SUR

CERTAINES SUITES DE LAPLACE

Dans nos recherches sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques, nous sommes arrivé aux résultats suivants (*) : Soient (x) une surface satisfaisant à cette condition; (y) la surface lieu du second point caractéristique des quadriques de Lie de la surface (x); m, n les foyers de la droite commune aux plans tangents aux surfaces (x), (y) en deux points correspondants x, y. Les points m, n sont situés sur les tangentes asymptotiques en x, y aux surfaces (x), (y). Les transformés de Laplace m_1 de m, n_1 de n, respectivement distincts de n, m, appartiennent à la droite xy et les réseaux (m_1), (n_1) sont conjugués à la congruence engendrée par cette droite. La droite mn engendre une congruence de Goursat. Nous avons montré que si, inversement, on part d'une congruence (m, n) de Goursat et si l'on suppose que la droite $m_1 n_1$ engendre une congruence conjuguée aux réseaux (m_1), (n_1), il existe sur cette droite deux points x, y engendrant des surfaces ayant mêmes quadriques de Lie. Ces recherches

---

(*) Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie (*Bulletins de l'Acad. roy. de Belgique,* 1928, pp. 158-186, 345-348); Sur les congruences de Goursat et les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie (*Idem,* 1928, pp. 455-466). Voir aussi, sur le même sujet, deux notes antérieures de M. Demoulin, Sur la quadrique de Lie (*C. R.*, 1908, t. CXLVII, pp. 493-496); Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques (*C. R.*, 1924, t. CLXXIX, pp. 20-23).

nous ont conduit aux problèmes suivants, dont l'étude fait l'objet de ce travail :

Considérons un réseau (m) à invariants égaux et soient m_i, m_{-i} les transformés de Laplace de m, de rang i, dans chaque sens. Quelle est la condition pour que la droite $m_i m_{-i}$ engendre une congruence conjuguée aux réseaux (m_i), (m_{-i})? De même, considérons une congruence de Goursat et soient m, n les foyers d'une droite de cette congruence, m_i, n_i les transformés de Laplace de rang i de m, n. Quelle est la condition pour que la droite $m_i n_i$ engendre une congruence conjuguée aux réseaux (m_i), (n_i)? La solution de ces problèmes nous conduit à des congruences dont les foyers p, q des droites satisfont à des équations du type

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial u} q, \qquad \frac{\partial q}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial v} p.$$

Ces congruences sont également caractérisées par le fait qu'il existe deux points $p - \alpha q$, $q - \alpha p$ engendrant des réseaux conjugués. Nous montrons que si ces réseaux appartiennent à une même suite de Laplace, celle-ci contient un réseau à invariants égaux ou une congruence de Goursat.

1. — Considérons dans un espace linéaire S_r à r $(r > 2)$ dimensions, un réseau (m) à invariants égaux. Les coordonnées projectives homogènes du point m engendrant ce réseau vérifient l'équation de Moutard

$$\frac{\partial^2 m}{\partial u \partial v} = am,$$

où a est une fonction de u, v.

Désignons par m_1, m_2, ..., m_i, ... les transformés successifs de Laplace du point m dans le sens des v, par m_{-1}, m_{-2}, ..., m_{-i}, ... les transformés successifs de ce point dans le sens des u. Nous nous proposons de rechercher dans quelles conditions la congruence $(m_i m_{-i})$ engendrée par la droite $m_i m_-$ est conjuguée aux réseaux (m_i), (m_{-i}).

Soient p, q les foyers de la droite $m_i m_{-i}$ et supposons que p soit le transformé de Laplace de q dans le sens des v. Si la congruence $(pq) = (m_i m_{-i})$ est conjuguée au réseau (m_i), la suite de Laplace dont fait partie (m_i) est inscrite dans la suite de Laplace dont fait partie (p). Si p_1 est le transformé de Laplace de p dans le sens des v, le point m_{i+1} appartient à la droite pp_1. De même le point m_{i-1} appartient à la droite qq_1, q_1 étant le transformé de Laplace de q dans le sens des u.

