ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XV, no 11.
Séance du 9 novembre 1929, pp. 943-958.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE.

Sur les quadriques de Lie de certaines surfaces,

par LUCIEN GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liége.

Dans un premier paragraphe, nous considérons les quadriques de Lie de deux surfaces qui se correspondent dans une transformation de Guichard et nous retrouvons un théorème dû à M. Demoulin. Nous étendons en partie ce théorème aux quadriques Φ_i que nous avons attachées récemment aux points d'une surface.

Dans un second paragraphe, nous considérons l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface et les quadriques de Lie de cette enveloppe. Nous obtenons ainsi un résultat symétrique par rapport aux surfaces considérées.

§ 1.

1. Soient (x), $(\bar{x})$ deux surfaces non réglées, qui se correspondent dans une transformation de Guichard, c'est-à-dire qui sont les nappes focales d'une congruence W engendrée par la droite $x\,\bar{x}$.

Désignons par u, v les paramètres des asymptotiques sur les surfaces (x), (x) et considérons la représentation des tangentes à ces surfaces sur une hyperquadrique Q d'un espace linéaire à cinq dimensions (*). Soient U, V les points de Q qui repré-

(*) Cette représentation a été utilisée par MM. Bompiani et Tzitzeica, puis par nous-même dans des notes parues dans les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique,* 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-41, 158-186, 335-345, 345-348, 455-467; 1929, 37-53. 126-133, 698-706.

sentent les tangentes à la surface (x) aux asymptotiques u, v (c'est-à-dire $v = c^{te}$, $u = c^{te}$); $\bar{U}$, $\bar{V}$ les points de Q qui représentent les tangentes aux asymptotiques u, v de la surface $(\bar{x})$. Les surfaces (U), (V) sont consécutives dans une suite de Laplace, deux points U, V homologues représentant des tangentes en un même point de la surface (x).

Dans l'espace à cinq dimensions contenant Q, nous avons deux suites de Laplace que nous représenterons par

$$\ldots,\ U_i,\ \ldots,\ U_1,\ U,\ V,\ V_1,\ \ldots,\ V_i,\ \ldots; \tag{1}$$

$$\ldots,\ \bar{U}_i,\ \ldots,\ \bar{U}_1,\ \bar{U},\ \bar{V},\ \bar{V}_1,\ \ldots,\ \bar{V}_i,\ \ldots, \tag{2}$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u.

Les points U_1, V_1 $\bar{U}_1$, $\bar{V}_1$ ne peuvent appartenir à l'hyperquadrique Q.

Représentons par J le point de l'hyperquadrique Q image de la droite $x\,\bar{x}$. Les points de la droite U V représentant les tangentes en un point x à la surface (x), le point J appartient à cette droite. De même le point J appartient à la droite $\bar{U}\,\bar{V}$ (*).

La droite $x\,\bar{x}$ engendrant une congruence W, les coordonnées du point J satisfont à une équation de Laplace, d'après un théorème classique de Darboux. De plus, d'après un théorème de M. Demoulin (**), le point J engendre un réseau (J) conjugué aux congruences (U V), $(\bar{U}\,\bar{V})$. Il en résulte que le point J détermine une suite de Laplace inscrite à la fois dans les suites (1), (2). Nous désignerons par

$$\ldots,\ J_i,\ \ldots,\ J_1,\ J,\ J_{-1},\ \ldots,\ J_{-i},\ \ldots \tag{3}$$

cette suite de Laplace, chaque terme étant le transformé du

(*) Cf. Tzitzeica, Géométrie différentielle projective des réseaux (Paris, 1924).
(**) A. Demoulin, Sur les surfaces R (*C. R.*, 1911, t. 153, pp. 707-799).

précédent dans le sens de u (*). Le point J_1 appartient donc aux droites $U\,U_1$, $\overline{U}\,\overline{U}_1$ et, plus généralement, le point J_i appartient aux droites $U_{i-1}\,U_i$, $\overline{U}_{i-1}\,\overline{U}_i$, le point J_{-i} aux droites $V_{i-1}\,V_i$, $\overline{V}_{i-1}\,\overline{V}_i$.

