ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XV, n° 11.
Séance du 9 novembre 1929, pp. 953-958.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE. — **Sur la transformation de Guichard et sur certaines quadriques considérées par M. Demoulin,**

par LUCIEN GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liége.

Soient (x_1), (x_2) les transformées de Guichard (*) d'une surface (x). Considérons trois points homologues x, x_1, x_2 et soient d la droite commune aux plans tangents en x_1, x_2 aux surfaces (x_1), (x_2), d' la droite $x_1 x_2$. D'après un théorème de Bianchi, il existe une infinité de points de la droite d et une infinité de points de la droite d' qui se correspondent dans des transformations de Guichard. Si l'on désigne par u, v les paramètres des asymptotiques sur la surface (x), les tangentes aux lignes u aux points considérés des droites d, d' engendrent une quadrique Δ_u et les tangentes aux lignes v aux mêmes points engendrent une quadrique Δ_v. Ces quadriques Δ_u, Δ_v ont été introduites par M. Demoulin en 1911 dans un Mémoire couronné par l'Académie des Sciences de Paris. M. Demoulin a montré que ces quadriques se touchent en quatre points qui sont des points caractéristiques de ces quadriques (**).

Nous nous proposons de montrer que les quadriques Δ_u, Δ_v appartiennent à une suite de quadriques telles que deux quadriques consécutives se touchent en quatre points qui sont

(*) Nous disons avec M. Demoulin que deux surfaces sont les transformées de Guichard l'une de l'autre lorsque ce sont les congruences focales d'une congruence W.

(**) A. DEMOULIN, Sur la transformation de Guichard et sur les systèmes K. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique,* 1919. pp. 101-112.)

des points caractéristiques de ces quadriques. Nous déterminerons aussi les points caractéristiques des quadriques Δ_u, Δ_v.

1. Considérons l'hyperquadrique Q d'un espace linéaire S_5 à cinq dimensions qui représente l'espace ordinaire réglé. Aux tangentes aux asymptotiques u, v de la surface (x) correspondent des points U, V et les surfaces (U), (V) sont consécutives dans une suite de Laplace (*). Représentons cette suite par

$$\ldots, U_i, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_i, \ldots, \tag{1}$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

La droite UV appartient à Q et ses points représentent les tangentes à la surface (x) en un de ses points x.

Les tangentes xx_1, xx_2 à la surface (x) sont représentées sur Q par deux points $J^{(1)}$, $J^{(2)}$ de la droite UV. Les droites xx_1, xx_2 engendrant des congruences W, les points $J^{(1)}$, $J^{(2)}$ engendrent, d'après un théorème de M. Demoulin (**), des réseaux conjugués à la congruence (UV). Les points $J^{(1)}$, $J^{(2)}$ déterminent des suites de Laplace inscrites dans la suite (1). Nous représenterons ces suites par

$$\ldots, J_i^{(1)}, \ldots, J_1^{(1)}, J^{(1)}, J_{-1}^{(1)}, \ldots, J_{-i}^{(1)}, \ldots, \tag{2}$$

$$\ldots. J_i^{(2)}, \ldots, J_1^{(2)}, J^{(2)}, J_{-1}^{(2)}, \ldots, J_{-i}^{(2)}, \ldots, \tag{3}$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u.

Les points $J_i^{(1)}$, $J_i^{(2)}$ appartiennent à la droite $U_{i-1}U$ et les points $J_{-i}^{(1)}$, $J_{-i}^{(2)}$ à la droite $V_{i-1}V_i$.

Soient A le point commun aux droites $J^{(1)} J_{-1}^{(1)}$, $J^{(2)} J_{-4}^{(2)}$ et B le point commun aux droites $J^{(1)} J_1^{(1)}$, $J^{(2)} J_1^{(2)}$.

(*) L. Godeaux, Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique.* 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-51.)

(**) Sur les surfaces R. (*C. R.*, 1911, t. 153, pp. 797-799.)

Lorsque u varie seule, les droites $J^{(1)} J^{(1)}_1$, $J^{(2)} J^{(2)}_1$ engendrent des développables et les plans tangents le long de ces droites à ces surfaces sont respectivement $J^{(1)}_{-1} J^{(1)} J^{(1)}_1$, $J^{(}_{-1} J^{(2)} J^{(2)}_1$. Par suite, la tangente en B à la ligne u tracée sur la surface (B) est la droite BA. De même la tangente en A à la ligne v sur la surface (A) est la droite BA. Les points B, A sont donc consécutifs dans une suite de Laplace que nous représenterons par

$$\ldots,\ B_i,\ \ldots,\ B_1,\ B,\ A,\ A_1,\ \ldots,\ A_i,\ \ldots, \tag{4}$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u.