Par le même raisonnement, on voit que si la congruence (pq) et le réseau (m_{-i}) sont conjugués, le point m_{-i+1} appartient à la droite pp_1 et le point m_{-i-1} à la droite qq_1. Il en résulte que les points m_{i+1}, m_i, m_{-i}, m_{-i+1} sont coplanaires et que leurs coordonnées vérifient une relation de la forme

$$m_{i+1} = \mathrm{A} m_i + \mathrm{B} m_{-i} + \mathrm{C} m_{-i+1}. \tag{1}$$

De même, les points m_{-i-1}, m_{-i}, m_i, m_{i-1} sont coplanaires et leurs coordonnées vérifient la relation

$$m_{-i-1} = \mathrm{A}_1 m_{-i} + \mathrm{B}_1 m_i + \mathrm{C}_1 m_{i-1}. \tag{2}$$

2. — Convenons de représenter par

$$\varphi_{ik} = \frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial u^i \partial v^k}$$

les dérivées partielles d'une fonction φ de u, v, et posons

$$a_1 = -(\log a)^{11} + a, \qquad a_2 = -(\log aa_1)^{11} + a_1, \ldots,$$
$$a_i = -(\log aa_1 \ldots a_{i-1})^{11} + a_{i-1}, \ldots.$$

Nous avons

$$m^{01} = m_1 \qquad m_1^{10} = am,$$
$$m_1^{01} = m_2 + m_1 (\log a)^{01}, \qquad m_2^{10} = a_1 m,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m_i^{01} = m_{i+1} + m_i (\log aa_1 \ldots a_{i-1})^{01}, \qquad m_{i+1}^{10} = a_i m_i.$$
$$m^{10} = m_{-1}, \qquad m_{-1}^{01} = am,$$
$$m_{-1}^{10} = m_{-2} + m_{-1} (\log a)^{10}, \qquad m_{-2}^{01} = a_1 m_{-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m_{-i}^{10} = m_{-i-1} + m_{-i} (\log a a_1 \cdots a_{i-1})^{18}, \qquad m_{-i-1}^{10} = a_i m_{-i}.$$

Dérivons la relation (1) par rapport à u ; nous obtenons

$$m_i(A^{10}-a_i)+m_{-i}\left[B^{10}+B(\log a\,a_1\ldots a_{i-1})^{10}+C\right]+B m_{-i-1}$$
$$+A a_{i-1}\,m_{i-1}+m_{-i+1}\left[C^{10}+C(\log a a_1\ldots a_{i-2})^{10}\right]=0.$$

Cette relation doit évidemment coïncider avec la relation (2) et, par suite, nous avons

$$A^{10}+BB_1-a_i=0, \tag{3}$$

$$B^{10}+B(\log a a_1\ldots a_{i-1})^{10}+BA_1+C=0, \tag{4}$$

$$Aa_{i-1}+BC_1=0, \tag{5}$$

$$C^{10}+C(\log a a_1\ldots a_{i-2})^{10}=0. \tag{6}$$

En dérivant de même la relation (2) par rapport à v, on trouve une relation qui doit coïncider avec (1) ; d'où

$$A_1^{01}+BB_1-a_i=0, \tag{7}$$

$$B_1^{01}+B_1(\log a\,a_1\ldots a_{i-1})^{01}+B_1A+C_1=0, \tag{8}$$

$$A_1\,a_{i-1}+B_1\,C=0, \tag{9}$$

$$C_1^{01}+C_1(\log a a_1\ldots a_{i-2})^{01}=0. \tag{10}$$

Les relations (6) et (10) donnent

$$C=\frac{V}{a\,a_1\ldots a_{i-2}},\qquad C_1=\frac{U}{a\,a_1\ldots a_{i-2}},$$

U étant une fonction de u seule et V une fonction de v seule. En opérant un changement de variables convenablement choisi, on peut d'ailleurs supposer $U=1$, $V=1$. En posant

