes à Γ' et à une seconde cubique gauche ayant également a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 comme bisécantes. Par suite, la classe de G est égale à six, car les droites a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 doivent être défalquées.

Occupons-nous encore des cubiques gauches dégénérées de la congruence G. Ces cubiques correspondent à des bisécantes de Γ' s'appuyant sur l'une des droites a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, b'_1, b'_2. Les cordes de Γ' satisfaisant à ces conditions forment dix surfaces se répartissant en deux catégories:

1°. surface lieu des cordes de Γ' s'appuyant sur b'_1 (ou sur b'_2); cette surface est du quatrième ordre, passe doublement par Γ', simplement par a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, b'_1 (ou b'_2), mais ne passe pas par b'_2 (ou par b'_1);

2°. cône projetant la courbe Γ' d'un de ses points d'appui sur l'une des droites a'_1, a'_2, a'_3, a'_4.

A une corde d' de Γ' s'appuyant sur b'_1 correspond dans Σ une cubique de G formée de la droite b_1 et d'une conique Δ dont le plan passe par a et qui s'appuie sur a_1, a_2, a_3, a_4, b_1. La surface engendrée par les coniques Δ fait partie de la surface que T fait correspondre au lieu des bisécantes de Γ' s'appuyant sur b'_1. Cette surface est d'ordre douze et comprend comme parties les quatre quadriques lieu des droites s'appuyant sur trois des droites a_1, a_2, a_3, a_4. Le lieu des coniques Δ est donc une surface du quatrième ordre passant doualement par la droite a, simplement par les droites a_1, a_2, a_3. a_4, b_1, b_2.

Considérons maintenant une corde f' de Γ' passant par un des points d'appui A' de cette cubique sur a'_1. A cette corde correspond une courbe de la congruence G décomposée en une droite a_{11} s'appuyant sur a_1, a_2, a_3, a_4 et en une conique Φ dont le plan passe par a_1 et qui s'appuie sur a_1, a_2, a_3, a_4, a_{11}. Au cône projetant Γ' du point A', T fait correspondre une surface du sixième ordre formée de la quadrique R_1 et d'une surface du quatrième ordre passant doublement par a_1, simplement par a_1, a_2, a_3, a_4, a_{11}, et par la seconde droite a_{12} s'appuyant sur a_1, a_2, a_3, a_4. Cette dernière surface est le lieu des coniques Φ.

En résumé, les cubiques gauches dégénérées en une droite et une conique, appartenant à la congruence G, sont formées d'une droite fixe s'appuyant sur quatre des droites a_1, a_2, a_3, a_4 et de coniques dont les plans passent par la cinquième droite. Le lieu de ces coniques est une surface du quatrième ordre passant doublement par cette cinquème droite, simplement par les quatre autres et par les deux droites s'appuyant sur celles-ci.

3. La méthode qui vient d'être développée se prête particulièrement

bien à l'étude des cas limites de la congruence G, par exemple lorsque certaines des droites a_1, a_2, a_3, a_4 sont infiniment voisines. Bornons-nous à signaler celui où ces quatre droites sont infiniment voisines. Les surfaces cubiques F passent alors par deux droites incidentes a_1, b, en se raccordant le long de b et en ayant entre elles un contact du troisième ordre en tout point de a_1. Les cubiques gauches de la congruence linéaire G ont alors deux bisécantes fixes b, a_1 et des contacts du troisième ordre avec les surfaces F en chacun de leurs points d'appui sur a_1. [1])

Liége, le 1er November 1928.

[1]) La transformation T obtenue dans ce cas a été étudiée récemment par M. LAIRESSE, dans une note en cours de publication dans les Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége.