ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XVI, no 6.
Séance du 7 juin 1930, pp. 762-774.

GÉOMÉTRIE. — **Sur les correspondances entre deux surfaces et sur une transformation birationnelle de l'espace,**

par L. GODEAUX, professeur à l'Université de Liége.

Considérons deux surfaces S, S′ liées par une correspondance ponctuelle. Soient M, M′ deux points homologues, ordinaires par les surfaces et tels que dans leur voisinage la correspondance soit biunivoque et continue.

Traçons sur la surface S une courbe C passant par M et pour laquelle ce point soit ordinaire; soit C′ la courbe décrite par le point homologue sur la surface S′.

Considérons la tangente t, le plan osculateur τ à la courbe C au point M et la sphère σ ayant un contact du troisième ordre avec la courbe C au point M. Soient t', τ', σ' les éléments analogues de la courbe C′ au point M′. Lorsque la courbe C varie en passant toujours par M sous les conditions énoncées, la courbe C′ varie sur S′ en passant toujours par M′ et les tangentes t, t' se correspondent dans une projectivité.

MM. Cech (1) et Bompiani (2) ont étudié la correspondance entre les plans osculateurs τ, τ'. Cette correspondance entre les gerbes de plans de sommets M, M′ est birationnelle et en général du troisième ordre, mais elle peut se réduire à une transformation quadratique et, dans le cas où les surfaces S, S′ sont projectivement applicables, à une homographie.

---

(1) CECH, Systèmes trilinéaires de lignes sur une surface et déformation projective des surfaces. (*Bulletin international de l'Académie tchèque des Sciences*, 1923, pp. 44-45.) Sur la correspondance générale de deux surfaces. (*Idem.*, p. 80.) Ces articles sont des résumés en français de mémoires parus en tchèque dans *Rozpravy Ceske Akademie*, 1921, t. XXX.

(2) BOMPIANI, Corrispondenza puntuale fra due superficie e rappresentazione conforme. (*Rendiconti R. Accad. Lincei*, 2e sem. 1923, pp. 376-380.) Proprietà generali della rappresentazione puntuale fra due superficie. (*Annali di Matematica*, 4e série, t. I, 1923-1924, pp. 259-284.)

On peut étudier de même la correspondance entre les sphères osculatrices σ, σ'. Il est naturel d'utiliser pour cette étude les coordonnées pentasphériques et l'on obtient une correspondance birationnelle du sixième ordre entre les systèmes linéaires ∞^3 de sphères passant par les points M, M'. L'introduction des coordonnées pentasphériques montre que la question étudiée est équivalente à la suivante : considérons deux surfaces S, S' d'un espace linéaire à quatre dimensions, liées par une correspondance ponctuelle biunivoque et continue dans le voisinage de deux points homologues M, M'. Etudions la correspondance entre les hyperplans ayant des contacts du troisième ordre en M, M', avec deux courbes homologues tracées sur S, S'. C'est cette étude que nous ferons ici.

1. Soient x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 les coordonnées ponctuelles projectives d'un point de l'espace à quatre dimensions. Considérons une surface S lieu d'un point M dont les coordonnées sont

$$x_i = x_i(u, v), \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

les seconds membres étant des fonctions effectives et différentiables des deux paramètres u, v.

Posons, pour abréger,

$$x^{ik} = \frac{\partial^{i+k} x}{\partial u^i \partial v^k}.$$

Les coordonnées des points de la surface S satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles, complètement intégrable,

$$\left.\begin{aligned}
x^{11} &= a x^{02} - b x^{20} + c x^{01} - d x^{10} + f x,\\
x^{30} &= a_1 x^{02} - b_1 x^{20} + c_1 x^{01} - d_1 x^{10} + f_1 x,\\
x^{21} &= a_2 x^{02} - b_2 x^{20} + c_2 x^{01} - d_2 x^{10} + f_2 x,\\
x^{12} &= a_3 x^{02} - b_3 x^{20} + c_3 x^{01} - d_3 x^{10} + f_3 x,\\
x^{03} &= a_4 x^{02} - b_4 x^{20} + c_4 x^{01} - d_4 x^{10} + f_4 x,
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

où a, b, c, ... sont des fonctions de u, v.

2. Considérons une courbe C d'équation

$$v = v(u)$$

tracée sur la surface S et soit M (u, v) un point de cette courbe, ordinaire pour la courbe et pour la surface. L'hyperplan ayant un contact du troisième ordre avec la courbe C au point M est déterminé par ce point et par les points

$$x^{10} + x^{01}v',$$

$$x^{20} + 2x^{11}v' + x^{02}v'^2 + x^{01}v'',$$

$$x^{30} + 3x^{21}v' + 3x^{12}v'^2 + x^{03}v'^3 + 3(x^{11} + x^{02}v')v'' + x^{01}v'''.$$

L'équation de cet hyperplan peut donc s'écrire

$$\begin{vmatrix} X \\ x \\ x^{10} + x^{01}v' \\ x^{20} + 2x^{11}v' + x^{02}v'^2 + x^{01}v'' \\ x^{30} + 3x^{21}v' + 3x^{12}v'^2 + x^{03}v'^3 + 3(x^{11} + x^{02}v')v'' + x^{01}v''' \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

où les X sont les coordonnées courantes et où le premier membre représente le déterminant à 25 éléments dont les cinq colonnes s'obtiennent en affectant successivement des indices 1, 2, ..., 5 les lettres X, x, x^{10}, ...

Dans l'équation (2), remplaçons x^{11}, x^{30}, ..., x^{03} par leurs expressions (1) et posons

$$\Phi_1 = \begin{vmatrix} X \\ x \\ x^{10} \\ x^{01} \\ x^{20} \end{vmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{vmatrix} X \\ x \\ x^{10} \\ x^{01} \\ x^{02} \end{vmatrix}, \quad \Phi_3 = \begin{vmatrix} X \\ x \\ x^{10} \\ x^{20} \\ x^{02} \end{vmatrix}, \quad \Phi_4 = \begin{vmatrix} X \\ x \\ x^{01} \\ x^{20} \\ x^{02} \end{vmatrix},$$

les seconds membres représentant des déterminants à 25 éléments.

L'équation (2) s'écrit

$$y_1\Phi_1 + y_2\Phi_2 + y_3\Phi_3 + y_4\Phi_4 = 0, \tag{3}$$

moyennant

$$\begin{aligned}
-\rho y_1 &= (2cv' + v'' + 2dv'^2)(B + 3bv'') + v'(1 - 2bv')(D + 3dv'') \\
&\quad + (1 - 2bv')(C + 3cv'' + v'''), \\
\rho y_2 &= (2cv' + v'' + 2dv'^2)(A + 3av'' + 3v'v'') - v'^2(v' + 2a)(D + 3dv'') \\
&\quad - v'(v' + 2a)(C + 3cv'' + v'''), \\
\rho y_3 &= (1 - 2bv')(A + 3av'' + 3v'v'') + v'(v' + 2a)(B + 3bv''), \\
\rho y_4 &= v'(1 - 2bv')(A + 3av'' + 3v'v'') + v'^2(v' + 2a)(B + 3bv''),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= a_1 + 3a_2v' + 3a_3v'^2 + a_4v'^3, \\
B &= b_1 + 3b_2v' + 3b_3v'^2 + b_4v'^3, \\
C &= c_1 + 3c_2v' + 3c_3v'^2 + c_4v'^3, \\
D &= d_1 + 3d_2v' + 3d_3v'^2 + d_4v'^3;
\end{aligned}$$

ρ est un facteur de proportionnalité.

3. Des formules précédentes, on peut tirer les expressions de v', v'', v''' en fonction de y_1, y_2, y_3, y_4. Posons

$$\begin{aligned}
a_y &= a_1y_3^3 + 3a_2y_3^2y_4 + 3a_3y_3y_4^2 + a_4y_4^3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
d_y &= d_1y_3^3 + \cdots \qquad + d_4y_4^3,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi_y &= ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4, \\
\psi_y &= y_1a_y + y_2b_y + y_3c_y + y_4d_y.
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\left.\begin{aligned}
y_3v' &= y_4, \\
y_3^3v'' &= y_2y_3^2 - y_1y_4^2 - 2y_3y_4\varphi_y, \\
y_3^5v''' &= -y_3\psi_y - 3(y_2y_3^2 - y_1y_4^2 - 2y_3y_4\varphi_y)(y_1y_4 + y_3\varphi_y).
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

4. Considérons maintenant une seconde surface S′, d'équations

$$x_i = x_i'(u, v), \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

et faisons sur cette surface les mêmes hypothèses que sur S. Les coordonnées de S' satisfont à un système analogue au système (1) et que nous écrirons en remplaçant a, b, ..., f_4 respectivement par a', b', ..., f'_4.

