

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5^e série, t. XV, nos 8-9.
Séance du 3 août 1929, pp. 702-710.

GÉOMÉTRIE. — Remarques sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface,

par LUCIEN GODEAUX, professeur à l'Université de Liège (*).

Les quadriques de Lie d'une surface (x) ont en général cinq points caractéristiques (**). Lorsque ces cinq points ne sont pas distincts, les asymptotiques se correspondent sur les différentes nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie (***). Lorsque ces cinq points sont distincts, nous avons déterminé la condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotiques se correspondent sur les cinq nappes de l'enveloppe (IV). Nous nous proposons de donner une interprétation géométrique de cette condition.

Parmi les points caractéristiques de la quadrique de Lie attachée au point x de la surface (x) se trouve le point x lui-même. Soit y_1 un autre point caractéristique de la quadrique de Lie. Nous allons établir que *La condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotiques se correspondent sur les différentes nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface (x) est que les plans focaux de la droite xy_1 passent par les foyers de la droite commune aux plans tangents en x , y_1 aux surfaces (x) , (y_1) .*

1. Conservons les notations de notre note citée plus haut.

(*) Présenté à la séance du 3 août.

(**) A. DEMOULIN, Sur la quadrique de Lie. (C. R., 1908, t. 147, pp. 493-496.)

(***) A. DEMOULIN, *loc. cit.*

(IV) Sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface. (Bull. Acad. roy. de Belgique, t. XV, 1929, pp. 37-53). Voir aussi une note ultérieure de M. FINIKOFF, Sur les congruences de M. Demoulin. (Rend. R. Accad. Lincei, 1^{er} sem. 1929, pp. 493-498.)

Les coordonnées de Wilczynski des points x de la surface (x) rapportée à ses asymptotiques u, v satisfont aux équations

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1x = 0,$$

$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2x = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les lignes u, v soient les asymptotiques sur les différentes nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface (x) s'exprime par l'une des relations équivalentes

$$a\alpha^{10} + 2\alpha a^{10} = 0, \quad b\beta^{01} + 2\beta b^{01} = 0, \quad (\log a\xi)^{40} = 0, \quad (\log b\eta)^{01} = 0,$$

où l'on a

$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{40}}^2 + 4(b^{01} + c_1),$$

$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2),$$

$$\xi^2 + \alpha = 0, \quad \eta^2 + \beta = 0.$$

2. Reprenons la suite de Laplace ..., (U), (V), ... de l'espace à cinq dimensions, les points U, V représentant les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} de la surface (x) sur l'hyperquadrique Q. Les points D_{11}, D_{12} et D_{21}, D_{22} où cette hyperquadrique est rencontrée respectivement par les droites U_1U_2, V_1V_2 représentent les arêtes du tétraèdre de Demoulin appartenant à la quadrique de Lie. Les points caractéristiques de la quadrique de Lie, autres que le point x , sont les sommets $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}$ de ce tétraèdre. Les faisceaux de rayons ayant ces points pour sommets respectifs et pour plans les plans tangents en ces points à la quadrique de Lie sont représentés sur Q par les droites $D_{11}D_{21}, D_{11}D_{22}, D_{12}D_{21}, D_{12}D_{22}$.

Désignons, pour abréger, par D_1 l'un des points D_{11}, D_{12} ; par D_2 l'un des points D_{21}, D_{22} ; par y_1 le sommet du tétraèdre de Demoulin correspondant à la droite D_1D_2 ; par l_1 la droite xy_1 ; par l'_1 la droite commune aux plans tangents en x, y_1 aux surfaces $(x), (y_1)$.