2. Désignons par Φ, $\overline{\Phi}$ les quadriques de Lie des surfaces (x), $(\overline{x})$ en deux points homologues x, $\overline{x}$. Les génératrices rectilignes d'un mode de la quadrique Φ sont représentées par la conique section de Q par le plan $U\,U_1\,U_2$; celle de l'autre mode par la section de Q par le plan $V\,V_1\,V_2$. De même, les génératrices rectilignes de la quadrique $\overline{\Phi}$ sont représentées par les sections de Q par les plans $\overline{U\,U_1\,U_2}$, $\overline{V}\,\overline{V}_1\,\overline{V}_2$. Les plans $U\,U_1\,U_2$ et $\overline{U}\,\overline{U}_1\,\overline{U}_2$ ont en commun la droite $J_1\,J_2$ et les points de rencontre de cette droite avec Q représentent deux droites communes aux quadriques Φ, $\overline{\Phi}$. De même, les plans $V\,V_1\,V_2$ et $\overline{V}\,\overline{V}_1\,\overline{V}_2$ ont en commun la droite $J_{-1}\,J_{-2}$ et les points de rencontre de cette droite avec Q représentent deux droites communes aux quadriques Φ, $\overline{\Phi}$.

On en conclut que les quadratiques Φ, $\overline{\Phi}$ se touchent en quatre points.

3. Les droites du complexe linéaire osculateur à la congruence W engendrée par la droite $x\,\overline{x}$ le long d'une de ces droites sont représentées par les points de Q appartenant à l'espace $J_2\,J_1\,J\,J_{-1}\,J_{-2}$. Soit P le pôle de cet hyperplan par rapport à Q. On sait que le point P engendre une suite de Laplace que nous désignerons par

$$\ldots,\ P_i,\ \ldots,\ P_1,\ P,\ P_{-1},\ \ldots,\ P_{-i},\ \ldots, \tag{4}$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u. Le point P_i est le pôle de l'hyperplan

(*) Au sujet de cette suite, voir notre note Sur quelques familles de quadriques attachées aux points d'une surface (*Annales de la Soc. polonaise de Math.*, 1928, t. VIII, pp. 213-226).

*

$J_{-i+2}\, J_{-i+1}\, J_{-i}\, J_{-i-1}\, J_{-i-2}$ et le point P_{-i}, celui de l'hyperplan $J_{i-2}\, J_{i-1}\, J_{-i}\, J_{i+1}\, J_{i+2}$.

La suite (4) est circonscrite aux suites polaires par rapport à Q des suites (1), (2). Or, chacune de ces suites est autopolaire par rapport à Q ; donc la suite (4) est circonscrite aux suites (1), (2). Le point P est donc l'intersection des droites $U\bar{U}$ et $V\bar{V}$, le point P_1 l'intersection des droites $U\bar{U}$ et $U_1\bar{U}_1$, le point P_{-1} l'intersection des droites $V\bar{V}$ et $V_1\bar{V}_1$, etc.

Soit S_3 l'espace à trois dimensions déterminé par les points U, U_1, U_2, $\bar{U}$. Il contient en outre les points $\bar{U}_1$, $\bar{U}_2$, P, P_1, P_2 et coupe l'hyperplan $J_2\, J_1\, J\, J_{-1}\, J_{-2}$ suivant un plan ϖ passant par $J_1\, J_2$. L'espace S_3 coupe Q suivant une quadrique Q' non dégénérée. L'homologie harmonique de S_3 de centre P et de plan ϖ transforme la quadrique Q' en elle-même, car par hypothèse le point de rencontre de ϖ et de la droite $U\bar{U}$ est le conjugué harmonique de P par rapport à U, $\bar{U}$. De plus, les plans $U\, U_1\, U_2$, $U\, \bar{U}_1\, \bar{U}_2$ se correspondent dans cette homologie.