$$\alpha=a a_1\ldots a_{i-1},$$

on aura alors

$$C=C_1=\frac{a_{i-1}}{\alpha}.$$

Les relations (5) et (9) donnent

$$B=-A\alpha,\qquad B_1=-A_1\alpha.$$

Les relations (3), (7) donnent ensuite

$$A^{10}=A_1^{01}$$

et, par suite, il existe une fonction de θ de u, v telle que

$$A = \theta^{01}, \qquad A_1 = \theta^{10}.$$

Des équations (4) et (8), on déduit

$$\theta^{10}\alpha^{01} = \theta^{01}\alpha^{10};$$

par suite, on a

$$\theta = \varphi(\alpha).$$

En éliminant A_1 entre les équations (3) et (4), on obtient

$$(\alpha^2 - 1)\,A^{10} + 2A\,\alpha\alpha^{10} = (\log\alpha)^{11},$$

ce qui peut s'écrire, en posant

$$\beta = \alpha^2 - 1,$$

$$(\alpha^2 - 1)\,A^{10} + (\alpha^2 - 1)^{10}A = [\beta A]^{10} = (\log\alpha)^{11}.$$

On en tire

$$A = \frac{(\log\alpha)^{01}}{\beta} + V_1,$$

V_1 étant une fonction de v seule. De là, on déduit

$$\theta^{01} = \alpha^{01}\varphi'(\alpha) = \frac{\alpha^{01}}{\alpha\beta} + V_1.$$

Par suite, V_1 est nul et l'on a

$$A = \theta^{01} = \frac{\alpha^{01}}{\alpha\beta} = \frac{1}{\beta}(\log\alpha)^{01}.$$

Les équations (7) et (8) donnent de même

$$A_1 = \theta^{10} = \frac{1}{\beta}(\log\alpha)^{10}.$$

Les relations (1) et (2) s'écriront finalement

$$m_{i+1} = \frac{1}{\beta}(\log\alpha)^{01}(m_i - \alpha m_{-i}) + \frac{a_{i-1}}{\alpha}\,m_{-i+1}, \tag{11}$$

$$m_{-i-1} = \frac{1}{\beta}(\log\alpha)^{10}(m_{-i} - \alpha m_i) + \frac{a_{i-1}}{\alpha}\,m_{i-1}. \tag{12}$$

On observera que la relation (3) n'a été utilisée qu'en la combinant avec d'autres relations; par suite elle fournira une relation de condition pour α. On aura précisément

$$\beta^2 a_i = \beta (\log \alpha)^{11} - \alpha^2 (\log \alpha)^{10} (\log \alpha)^{01}. \tag{13}$$

3. — Le point p étant l'intersection des droites $m_i m_{-i}$ et $m_{i+1} m_{-i+1}$, nous poserons

$$p = \frac{1}{\beta}(m_i - \alpha m_{-i}), \qquad p (\log \alpha)^{01} = m_{i+1} - \frac{a_{i-1}}{\alpha} m_{-i-1}.$$

De même, nous poserons

$$q = \frac{1}{\beta}(m_{-i} - \alpha m_i), \qquad q (\log \alpha)^{10} = m_{-i-1} - \frac{a_{i-1}}{\alpha} m_{i-1}.$$

On en déduit les relations

$$p^{10} = \frac{\alpha^{10}}{\beta} q, \qquad q^{01} = \frac{\alpha^{01}}{\beta} p. \tag{14}$$

Observons qu'en posant

$$\alpha = - th\, \theta_1,$$

les équations (14) s'écrivent

$$p^{10} = \theta_1^{10} q, \qquad q^{01} = \theta_1^{01} q. \tag{15}$$

On remarquera que dans ce qui précède on doit supposer $i > 1$, sans que les points m, m_1, m_2, m_{-1}, m_{-2} seraient dans un même plan.

4. — Nous allons maintenant nous poser un problème analogue au précédent : Considérons une congruence de Goursat (*) dont les foyers m, n ont des coordonnées satisfaisant aux équations

$$m^{10} = an, \qquad n^{01} = am,$$

(*) Voir G. Tzitzeica, Sur certaines congruences de droites. (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1928, pp. 189-203.) Voir aussi *C. R.*, 1926, t. CLXXXII, pp. 952-954, 1071-1073.

les notations n'ayant plus la mème signification que plus haut. Désignons par m_1, m_2, ..., m_i, ... les transformés de Laplace successifs de m dans le sens des v; par n_1, n_2, ... n_i, ... ceux de n dans le sens des u. Dans quelles conditions la congruence $(m_i n_i)$ est-elle conjuguée des réseaux (m_i), (n_i)?