La suite (4) est inscrite dans les suites (2) et (3). Le point B_i est l'intersection des droites $J^{(1)}_i\, J^{1}_{i+1}$, $J^{(2)}_1\, J^{(2)}_{i+1}$ et le point A_i celui des droites $J^{(1)}_{-}\, J^{(1)}_{-i-1}$, $J^{(2)}_{-i}\, J^{(2)}_{-i-1}$.

2. Désignons par $P^{(1)}$ le pôle, par rapport à Q, de l'hyperplan $J^{(1)}_2 J^{(1)}_1 J^{(1)} J^{(1)}_{-1} J^{(1)}_{-2}$, par $P^{(2)}$ celui de l'hyperplan $J^{(2)}_2 J^{(2)}_1$ $J^{(2)} J^{(2)}_1 J^{(2)}_{-2}$. Ces points sont donc respectivement les secondes images des complexes linéaires osculateurs Λ_1, Λ_2 aux congruences (xx_1), (xx_2), le long des droites xx_1, xx_2. On sait que les points $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ appartiennent à des suites de Laplace que nous désignerons par

$$\ldots,\ P^{(1)}_i,\ \ldots,\ P^{(1)}_1,\ P^{(1)},\ P^{(1)}_{-1},\ \ldots,\ P^{(1)}_{-i},\ \ldots, \tag{2'}$$

$$\ldots,\ P^{(2)}_i,\ \ldots,\ P^{(2)}_1,\ P^{(2)},\ P^{(2)}_{-1},\ \ldots,\ P^{(2)}_{-i},\ \ldots, \tag{3'}$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u.

Le point $P^{(1)}_i$ est le pôle de l'hyperplan $J^{(1)}_{-i-2}\, J^{(1)}_{-i-1}\, J^{(1)}_{-i}$ $J^{(1)}_{-i-1}\, J^{(1)}_{-i-2}$, et $P^{(2)}_i$ celui de l'hyperplan $J^{(2)}_{-i+2} \ldots J^{(2)}_{-i-2}$, par rapport à l'hyperquadrique Q. De plus, les suites (2), (3) étant inscrites dans la suite (1) et celle-ci étant sa propre polaire par rapport à Q, les suites (2'), (3') sont circonscrites à la suite (1).

La droite $P^{(1)} P^{(2)}$ est la conjuguée, par rapport à Q, de l'espace linéaire à trois dimensions commun aux hyperplans $J^{(1)}_{-2} \ldots J^{(1)}_{2}$, $J^{(2)}_{-2} \ldots J^{(2)}_{2}$, c'est-à-dire de l'espace $B_1 B A A_1$. De même la droite $P^{(1)}_1 P^{(2)}_1$ et l'espace $B A A_1 A_2$ sont conjugués par rapport à Q. Par suite, le pôle A' de l'hyperplan $B_1 B A A_1 A_2$ est l'intersection des droites $P^{(1)} P^{(2)}$ et $P^{(1)}_1 P^{(2)}_1$. On voit de même que le pôle B' de l'hyperplan $B_2 B_1$ BAA est l'intersection des droites $P^{(1)} P^{(2)}$ et $P^{(1)}_{-1} P^{(2)}_{-1}$.

Représentons par

$$\ldots, A'_i, \ldots, A'_1, A', B', B'_1, \ldots, B'_i, \ldots \qquad (4')$$

la suite de Laplace polaire de la suite (4) par rapport à Q, chaque point étant le transformé du précédent dans le sens de u. A'_i est le pôle de l'hyperplan $A_{i-2} A_{i-1} A_i A_{i+1} A_{i+2}$, B'_i celui de $B_{i-2} B_{i-1} B_i B_{i+1} B_{i+2}$.

3. Considérons le plan $A'_1 A' B'$. D'après les propriétés qui viennent d'être établies, ce plan contient les droites $P^{(1)} P^{(2)}$ et $P^{(1)}_1 P^{(2)}_1$.

Sur les surfaces (x_1), (x_2), les asymptotiques sont les lignes u, v. Représentons par $U^{(1)}$, $V^{(1)}$ les points de Q images des tangentes asymptotiques u, v de la surface (x_1), par $U^{(2)}$, $V^{(2)}$ ceux qui représentent les tangentes aux asymptotiques u, v de la surface (x_2). Ces points déterminent deux suites de Laplace

$$\ldots, U^{(1)}_i, \ldots, U^{(1)}, V^{(1)}, \ldots, V^{(1)}_i, \ldots, \qquad (5)$$

$$\ldots, U^{(2)}_i, \ldots, U^{(2)}, V^{(2)}, \ldots, V^{(2)}_i, \ldots, \qquad (6)$$

analogues à la suite (1). La suite (5) est circonscrite à la suite (2) et par suite inscrite dans la suite (2'), puisqu'elle est sa propre polaire par rapport à Q. De même la suite (6) est circonscrite à la suite (3) et inscrite dans la suite (3') : la droite $P^{(1)} P^{(1)}_1$ par les points U, $U^{(1)}$ et la droite $P^{2} P^{(2)}_1$ par les points U, $U^{(2)}$. Par conséquent, le plan $A'_1 A' B'$ contient les points U, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$.