De même, si l'on considère l'espace linéaire S'_3 à trois dimensions déterminé par V, V_1, V_2, $\bar{V}$, l'homologie harmonique ayant pour centre P et pour plan la section de S'_3 par l'hyperplan $J_2\, J_1\, J\, J_{-1}\, J_{-2}$ échange entre eux les plans $V\, V_1\, V_2$, $\bar{V}\, \bar{V}_1\, \bar{V}_2$ et transforme en elle-même la section de Q par S'_3.

Cela étant, considérons, dans l'espace linéaire à cinq dimensions contenant Q, l'homologie harmonique du centre P et d'hyperplan $J_2 J_1\, J J_{-1}\, J_{-2}$. L'hyperquadrique Q est transformée en elle-même par cette homologie et deux points homologues de Q représentent deux droites polaires par rapport au complexe linéaire osculateur à la congruence $(x\bar{x})$ le long de la droite $x\bar{x}$. Les plans $\bar{U}\,\bar{U}_1\, \bar{U}_2$, $\bar{V}\,\bar{V}_1\, \bar{V}_2$ correspondent respectivement aux plans $U U_1\, U_2$, $V V_1\, V_2$; par suite, les quadriques Φ, $\bar{\Phi}$ sont polaires réciproques par rapport au complexe linéaire osculateur considéré.

Nous parvenons ainsi au théorème suivant, dû à **M. A.** Demoulin (*) :

Si deux surfaces (x) *et* ($\bar{x}$) *se correspondent dans une transformation de Guichard, les quadriques de Lie relatives à ces surfaces en deux points homologues* x, $\bar{x}$ *ont en commun quatre droites; elles sont polaires réciproques par rapport au complexe linéaire osculateur à la congruence* ($x\bar{x}$) *le long de la droite* $x\bar{x}$.

4. Nous avons montré (**) que les plans $U_i U_{i+1} U_{i+2}$, $V_i V_{i+1} V_{i+2}$ coupent Q suivant deux coniques images de deux demi-quadriques ayant le même support Φ_i. De même les plans $\bar{U}_i \bar{U}_{i+1} \bar{U}_{i+2}$, $\bar{V}_i \bar{V}_{i+1} \bar{V}_{i+2}$ représentent une quadrique $\bar{\Phi}_i$. Les plans $U_i U_{i+1} U_{i+2}$, $\bar{U}_i \bar{U}_{i+1} \bar{U}_{i+2}$ se coupent suivant la droite $J_{i+1} J_{i+2}$ et les points de rencontre de cette droite avec Q représentent deux droites communes aux quadriques Φ_i $\bar{\Phi}_i$. De même, les points de rencontre de Q de la droite $J_{-i-1} J_{-i-2}$ représentent deux droites communes à ces quadriques. Par suite, *les quadriques* Φ_i *relatives à deux points homologues de deux surfaces se correspondant dans une transformation de Guichard se coupent suivant quatre droites.*

§ 2.

5. Soient (x) une surface non réglée, u, v les paramètres de ses asymptotiques. Les quadriques de Lie de la surface (x) ont en général cinq points caractéristiques dont l'un est le point x (***). Soit $\bar{x}$ un point caractéristique distinct de x et supposons que les paramètres des asymptotiques de la sur

(*) Sur la transformation de Guichard et sur les systèmes K (*Bull. de l'Acad roy. de Belgique*, 1919, pp. 110-112).

(**) Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1927, pp. 812-826).