Désignons par p, q les foyers de la droite $m_i n_i$, p étant le transformé de q dans le sens de v. Soient p_1 le transformé de Laplace de p distinct de q, q_1 celui de q distinct de p. On établit, comme dans le premier cas, que les points m_i, n_i, m_{i+1}, n_{i-1} sont coplanaires, la droite pp_1 passant par les deux derniers de ces points. On a donc

$$m_{i+1} = \mathrm{A}m_i + \mathrm{B}n_i + \mathrm{C}n_{i-1}. \tag{1'}$$

De même, on a

$$n_{i+1} = \mathrm{A}_1 n_i + \mathrm{B}_1 m_i + \mathrm{C}_1 m_{i-1}, \tag{2'}$$

les points n_{i+1} et m_{i-1} étant situés sur la droite qq_1.

Posons

$$a_1 = -(\log a)^{11} + a^2, \qquad a_2 = -(\log aa_1)^{11} + a_1, \ldots,$$
$$a_i = -(\log aa_1 \ldots a_{i-1})^{11} + a_{i-1}, \ldots.$$

Nous avons

$$m_1 = m^{01} - (\log a)^{01} m, \qquad m_1^{10} = a_1 m_1,$$
$$m_2 = m_1^{01} - (\log aa_1)^{01} m_1, \qquad m_2^{10} = a_2 m_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m_{i+1} = m_i^{01} - (\log aa_1 \ldots a_i)^{01} m_i, \qquad m_{i+1}^{10} = a_{i+1} m_i.$$

De même,

$$n_1 = n^{10} - (\log a)^{10} n, \qquad n_1^{01} = a_1 n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n_{i+1} = n_i^{10} - (\log aa_1 \ldots a_i)^{10} n_i, \qquad n_{i+1}^{01} = a_{i+1} n_i.$$

En procédant comme plus haut, on trouve que les relations (1'), (2') s'écrivent

$$m_{i+1} = \frac{1}{\beta}(\log\alpha)^{01}(m_i - \alpha n_i) + \frac{a_i}{\alpha} n_{i-1},$$
$$n_{i+1} = \frac{1}{\beta}(\log\alpha)^{10}(n_i - \alpha m_i) + \frac{a_i}{\alpha} m_{i-1},$$

où l'on a posé

$$\alpha = aa_1 \dots a_i, \qquad \beta = \alpha^2 - 1.$$

Cela étant, on aura encore

$$p = \frac{1}{\beta}(m_i - \alpha n_i), \qquad q = \frac{1}{\beta}(n_i - \alpha m_i) \tag{16}$$

et

$$p^{10} = \frac{\alpha^{10}}{\beta} q, \qquad q^{01} = \frac{\alpha^{01}}{\beta} p.$$

Ce sont des équations identiques aux équations (14) et elles peuvent se mettre sous la forme (15).

La relation à laquelle a doit satisfaire s'écrit maintenant

$$\beta^2 a_{i+1} = \beta (\log \alpha)^{11} - \alpha^2 (\log \alpha)^{10} (\log \alpha)^{01}. \tag{13'}$$

5. — Nous allons retrouver la congruence (pq) donnée par les formules (15) d'une troisième manière. Observons que de (16) on déduit

$$p + \alpha q + m_i = 0, \qquad q + \alpha p + n_i = 0.$$

Cela étant, envisageons une congruence (pq) dont les foyers p, q vérifient les relations

$$p^{10} = aq, \qquad q^{01} = bp$$

et proposons-nous de rechercher dans quelles conditions les points

$$\frac{1}{\rho}(p - \alpha q), \qquad \frac{1}{\rho}(q - \alpha p)$$

engendrent des réseaux conjugués à cette congruence.