Supposons qu'il existe une correspondance ponctuelle entre les surfaces S, S' et soit M' le point qui correspond à M. On peut choisir les coordonnées curvilignes u, v de la surface S' de telle sorte que deux points homologues de S, S' aient les mêmes coordonnées u, v. Alors, deux courbes homologues C, C' seront représentées par la même équation

$$v = v(u).$$

Nous admettons que dans le voisinage des deux points homologues M, M', la correspondance entre les surfaces S, S' est biunivoque et continue.

Désignons par Φ'_1, Φ'_2, Φ'_3, Φ'_4 ce que deviennent les quantités Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 lorsqu'on passe à la surface S', de telle sorte que l'hyperplan ayant un contact du troisième ordre avec C' en M' s'écrive

$$z_1\Phi'_1 + z_2\Phi'_2 + z_3\Phi'_3 + z_4\Phi'_4 = 0. \tag{5}$$

On aura

$$\left.\begin{aligned} &z_3 v' = z_4, \\ &z_3^3 v'' = z_2 z_3^2 - z_1 z_4^2 - 2 z_3 z_4 \varphi'_z, \\ &z_3^5 v''' = -z_3 \psi'_z - 3\left(z_2 z_3^2 - z_1 z_4^2 - 2 z_3 z_4 \varphi'_z\right)\left(z_1 z_4 + z_3 \varphi'_z\right), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

où $\varphi'_z, \psi'_z, a'_z, b'_z, c'_z, d'_z$ sont ce que deviennent $\varphi_y, \psi_y, a_y, b_y, c_y, d_y$ lorsqu'on remplace $a, b, \ldots, f_4$ par $a', b', \ldots, f'_4$ et y_1, y_2, y_3, y_4 par z_1, z_2, z_3, z_4.

Les valeurs de v', v'', v''' aux points homologues M, M', pour deux courbes homologues C, C', sont égales. La correspondance entre les hyperplans (3) et (5) est donc donnée en égalant les valeurs de v', v'', v''' tirées des formules (4) et (6). On a ainsi

$$\left.\begin{aligned} y_3 z_4 &= y_4 z_3, \\ y_3^3 (z_2 z_3^2 - z_1 z_4^2 - 2 z_3 z_4 \varphi'_z) &= z_3^3 (y_2 y_3^2 - y_1 y_4^2 - 2 y_3 y_4 \varphi_y), \\ y_3^5 [z_3 \psi'_z + 3 (z_2 z_3^2 - z_1 z_4^2 - 2 z_3 z_4 \varphi'_z)(z_1 z_4 + z_3 \varphi'_2)] & \\ = z_3^5 [y_3 \psi_y + 3 (y_2 y_3^2 - y_1 y_4^2 - 2 y_3 y_4 \varphi_y)(y_1 y_4 + y_3 \varphi_y)]. & \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

D'après sa définition, la correspondance (7) est en général biunivoque; on voit de plus qu'elle est birationnelle.

5. Pour étudier la correspondance birationnelle (7), nous interpréterons les y et les z comme coordonnées ponctuelles des points de deux espaces ordinaires (y), (z).

Par la première des formules (7), les plans

$$y_4 = \lambda y_3, \qquad z_4 = \lambda z_3 \tag{8}$$

se correspondent et engendrent des faisceaux homographiques. Nous commencerons par étudier la correspondance birationnelle entre les plans (8). A cet effet, nous allons projeter ces plans sur les plans $y_4 = 0$, $z_4 = 0$ respectivement des sommets opposés des tétraèdres de référence.