(***) Voir A. Demoulin, Sur la quadrique de Lie (*C. R.*, 1908, t. 147, pp. 493-49 face $(\bar{x})$ soient également u, v. Considérons les quadriques de Lie $\bar{\Phi}$ de la surface $(\bar{x})$. Nous allons montrer que les quadriques ont le même nombre de points caractéristiques que les quadriques Φ et que le point x est un de ceux-ci.

Nous adopterons les mêmes notations que dans le paragraphe 1, c'est-à-dire que, considérant la représentation des tangentes aux surfaces (x), $(\bar{x})$ sur l'hyperquadrique Q, nous désignerons par

$$\ldots,\ U_i,\ \ldots,\ U_1,\ U,\ V,\ V_1,\ \ldots,\ V_i,\ \ldots, \tag{5}$$

$$\ldots,\ \bar{U}_i,\ \ldots,\ \bar{U}_1,\ \bar{U},\ \bar{V},\ \bar{V}_1,\ \ldots,\ \bar{V}_i,\ \ldots \tag{6}$$

les séries de Laplace liées aux surfaces (x), $(\bar{x})$; mais il est évident que ces séries ne jouissent pas des mêmes propriétés que les séries (1), (2). Nous désignerons par Φ et $\bar{\Phi}$ les quadriques de Lie des surfaces (x), $(\bar{x})$.

6. Rappelons tout d'abord rapidement les propriétés connues dans le cas où les quadriques de Lie Φ de (x) n'ont que deux points caractéristiques (*). Alors les points $\bar{U}$, $\bar{V}$ coïncident respectivement avec les points V_2, U_2. Les points $\bar{U}_1$, $\bar{V}_1$, $\bar{U}_2$, $\bar{V}_2$ coïncident respectivement avec les points V_1, U_1, V, U. Les plans $U\,U_1\,U_2$, $V\,V_1\,V_2$ coïncident respectivement avec les plans $\bar{V}\,\bar{V}_1\,\bar{V}_2$, $\bar{U}\,\bar{U}_1\,\bar{U}_2$ et, par suite, les quadriques de Lie Φ, $\bar{\Phi}$ coïncident. Les suites (5), (6) coïncident en une suite de période six.

7. Passons au cas où les quadriques de Lie Φ ont trois points caractéristiques. Il y a alors conservation des asympto-

(*) A. Demoulin, Sur la quadrique de Lie (*loc. cit.*). Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques (*C. R.*, 1924, t. 179, pp. 20-23). — L. Godeaux, Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique,* 1928, pp. 158-186, 345-348).

tiques sur les nappes de l'enveloppe des quadriques Φ (*). Une seule des droites $U_1 U_2$, $V_1 V_2$ touche l'hyperquadrique Q. Supposons que ce soit la droite $U_1 U_2$. Le point U_2 appartient à Q et si D est un point de rencontre de Q et de la droite $V_1 V_2$, la droite $U_2 D$ appartient à Q et représente le faisceau de rayons ayant pour sommet un point caractéristique $\bar{x}$ de la quadrique Φ et pour plan, le plan tangent à la fois à cette quadrique et à la surface $(\bar{x})$ (**). De plus, le point $\bar{U}$ coïncide avec le point D et le point $\bar{V}$ est un point de la droite $D U_2$ distinct de U_2 et de D.

Le réseau $(\bar{U})$ est conjugué à la congruence $(V_1 V_2)$ et par conséquent la suite de Laplace (6) est inscrite dans la suite (5). Le point $\bar{U}_1$ appartient à la droite $V V_1$, le point $\bar{U}_2$ à la droite $U V$, le point $\bar{U}_3$ à la droite $U U_1$, ..., le point $\bar{V}$ à la droite $V_2 V_3$, etc.

Le réseau (U_2) est conjugué à la congruence $(\bar{U} \bar{V})$ et par conséquent la suite (5) est à son tour inscrite dans la suite (6). Le point U_1 appartient à la droite $\bar{V} \bar{V}_1$, le point U à la droite $\bar{V}_1 \bar{V}_2$, le point V à la droite $\bar{V}_2 \bar{V}_3$, ..., le point U_3 à la droite $\bar{U} \bar{U}_1$, etc.