Nous devons avoir

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho}\right)^{01} &= b\,\frac{\alpha}{\rho}, & \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{10} &= a\,\frac{1}{\rho}, \\ \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{01} &= b\,\frac{1}{\rho}, & \left(\frac{1}{\rho}\right)^{10} &= a\,\frac{\alpha}{\rho}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

On en déduit

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^{11} = b^{10}\frac{\alpha}{\rho} + b\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{10} = b^{10}\frac{\alpha}{\rho} + ab\frac{1}{\rho},$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^{11} = a^{01}\frac{\alpha}{\rho} + a\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{01} = a^{01}\frac{\alpha}{\rho} + ab\frac{1}{\rho}$$

et, par suite,

$$a^{01} = b^{10}.$$

Nous sommes donc conduit à poser $\theta_1^{10} = a$, $\theta_1^{01} = b$.

En introduisant ces conditions dans les équations (17), on voit immédiatement que $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{\alpha}{\rho}$ sont fonctions de θ_1 ; nous poserons

$$\frac{1}{\rho} = \varphi(\theta_1), \qquad \frac{\alpha}{\rho} = \psi(\theta_1).$$

En substituant dans les équations (17), on a

$$\varphi'(\theta_1) = \psi(\theta_1), \qquad \psi'(\theta_1) = \varphi(\theta_1). \tag{18}$$

6. — Une première solution des équations (18) s'obtient en posant

$$\varphi(\theta_1) = \psi(\theta_1) = e^{\theta_1}.$$

Le point $\frac{1}{\rho}(p - q)$ décrit donc un réseau conjugué à la congruence (pq). Il est aisé de voir que l'on a

$$(p - q)^{11} = (\theta_1^{10}\theta_1^{01} - \theta_1^{11})(p - q).$$

Le point $p - q$ décrit donc un réseau de Moutard.

D'après un théorème de M. Koenigs, le point $p + q$, conjugué harmonique du point $p - q$ par rapport aux points p, q, décrit également un réseau à invariants égaux. On a effectivement

$$(p + q)^{11} = (\theta_1^{10}\theta_1^{01} + \theta_1^{11})(p + q).$$

Si les foyers des droites d'une congruence vérifient les équations

$$p^{10} = \theta_1^{10} q, \qquad q^{01} = \theta_1^{01} p,$$

les points $\mathrm{p} + \mathrm{q}$, $\mathrm{p} - \mathrm{q}$ *décrivent des réseaux à invariants égaux.*

7. — Reprenons le cas général où, dans les équations (18), les fonctions $\varphi(\theta)$, $\psi(\theta)$ ne sont pas identiques. α est une fonction de θ_1 telle que

$$\frac{d\alpha}{d\theta_1} = \frac{d}{d\theta_1}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right) = \frac{\varphi\psi' - \psi\varphi'}{\varphi^2} = 1 - \alpha^2.$$

Par suite, on a

$$\alpha = th\,(\theta_1 + \mathrm{C^{te}}).$$

Les points

$$\mathrm{M} = p - \alpha q, \qquad \mathrm{N} = q - \alpha p$$

décrivent des réseaux conjugués à la congruence (pq). Ces points vérifient les équations de Laplace

$$\mathrm{M}^{11} - (\log \alpha)^{01} \mathrm{M}^{10} - \alpha\,(\alpha \theta_1^{10} \theta_1^{01} - \theta_1^{11})\,\mathrm{M} = 0,$$

$$\mathrm{N}^{11} - (\log \alpha)^{10} \mathrm{N}^{01} - \alpha\,(\alpha \theta_1^{10} \theta_1^{01} - \theta_1^{11})\,\mathrm{N} = 0.$$

Désignons par $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, ... les transformés successifs de Laplace du point $\mathbf{M}$ dans le sens des u. Posons

$$\alpha_1 = \alpha \theta_1^{10} \theta_1^{01} - \theta_1^{11}, \qquad \alpha_2 = (\log \alpha_1)^{11} - \alpha\alpha_1, \qquad \alpha_3 = (\log \alpha_1\alpha_2)^{11} + \alpha_2, \ldots,$$

$$\alpha_i = (\log \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{i-1})^{11} + \alpha_{i-1}, \ \ldots$$

Nous pouvons multiplier les coordonnées homogènes des points $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, ... par un même facteur et poser

$$\mathbf{M}^{10} = \alpha\alpha_1 \mathbf{M}_1, \qquad \mathbf{M}_1^{10} = \alpha_2 \mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_{i-1}^{10} = \alpha_i \mathbf{M}_i, \ldots$$