Éliminons y_4, z_4 entre les équations (8) et les deux dernières des équations (7). En posant

$$\begin{aligned} \Omega &= y_2 - \lambda^2 y_1 - 2\lambda (a y_1 + b y_2 + c y_3 + d \lambda y_3), \\ \Omega' &= z_2 - \lambda^2 z_1 - 2\lambda (a' z_1 + b' z_2 + c' z_3 + d' \lambda z_3), \end{aligned}$$

on obtient

$$z_3 \Omega = y_3 \Omega', \tag{9}$$

$$y_3^2 [z_3 \psi' + 3 \Omega' (\lambda z_1 + \varphi')] = z_3^2 [y_3 \psi + 3 \Omega (\lambda y_1 + \varphi)], \tag{10}$$

où φ, ψ, φ', ψ' représentent ce que deviennent φ_y, ψ_y, φ'_z, ψ'_z divisés respectivement par y_3^0, y_3^3, z_3^0, z_3^3.

En utilisant (9), la relation (10) peut être remplacée par

$$y_3 \psi' + 3 (\lambda z_1 + \varphi') \Omega = z_3 \psi + 3 (\lambda y_1 + \varphi) \Omega'. \tag{11}$$

La relation (9) établit une projectivité entre les faisceaux

$$\Omega = \mu y_3, \qquad \Omega' = \mu z_3 \tag{12}$$

et la relation (11) est une réciprocité. La correspondance entre les plans (8) est donc en général quadratique.

Désignons par P, P' les sommets des faisceaux (12). Ces points ont pour coordonnées

$$P(1 - 2b\lambda, \lambda^2 + 2a\lambda, 0), \qquad P'(1 - 2b'\lambda, \lambda^2 + 2a'\lambda, 0).$$

Au point P, la réciprocité (11) fait correspondre la droite p' d'équation

$$[(1 - 2b\lambda)\, a_\lambda + \lambda(\lambda + 2a)\, b_\lambda]\, z_3 + 3(a + \lambda - b\lambda^2)\, \Omega' = 0, \tag{p'}$$

où l'on a posé

$$a_\lambda = a_1 + 3a_2\lambda + 3a_3\lambda^2 + a_4\lambda^3, \quad b_\lambda = b_1 + \cdots + b_4\lambda^3.$$

Au point P', (11) fait correspondre la droite p, d'équation

$$[(1 - 2b'\lambda)\, a'_\lambda + \lambda(\lambda + 2a')\, b'_\lambda]\, y_3 + 3(a' + \lambda - b'\lambda^2)\, \Omega = 0. \tag{p}$$

La droite p' passe par P' et la droite p par P.

A la droite p', l'homographie (9) fait correspondre la droite q, d'équation

$$[(1 - 2b\lambda)\, a_\lambda + \lambda(\lambda + 2a)\, b_\lambda]\, y_3 + 3(a + \lambda - b\lambda^2)\, \Omega = 0, \tag{9}$$

et à la droite p, la droite q' d'équation

$$[(1 - 2b'\lambda)\, a'_\lambda + \lambda(\lambda + 2a')\, b'_\lambda]\, z_3 + 3(a' + \lambda - b'\lambda^2)\, \Omega' = 0. \tag{9'}$$

Soient Q, Q' les points auxquels (11) fait correspondre respectivement q' et q. Le point Q appartient à p et le point Q' à p'.

Supposons tout d'abord que les droites p et q, et par suite p', q', soient distinctes, ce qui est le cas général. A une droite du plan $y_4 = 0$ correspond une conique γ' passant par les points P′, Q′ et touchant la droite q' au premier de ces points. En effet, aux points de la droite considérée a, (11) fait correspondre un faisceau de droite de sommet A′. Ce faisceau est projectif au faisceau de sommet P′ dont les rayons correspondent, par (9), aux droites projetant de P la ponctuelle a. De plus, au rayon A′P′ correspond la droite q'; d'où la propriété énoncée.

De même, aux droites du plan $z_4 = 0$, la transformation (7) fait correspondre des coniques γ passant par P, Q et touchant la droite q en P.

6. Supposons maintenant que les droites p, q coïncident. Il en est de même de p', q' et l'on doit avoir

$$\left.\begin{aligned} &(a' + \lambda - b'\lambda^2)\left[(1 - 2b'\lambda)\, a_\lambda + \lambda\,(\lambda + 2a)\, b'_\lambda\right] \\ &= (a + \lambda - b\lambda^2)\left[(1 - 2b'\lambda)\, a'_\lambda + \lambda\,(\lambda + 2a')\, b'_\lambda\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Cette relation étant du septième degré en λ, il existe sept couples de plans (8) pour lesquels les droites p et q coïncident, ainsi que les droites p', q'. Nous désignerons les droites ainsi obtenues par $p_1, p_2, \ldots, p_7$ et $p'_1, p'_2, \ldots, p'_7$.