On démontrerait de même que le plan $A'B'B'_1$ contient les points V, $V^{(1)}$, $V^{(2)}$.

Plus généralement, le plan $A'_i A'_{i+1} A'_{i+2}$ contient les points U_{i+1}, $U^{(1)}_{i+1}$, $U^{(2)}_{i+1}$ et le plan $B'_i B'_{i+1} B'_{i+2}$ les points V_{i+1}, $V^{(1)}_{i+1}$, $V^{(2)}_{i+2}$.

4. Les plans A_1AB et $A'_1A'B'$ sont conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q. Par conséquent, les sections de Q par ces plans représentent les deux systèmes de génératrices rectilignes d'une même quadrique. Le plan $A'_1 A' B'$ contenant les points U, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, cette quadrique passe par les tangentes en x, x_1, x_2 aux lignes u tracées sur les surfaces (x), (x_1), (x_2). Cette quadrique coïncide donc avec la quadrique Δ_u de M. Demoulin.

De même, les plans ABB_1, $A'B'B'_1$, conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q, représentent les génératrices rectilignes de la seconde quadrique Δ_v de M. Demoulin.

Les droites d, d', communes aux quadriques Δ_u, Δ_v, ont pour images sur Q les points de rencontre de cette hyperquadrique avec la droite AB. Les deux autres droites communes à ces deux quadriques ont comme images, sur Q, deux points situés sur la droite $A'B'$. Or, cette droite coïncide avec la droite $P^{(1)}P^{(2)}$. Par conséquent, les quadriques Δ_u, Δ_v ont en commun des directrices de la congruence linéaire commune aux complexes Λ_1, Λ_2.

Les quadriques Δ_u, Δ_v *de M. Demoulin ont en commun les droites* d, d' *et les directrices de la congruence commune aux complexes linéaires osculateurs aux congruences* (xx_1), (xx_2) *le long des droites* xx_1, xx_2.

5. Les plans $A_i A_{i+1} A_{i+2}$ et $A'_i A'_{i+1} A'_{i+2}$ étant conjugués par rapport à Q, leurs sections par cette hyperquadrique représentent les génératrices rectilignes d'une quadrique que nous désignerons par $\Delta^{(i)}_u$. De même, aux plans $B_i B_{i+2} B_{i+2}$,

$B'_i B'_{i+1}$, B'_{i+2} correspond une quadrique $\Delta_v^{(i)}$. Nous avons ainsi une suite de quadriques

$$\ldots,\ \Delta_v^{(i)},\ \ldots,\ \Delta_v^{(0)},\ \Delta_v,\ \Delta_u,\ \Delta_u^{(0)},\ \ldots,\ \Delta_u^{(i)},\ \ldots, \tag{7}$$

dont font partie les quadriques de M. Demoulin.

Deux quadriques consécutives de la suite (7) ont en commun quatre droites. Par exemple les quadriques $\Delta_v^{(i)}$, $\Delta_v^{(i-1)}$ ont en commun les quatre droites représentées sur Q par les points où cette hyperquadrique est rencontrée par les droites $B_i B_{i+1}$, $B'_i B'_{i+1}$. De plus, d'après un théorème que nous avons établi (*), lorsque u, v varient, les points caractéristiques d'une quadrique de la suite (7) sont les sommets des quadrilatères gauches qu'elle a en commun avec la quadrique qui la précède et celle qui la suit dans la suite (7).

Les points caractéristiques de la quadrique Δ_u sont donc les sommets des quadrilatères qu'elle a en commun avec les quadriques Δ_v et $\Delta_u^{(0)}$. De même, ceux de Δ_v sont les sommets des quadrilatères communs à cette quadrique et à Δ_u, $\Delta_v^{(0)}$. On retrouve ainsi, en particulier, le résultat obtenu par M. Demoulin : les quadriques Δ_u, Δ_v se touchent en quatre points qui sont des points caractéristiques de ces quadriques.

(*) Sur les lignes asymptotiques.. (*loc. cit.*), 2e note.

Août 1929.

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.