Nous avons alors

$$\mathbf{M}_1^{01} + (\log \alpha_1)^{01} \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}, \qquad \mathbf{M}_2^{01} + (\log \alpha_1\alpha_2)^{01} \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_1 = 0, \ldots,$$

$$\mathbf{M}_i^{01} + (\log \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_i)^{01} \mathbf{M} + \mathbf{M}_{i-1} = 0, \ldots,$$

et les équations de Laplace.

$$\left.\begin{array}{l} M_1^{11} + (\log \alpha_1)^{01} M_1^{10} + \alpha_2 M_1 = 0, \\ M_2^{11} + (\log \alpha_1\alpha_2)^{01} M_2^{10} + \alpha_3 M_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ M_i^{11} + (\log \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_i)^{01} M_i^{10} + \alpha_{i+1} M_i = 0, \dots \end{array}\right\} \quad (1)$$

Appelons de même N_1, N_2, ... les transformés de Laplace successifs du point N dans le sens des v. Nous poserons

$$N^{01} = \alpha\alpha_1 N_1, \qquad N_1^{01} = \alpha_2 N_2, \dots, N_{i-1}^{01} = \alpha_i N_i, \dots;$$

d'où

$$N_1^{10} + (\log \alpha_1)^{10} N_1 = N, \qquad N_2^{10} + (\log \alpha_1\alpha_2)^{10} N_2 + N_1 = 0, \dots,$$
$$N_i^{10} + (\log \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_i)^{10} N_i + N_{i-1} = 0, \dots.$$

Les points N_1, N_2, ... satisfont aux équations de Laplace

$$\left.\begin{array}{l} N_1^{11} + (\log \alpha_1)^{10} N_1^{01} + \alpha_2 N_1 = 0, \\ N_2^{11} + (\log \alpha_1\alpha_2)^{10} N_2^{01} + \alpha_3 N_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ N_i^{11} + (\log \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_i)^{10} N_i^{01} + \alpha_{i+1} N_i = 0, \dots \end{array}\right\} \quad (2)$$

On remarquera que les invariants des équations (1) et (2) sont respectivement

$$h_i = (\log \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_i)^{11} - \alpha_{i+1}, \qquad k_i = -\alpha_{i+1},$$
$$h'_i = -\alpha_{i+1}, \qquad k'_i = (\log \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_i)^{11} - \alpha_{i+1}.$$

Les suites de Laplace M, M_1, M_2, ... et N, N_1, N_2, ... sont inscrites dans la suite de Laplace déterminée par les réseaux (p), (q). Si les deux premières suites coïncident, l'un des points N, N_1, ... coïncidant avec l'un des points M, M_1, ..., deux cas peuvent se présenter :

1° Il existe une valeur de i pour laquelle M_i et N_i coïncident;

2° Il existe une valeur de i pour laquelle M_i et N_{i+1} coïncident.

Nous allons examiner successivement ces deux cas.

8. — Si les points M_i, N_i coïncident, il existe une fonction λ de u, v, telle que

$$M_i = \lambda N_i. \tag{3}$$

En substituant cette valeur M_i dans l'équation (1), on doit trouver une équation identique à (2), ce qui donne

$$\left.\begin{aligned} &(\log\lambda)^{01} + (\log \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i)^{01} = 0,\\ &(\log\lambda)^{10} = (\log \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i)^{10},\\ &\lambda^{11} + \lambda^{10}(\log \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_1)^{01} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

On en déduit que $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_i$ est le produit d'une fonction de u seule par une fonction de v seule. Les invariants h_i, k_i du réseau (M_i) sont égaux. Inversement, si le réseau (M_i) est à invariants égaux, on a

$$(\log \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i)^{11} = 0.$$

et

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i = \mathrm{UV},$$

U désignant une fonction de u seule et V une fonction de v seule. Il existe donc une fonction

$$\lambda = \frac{\mathrm{U}^2}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i}{\mathrm{V}^2}$$

satisfaisant aux équations (4), et M_i, N_i coïncident.