Soient λ_1 une solution de l'équation (13), ϖ_1, ϖ'_1 les plans (8) correspondant, p_1, p'_1 les droites p, p' de ces plans. Entre les plans ϖ_1, ϖ'_1, la correspondance (7) établit une homographie ou, mieux, elle fait correspondre à une droite de ϖ_1 (ou ϖ'_1) une conique de ϖ'_1 (ou ϖ_1) formée de la droite p'_1 (ou p_1) et d'une droite variable. A un point quelconque de p_1, (7) fait correspondre tous les points de p'_1, et inversement. Il en résulte que les couples de droites p_1 et p'_1, p_2 et p'_2, ..., p_7 et p'_7 sont des couples de courbes fondamentales de seconde espèce de la transformation (7).

7. Les équations de la correspondance entre les plans (8), c'est-à-dire les équations (9) et (11), résolues par rapport à y_1, y_2, y_3, donnent

$$\left.\begin{aligned}
\rho y_1 &= 3b\Omega'^2 - 3(1-2b\lambda)(\lambda z_1+\varphi')\Omega' + (b_\lambda - 3c - 3\lambda d) z_3\Omega' \\
&\quad + [(2b\lambda-1)(c_\lambda+\lambda d_\lambda) - 2\lambda(c+\lambda d)b_\lambda] z_3^2 - (2b\lambda-1) z_3\psi', \\
\rho y_2 &= -3(a+\lambda)\Omega'^2 - 3\lambda(\lambda+2a)(\lambda z_1+\varphi')\Omega' \\
&\quad - (a_\lambda - 3c\lambda^2 - 3d\lambda^3) z_3\Omega' \\
&\quad - 4[\lambda(\lambda+2a)(c_\lambda+\lambda d_\lambda) - 2\lambda(c+d\lambda)a_\lambda] z_3^2 \\
&\quad + \lambda(\lambda+2a) z_3\psi',
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$$\rho y_3 = z_3[\{(1-2b\lambda)a_\lambda + \lambda(\lambda+2a)b_\lambda\} z_3 + 3(a+\lambda-b\lambda^2)\Omega']. \quad (14')$$

En posant, dans ces équations, $\lambda = \frac{y_3}{y_4} = \frac{z_3}{z_4}$, on obtiendra les équations de la correspondance (7), résolues par rapport à y_1, y_2, y_3, y_4. En posant

$$\Omega'_z = z_2 z_3^2 - z_1 z_4^2 - 2 z_3 z_4 \varphi'_z,$$

on obtiendra ainsi, après réduction

$$\left.\begin{aligned}
\rho' y_1 &= [-3z_3^2\varphi'_z + 3b(z_1z_4^2 + z_2z_3^2) - 3z_1z_3z_4 - 3z_3^2(cz_3+dz_4) + b_z]\Omega'_z \\
&\quad - z_3[(z_3-2bz_4)(z_3c_z+z_4d_z) + 2z_4(cz_3+dz_4)b_z] \\
&\quad + z_3(z_3-2bz_4)\psi'_z, \\
\rho' y_2 &= [3z_4^2\varphi'_z - 3a(z_1z_4^2+z_2z_3^2) - 3z_2z_3z_4 + 3z_4^2(cz_3+dz_4) - a_z]\Omega'_z \\
&\quad - z_4[(2az_3+z_4)(z_3c_z+z_4d_z) - 2z_3(cz_3+dz_4)a_z] + z_4(2az_3+z_4)\psi'_z, \\
\rho' y_3 &= z_3[z_3(z_3-2bz_4)a_z + z_4(2az_3+z_4)b_z + 3(az_3^2+z_3z_4-bz_4^2)\Omega'_z], \\
\rho' y_4 &= z_4[z_3(z_3-2bz_4)a_z + z_1(2az_3+z_4)b_z + 3(az_3^2+z_3z_4-bz_4^2)\Omega'_z].
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

On voit que la transformation (7) fait correspondre aux plans de l'espace (y) des surfaces du sixième ordre de l'espace (z). Cette transformation est d'ailleurs symétrique.