Le point $\bar{U}_1$ ne pouvant appartenir à Q et le point $\bar{U}_2$ appartenant à cette hyperquadrique, la droite $\bar{U}_1 \bar{U}_2$ touche Q en $\bar{U}_2$.

La quadrique de Lie $\bar{\Phi}$ est représentée par les plans $\bar{U} \bar{U}_1 \bar{U}_2$ et $\bar{V} \bar{V}_1 \bar{V}_2$. Les points caractéristiques de cette quadrique ou, mieux, les faisceaux des tangentes à cette quadrique aux points caractéristiques sont représentés sur Q par les droites $\bar{U} \bar{V}$ et et par les droites joignant $\bar{U}_2$ aux points de rencontre de Q avec la droite $\bar{V}_1 \bar{V}_2$. Si la droite $\bar{V}_1 \bar{V}_2$ était tangente à l'hyperquadrique Q, les quadriques $\bar{\Phi}$ n'auraient que deux points caractéristiques et coïncideraient avec les quadriques Φ, con-

(*) A. Demoulin, Sur la quadrique de Lie (*loc. cit.*).

(**) L. Godeaux, Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que troi points caractéristiques (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1929, pp. 26-41).

trairement à l'hypothèse. Il en résulte que les quadriques $\overline{\Phi}$ ont trois points caractéristiques dont l'un est le point x.

Si les quadriques de Lie d'une surface (x) *n'ont que trois points caractéristiques et si* $\overline{\mathrm{x}}$ *est l'un de ceux-ci, distinct de* x, *les quadriques de Lie de la surface* $(\overline{\mathrm{x}})$ *ont trois points caractéristiques dont l'un est le point* x.

Observons que les plans $U\,U_1\,U_2$ et $\overline{V}\,\overline{V}_1\,\overline{V}_2$ ont en commun la droite $U\,U_1$, tangente en U à l'hyperquadrique Q. De même es plans $V\,V_1\,V_2$, $\overline{U}\,\overline{U}_1\,\overline{U}_2$ ont en commun la droite $\overline{U}\,\overline{U}_1$ tangente en $\overline{U}$ à Q. Par suite les quadriques Φ, $\overline{\Phi}$ se raccordent le long des tangentes aux asymptotiques u des surfaces (x), $(\overline{x})$.

8. Envisageons le cas où les quadriques de Lie Φ ont cinq points caractéristiques. Alors les droites $U_1\,U_2$, $V_1\,V_2$ ne peuvent être tangentes à l'hyperquadrique Q. Soient D_1 un point de la première droite, D_2 un de la seconde, appartenant à Q. La droite $D_1\,D_2$ appartient à Q et représente le faisceau des tangentes à la quadrique Φ en un point caractéristique $\overline{x}$ de celle-ci.

Pour que les asymptotiques se correspondent sur les surfaces (x) et $(\overline{x})$, il faut et il suffit que les réseaux (D_1), (D_2) soient respectivement conjugués aux congruences $(U_1\,U_2)$, $(V_1\,V_2)$ (*). Les points $\overline{U}$, $\overline{V}$ appartiennent à la droite $(D_1\,D_2)$ et sont distincts de ces points. Les réseaux (D_1), $D_2)$ sont conjugués à la congruence $(\overline{U}\,\overline{V})$.