9. — Si les points M_i et N_{i+1} coïncident, il existe une fonction λ de u, v, telle que

$$M_i = \lambda N_{i+1}.$$

En portant cette valeur de M_i dans l'équation (1), on obtient une équation de Laplace qui doit être identique à

$$N_{i+1}^{11} + (\log \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{i+1})^{10} N_{i+1}^{01} + \alpha_{i+2} N_{i+1} = 0.$$

On doit donc avoir

$$\left.\begin{aligned} &(\log\lambda)^{01} + (\log \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1})^{01} = 0,\\ &(\log\lambda)^{10} = (\log \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i)^{10},\\ &\lambda^{11} + \lambda^{10}(\log \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1})^{01} + \lambda(\alpha_{i+2} - \alpha_{i+1}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ces équations entraînent la condition

$$(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i)^2 \alpha_{i+1} = \mathrm{U}\,\mathrm{V}, \tag{6}$$

U étant fonction de u seule et V une fonction de v seule. On a alors

$$\lambda = \frac{\mathrm{U}}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{i+1}} = \frac{\alpha_1 \ldots \alpha}{\mathrm{V}}. \tag{7}$$

Les invariants du réseau (M_{i+1}), qui doit actuellement coïncider avec le réseau (N_i), sont, en vertu de la condition (6),

$$h_{i+1} = (\log \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{i+1})^{11} - \alpha_{i+2} = k = h'_i,$$
$$k_{i+1} = -\alpha_{i+2} = h_i = k'_i.$$

Par suite, la droite $\mathrm{M}_i\mathrm{M}_{i+1}$ ou $\mathrm{N}_{i+1}\mathrm{N}_i$ engendre une congruence de Goursat.

Inversement, si la droite $\mathrm{M}_i\mathrm{M}_{i+1}$ engendre une congruence de Goursat, on a

$$k_{i+1} = h_i,$$

c'est-à-dire

$$-\alpha_{i+2} = (\log \alpha_1 \ldots \alpha_i)^{11} - \alpha_{i+1}.$$

On en déduit la relation (6) et il existe, par suite, une fonction λ de u, v donnée par (7). Le point M_i coïncide avec le point N_{i+1} et le point M_{i+1} avec le point N_i.

10. — On parvient aux mêmes conclusions et par des calculs analogues, lorsqu'on suppose qu'un des transformés de M dans le sens des v coïncide avec un des transformés de N dans le sens de u. Nous pouvons, par suite, énoncer les théorèmes suivants :

Si la droite joignant les transformés de Laplace m_i, m_{-i} *de même rang dans chaque sens d'un point* m *générateur d'un réseau à invariants égaux, engendre une congruence conjuguée aux réseaux* (m_i), (m_{-i}), *les foyers* p, q *d'une droite de cette congruence vérifient des équations de la forme*

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial \theta_1}{\partial u} q, \qquad \frac{\partial q}{\partial v} = \frac{\partial \theta_1}{\partial v} p. \tag{1}$$

Si la droite joignant les transformés de Laplace de même rang, m_i, n_i *des foyers d'une droite engendrant une congruence de Goursat, engendre une congruence conjuguée aux réseaux* (m_i), (n_i), *les foyers* p, q *d'une droite de cette congruence vérifient des équations de la forme* (I).

S'il existe, sur une droite de foyers p, q *d'une congruence, deux points* $p - \alpha q$, $q - \alpha p$ *engendrant des réseaux conjugués à la congruence, les foyers* p, q *vérifient des équations de la forme* (I). *Si, de plus, les suites de Laplace déterminées par les réseaux* $(p - \alpha q)$, $(q - \alpha p)$ *coïncident, il existe dans la suite obtenue un réseau à invariants égaux ou une congruence de Goursat.*

Liége, le 1er décembre 1928.

Estratto dal *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana*
Anno VIII - N. 1 - Febbraio 1929
Edito dalla Casa Editrice NICOLA ZANICHELLI, Bologna

Sur les congruences conjuguées et harmoniques à une surface

par LUCIEN GODEAUX (Liége).

Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes de WILCZYNSKI d'un point x de cette surface satisfont au système complètement intégrable d'equations aux derivées partielles

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0,$$

où nous posons

$$\varphi^{ik} = \frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial u^i \, \partial v^k}.$$

M. FUBINI [1] a démontré que toute congruence conjuguée à la surface (x) était engendrée par une droite r joignant le point x au point $\left(\frac{x}{\rho}\right)^{11}$, ρ étant une fonction de u, v convenablement choisie. La droite conjuguée de r par rapport à la quadrique de LIE relative au point x engendre une congruence harmonique à la surface (x). On peut donner une autre forme à ce théorème.

Envisageons, dans le plan tangent $xx^{10}x^{01}$ à la surface (x) au point x, une droite s ne passant pas par x. En observant que tout point de l'espace peut être représenté par

$$z_1 x + z_2 x^{10} + z_3 x^{01} + z_4 x^{11},$$

[1] *Alcuni risultati di geometria proiettiva-differenziale.* (« Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », 2° sem., 1923, pp. 321-326). *Sulle congruenze coniugate od armoniche ad una superficie data* (« Rend. Circolo matem. ». Palermo, 1925, pp. 201-205).

où z_1, z_2, z_3, z_4 sont appelées coordonnées locales du point, les équations locales de s peuvent s'écrire

$$z_1 + \alpha z_2 + \beta z_3 = 0, \quad z_4 = 0,$$

où α, β sont des fonctions de u, v.

Les points m, n où cette droite rencontre les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} à la surface (x) sont

$$m = \alpha x - x^{10}, \quad n = \beta x - x^{01}.$$

Nous avons

$$m^{10} = (\alpha^{10} + c_1)x + \alpha x^{10} + 2bx^{01},$$
$$n^{01} = (\beta^{01} + c_2)x + 2ax^{10} + \beta x^{01}$$

et les droites mm^{10}, nn^{01} se rencontrent en un point

$$\begin{vmatrix} x & x^{10} & x^{01} \\ 2b & 2b\alpha & -(\alpha^2 + \alpha^{10} + c_1) \\ 2a & -(\beta^2 + \beta^{01} + c_2) & 2a\beta \end{vmatrix}$$

du plan tangent $xx^{10}x^{01}$.

Nous avons d'autre part

$$m^{01} = \alpha^{01}x + \alpha x^{01} - x^{11},$$
$$n^{10} = \beta^{10}x + \beta x^{10} - x^{11}$$

et les droites mm^{01}, nn^{10} ont respectivement pour équations locales

$$z_1 + \alpha z_2 - (\log \alpha)^{01} z_3 = 0, \quad z_3 + \alpha z_4 = 0,$$
$$z_1 - (\log \beta)^{10} z_2 + \beta z_3 = 0, \quad z_2 + \beta z_4 = 0.$$

Pour que ces droites se rencontrent, on doit avoir

$$\alpha^{01} = \beta^{10}.$$

Il doit donc exister une fonction ρ de u, v telle que

$$\alpha = (\log \rho)^{10}, \quad \beta = (\log \rho)^{01}$$

et cette condition est nécessaire et suffisante. Le point de rencontre des deux droites est

$$y = m^{01} - m(\log \rho)^{01} = n^{10} - n(\log \rho)^{10}$$
$$= [(\log \rho)^{11} - (\log \rho)^{10}(\log \rho)^{01}]x + (\log \rho)^{01}x^{10} + (\log \rho)^{10}x^{01} - x^{11}$$

et nous avons

$$y = -\rho \left(\frac{x}{\rho}\right)^{11}.$$

Le droite $r = xy$ engendre donc une congruence (r) conjuguée à la surface (x). D'autre part, la droite s est la conjuguée de la droite r par rapport à la quadrique de LIE

$$z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2ab z^2_4 = 0$$

relative au point x, donc le congruence (s) engendrée par s est harmonique à (x).

Nous pouvons par conséquent énoncer le théorème suivant: *Si l'on prend deux points* m, n *sur les tangentes asymptotiques en un point* x *d'une surface* (x) *et si les plans tangents en* m, n *aux surfaces* (m), (n) *et à la quadrique de Lie relative au point* x *ont un point commun, la droite* mn *engendre une congruence harmonique à la surface* (x). *Le point de rencontre des quatre plans et le point* x *déterminent une droite engendrant une congruence conjuguée à la surface* (x).

Liège, le 10 décembre 1928.