8. Désignons par F′ la surface qui correspond, par les formules (15), au plan

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 y_4 = 0.$$

Les surfaces

$$\Omega'_z = 0, \qquad \psi'_z = 0$$

sont respectivement du troisième et du quatrième ordre et passent la première deux fois, la seconde trois fois par la droite $z_3 = z_4 = 0$. Par suite la surface F', du sixième ordre, passe quatre fois par cette droite.

La surface F' est tangente, le long de la droite $z_3 = z_4 = 0$, aux surfaces

$$\Omega'_z = 0,$$
$$\alpha_1 [b(z_1 z_4^2 + z_2 z_3^2) - z_1 z_3 z_4] - \alpha_2 [a(z_1 z_4^2 + z_2 z_3^2) + z_2 z_3 z_4] = 0.$$

En un point de cette droite, les surfaces F' qui correspondent aux plans de l'espace (y) ont donc deux plans tangents fixes et deux plans tangents variables.

Les surfaces F' contiennent les sept droites fondamentales de seconde espèce $p'_1, p'_2, \ldots, p'_7$. Elles contiennent également la courbe fondamentale Γ', lieu du point Q'.

Le point Q' appartenant à la droite p', la courbe Γ' appartient à la surface

$$z_3(z_3 - 2bz_4)\, a_z + z_4(2az_3 + z_4)\, b_z + 3(az_3^2 + z_3 z_4 - bz_4^2)\, \Omega'_z = 0, \quad (16)$$

lieu de cette droite.

Observons que, dans la correspondance entre les plans (8), la droite p' est la droite fondamentale associée au point P; par suite la surface (16) est la surface fondamentale associée à la droite fondamentale $y_3 = y_4 = 0$. Il en résulte que les surfaces F' ne peuvent rencontrer la surface (10) qu'en des points fondamentaux fixes et suivant la courbe qui correspond à un point de la droite $y_3 = y_4 = 0$. Or, les coordonnées du point P sont du second degré en λ; par suite un point de la droite $y_3 = y_4 = 0$ est un point P pour deux plans passant par cette droite. Il en résulte qu'à un point de la droite $y_3 = y_4 = 0$ correspondent deux droites de la surface (11).

La surface (16) est du cinquième ordre, passe quatre fois par la droite $z_3 = z_4 = 0$ et touche la surface $\Omega'_z = 0$ le long de cette droite. De plus, la surface (16) contient les droites p'_1, $p'_2, \ldots, p'_7$. Si l'on envisage l'intersection de la surface (16) et d'une surface F'_1 on trouve que Γ' a au plus l'ordre trois. D'autre part, si n est l'ordre de Γ', cette courbe s'appuie en $n - 1$ points sur la droite $z_3 = z_4 = 0$. Ces points d'appui sont donnés par les droites p' qui coïncident avec $z_3 = 0$, c'est-à-dire par

$$a + \lambda - b\lambda^2 = 0.$$

Ils sont donc au nombre de deux et l'on a $n - 1 = 2$. La courbe Γ' est une cubique gauche.

9. Dans la correspondance entre les plans (8), q' est la droite fondamentale associée au point Q. Le lieu de ce point est une cubique gauche Γ s'appuyant en deux points sur la droite $y_3 = y_4 = 0$. La surface fondamentale associée à la courbe fondamentale Γ est le lieu de la droite q', surface d'équation

$$z_3(z_3 - 2b'z_4)\, a'_z + z_4(2a'z_3 + z_4)\, b'_z + 3(a'z_3^2 + z_3z_4 - b'z_4^2)\,\Omega'_z = 0. \quad (17)$$

La surface (17), du cinquième ordre, passe quatre fois par la droite $z_3 = z_4 = 0$ et touche la surface $\Omega'_z = 0$ le long de cette droite.

Les surfaces (16) et (17) ne peuvent se rencontrer en dehors des courbes fondamentales de la transformation (7); elles ont effectivement en commun la droite $z_3 = z_4 = 0$, quadruple pour les deux surfaces, le long de laquelle deux nappes de ces surfaces se touchent, et les sept droites p'_1, $p'_2, \ldots, p'_7$.