Le point D_1 détermine une suite de Laplace inscrite à la fois dans les suites (5), (6). Soient D_1', D_1'' les deux premiers transformés de Laplace de D_1 dans le sens des u. Le point D_1 appartient aux droites $U\,U_1$ et $\overline{V}\,\overline{V}_1$, le point D_1'' aux droites $U\,V$ et $\overline{V}_1\,\overline{V}_2$. Cette dernière droite ne peut être tangente à l'hyper-

(*) L. Godeaux, Sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface (*Bull de l'Acad. roy. de Belgique*, 1929, pp. 37-53. — Remarques sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface (*Idem*, pp. 698-706).

quadrique Q, car alors les quadriques de Lie $\overline{\Phi}$ auraient moins de cinq points caractéristiques et précisément deux ou trois. D'après ce qui a été vu plus haut, il en serait de même des quadriques Φ, contrairement à l'hypothèse.

On trouve de même que les droites VV_1 et $\overline{U}\,\overline{U}_1$ ont en commun un point D_2' et les droites UV, $\overline{U}_1\overline{U}_2$ un point D_2'', ces points D_2', D_2'' étant les deux premiers transformés de Laplace de D_2 dans le sens des v. De plus, la droite $\overline{U}_1\overline{U}_2$ ne peut toucher l'hyperquadrique Q.

D'autre part, les points D_1'', D_2'' sont distincts, car autrement la surface (x) serait un plan (*) et les quadriques $\overline{\Phi}$ cesseraient d'exister.

La quadrique $\overline{\Phi}$ est représentée par les plans $\overline{U}\,\overline{U}_1\,\overline{U}_2$ et $\overline{V}\,\overline{V}_1\,\overline{V}_2$. Les faisceaux des tangentes à $\overline{\Phi}$ aux points caractéristiques de cette quadrique sont représentés sur Q par la droite $\overline{U}\,\overline{V}$ et par les droites joignant chacun des points de rencontre de la droite $\overline{U}_1\,\overline{U}_2$ avec Q avec chacun des points de rencontre de $\overline{V}_1\,\overline{V}_2$ avec Q. Il y a donc cinq points caractéristiques et l'un de ceux-ci est le point x. On voit de plus que sur les différentes nappes de l'enveloppe des quadriques $\overline{\Phi}$, les asymptotiques se correspondent.

Si les quadriques de Lie d'une surface (x) *ont cinq points caractéristiques et si les asymptotiques se correspondent sur les différentes nappes de l'enveloppe de ces quadriques, les quadriques de Lie d'une de ces nappes ont cinq points caractéristiques et la surface* (x) *fait partie de leur enveloppe.*

Les quadriques Φ, $\overline{\Phi}$ sont tangentes aux points x, $\overline{x}$, et comme elles ne contiennent pas la droite $x\overline{x}$, elles ont en commun deux coniques passant par les points $x, \overline{x}$ et y touchant respectivement les surfaces (x), $(\overline{x})$. Si l'une de ces coniques dégénère en deux droites, celles-ci sont représentées par des

(*) L. Godeaux. Remarques sur l'enveloppe... (*loc. cit.*).

points des droites UV, $\overline{U}\overline{V}$. Soit N le point de UV ainsi obtenu. Puisqu'il représente une droite de Φ, le point N doit appartenir à l'un des plans UU_1U_2, VV_1V_2, par exemple au premier; il doit nécessairement coïncider avec U, car le plan UU_1U_2 ne peut contenir UV. Le point N, représentant une droite de $\overline{\Phi}$, doit appartenir à l'un des plans $\overline{U}\overline{U}_1\overline{U}_2$, $\overline{V}\overline{V}_1\overline{V}_2$, mais il est facile de voir que ce plan contiendrait la droite UV et les quadriques $\overline{\Phi}$ seraient toutes dégénérées, ce qui est impossible.

Les quadriques Φ, $\overline{\Phi}$ ont donc en commun deux coniques en général non dégénérés.

9. De ce qui précède, on peut déduire le théorème suivant :

Les quadriques de Lie d'une surface et les quadriques de Lie d'une des nappes de l'enveloppe des premières quadriques ont le même nombre de points caractéristiques.

Ce théorème reste vrai dans le cas où les asymptotiques ne se correspondent pas sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface envisagée.

Août 1929.

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.