Examinons maintenant l'intersection de la surface (17) et d'une surface F', homologue d'un plan ϖ de l'espace (y). Cette intersection ne peut comprendre que la droite $z_3 = z_4 = 0$, les sept droites fondamentales p'_1, $p'_2, \ldots, p'_7$ et les trois droites qui correspondent aux intersections de la courbe Γ et du plan ϖ. Considérons un point de la droite $z_3 = z_4 = 0$; comme on l'a vu plus haut, ce point est le point P' relatif à deux plans ϖ'_1, ϖ'_2 passant par la droite $z_3 = z_4 = 0$. Le plan ϖ'_1 coupe la surface (17) suivant une droite q' passant par P' et la surface F' suivant une conique γ' passant également par P'. Les deux surfaces touchent donc ϖ'_1 en P'. Mais de plus, la conique γ' touche la droite q' au point P'; entre les deux nappes des surfaces considérées tangentes à ϖ'_1 en P', il doit donc y avoir contact du second ordre. On peut faire le même raisonnement pour les nappes tangentes en P' à ϖ'_2 et par suite, le long de la droite $z_3 = z_4 = 0$, deux nappes d'une surface F' ont des contacts du second ordre avec deux nappes de la surface (17). Dans l'intersection de ces surfaces, la droite $z_3 = z_4 = 0$ compte donc pour vingt unités. Le restant de l'intersection comprend les dix droites citées plus haut.

Envisageons enfin l'intersection de deux surfaces F'. Ces deux surfaces ont, d'après ce qui précède, deux nappes osculatrices à la surface (17) le long de la droite $z_3 = z_4 = 0$, et par conséquent, cette droite compte pour vingt unités dans l'intersection des deux surfaces. L'intersection des deux surfaces est complétée par la cubique gauche Γ', les sept droites $p'_1, p'_2, \ldots, p'_7$ et par une courbe d'ordre six que la transformation (7) fait correspondre à une droite de l'espace (y).

Les propriétés de la transformation (7) sont d'ailleurs symétriques, comme on l'a déjà fait remarquer.

10. Les seules surfaces fondamentales de la transformation (7) dans l'espace (z) sont les surfaces (16) et (17). A une droite de l'espace (z) correspond, dans l'espace (y), une courbe du sixième ordre C_6 s'appuyant en cinq points sur la cubique gauche Γ, associée à la surface (17), et en cinq points sur la droite $y_3 = y_4 = 0$, associée à la surface (16).

Les surfaces F qui correspondent dans l'espace (y) aux plans de l'espace (z) ont deux de leurs nappes ayant un contact du second ordre le long de la droite $y_3 = y_4 = 0$ avec la surface

$$y_3(y_3 - 2by_4)a_y + y_4(2ay_3 + y_4)b_y + 3(ay_3^2 + y_3y_4 - by_4^2)\Omega_y = 0, \quad (18)$$

lieu de la droite q. Par suite, les courbes C_6 ont également un contact du second ordre avec la surface (18) en chacun de leurs points d'appui sur cette droite.

De ce qui précède, on déduit que la jacobienne du système homaloïdal $|F|$, qui est d'ordre vingt, est formée de la surface (16), comptée trois fois, et de la surface (17), comptée une fois.

11. La transformation (7) ou (15) étant connue, retournons à l'interprétation primitive des quantités y et z. Les formules (7) établissent une correspondance entre les gerbes d'hyperplans de sommets M, M′ de l'espace à quatre dimensions contenant les surfaces S, S′. Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si, dans un espace à quatre dimensions, il existe une correspondance entre deux surfaces S, S′ *qui soit biunivoque et continue dans le voisinage de deux points homologues* M, M′, *il y a une correspondance birationnelle entre les hyperplans ayant en* M, M′ *des contacts du troisième ordre avec des courbes homologues tracées sur les surfaces* S, S′.

Aux hyperplans passant par une droite issue de M, *correspondent des hyperplans passant par* M′ *enveloppant un cône de sixième classe et réciproquement. Les cônes de sixième classe ainsi obtenus ont en commun un plan quadruple passant par* M′, *un cône réglé de troisième classe de sommet* M′ *et sept plans passant par* M′.

Lorsqu'on envisage la correspondance en coordonnées pentasphériques, il suffit de supposer que les surfaces S, S′ sont tracées sur l'hyperquadrique

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0.$$

M. HAYEZ imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112 Bruxelles.