Nous avons

$$D_1 = [\eta - (\log b)^{01}]^2 U + 8abV + 2[\eta - (\log b)^{01}](M_1 - M_2) + 4M_4,$$

$$D_2 = 8abU + [\xi - (\log a)^{10}]^2 V + 2[\xi - (\log a)^{10}](M_1 + M_2) + 4M_3,$$

et

$$D_1^{10} = 2(\eta^{10} + h_1)(U + \eta U),$$

$$D_2^{01} = 2(\xi^{01} + k_1)(V + \xi V).$$

Posons

$$\left. \begin{aligned} L &= U + \eta U + V + \xi V = [\eta - (\log b)^{01}] U \\ &\quad + [\xi - (\log a)^{10}] V + 2M_1, \\ L' &= -U - \eta U + V + \xi V = -[\eta - (\log b)^{01}] U \\ &\quad + [\xi - (\log a)^{10}] V + 2M_2. \end{aligned} \right\}$$

Les points L , L' appartiennent à l'hyperquadrique Q et représentent deux droites conjuguées par rapport à la quadrique de Lie relative au point x de la surface (x) . Les équations de ces droites sont respectivement

$$\frac{z_2}{\eta - (\log b)^{01}} = \frac{z_3}{\xi - (\log a)^{10}} = \frac{z_4}{2},$$

$$2z_1 - [\xi - (\log a)^{10}] z_2 - [\eta - (\log b)^{01}] z_3 = 0. \quad z_4 = 0.$$

D'autre part, le point y_1 est donné par (*)

$$y_1 = [8ab - (\log a)^{10}(\log b)^{01} - \xi\eta + \eta(\log a)^{10} + \xi(\log b)^{01}]x \\ - 2[\eta - (\log b)^{01}]x^{10} - 2[\xi - (\log a)^{10}]x^{01} - 4x^{11}.$$

Ce point appartient à la première droite et par suite les points L , L' représentent respectivement les droites l_1 , l'_1 .

3. L'équation différentielle des développables de la congruence (l_1) est donnée par

$$\Omega(L^{10}du + L^{01}dv, L^{10}du + L^{01}dv) = 0.$$

Cette équation est donc

$$\left. \begin{aligned} [2b\eta - \xi(\log a\xi)^{10}]du^2 + (\eta^{10} + h_1 - \xi^{01} - k_1)dudv \\ - [2a\xi - \eta(\log b\eta)^{01}]dv^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(*) L. GODEAUX, Sur les directrices de Wilczynski et les quadriques de Lie d'une surface. (Bull. Acad. roy. de Belgique, t. XV, 1929, pp. 126-133.)

L'équation

$$\{2z_3 - [\xi - (\log a)^{40}]z_4\} du - \{2z_2 - [\eta - (\log b)^{01}]z_4\} dv = 0$$

représente, si du, dv vérifient l'équation (1), un plan focal de la droite l_1 . Par suite, l'équation quadratique des plans focaux de cette droite est

$$\left. \begin{aligned} & [2b\eta - \xi(\log a\xi)^{40}][2z_2 - \{\eta - (\log b)^{01}\}z_4]^2 \\ & + [\eta^{40} + h_4 - \xi^{01} - k_4][2z_2 - \{\eta - (\log b)^{01}\}z_4][2z_3 - \{\xi - (\log a)^{40}\}z_4] \\ & - [2a\xi - \eta(\log b\eta)^{01}][2z_3 - \{\xi - (\log a)^{40}\}z_4]^2 = 0. \end{aligned} \right\} (2)$$

4. L'équation différentielle des développables de la congruence (l'_1) est

$$\Omega(L^{40} du + L^{01} dv, L^{40} + L^{01} dv) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left. \begin{aligned} & [2b\eta + \xi(\log a\xi)^{40}] du^2 - (\eta^{40} + h_4 - \xi^{01} - k_4) du dv \\ & - [2a\xi + \eta(\log b\eta)^{01}] dv^2 = 0. \end{aligned} \right\} (3)$$

Le plan

$$[2z_3 - \{\xi - (\log a)^{40}\}z_4] du + [2z_2 - \{\eta - (\log b)^{01}\}z_4] dv = 0,$$

où du, dv satisfont à l'équation (3), coupe la droite l'_1 en un de ses foyers. Ceux-ci sont donc donnés par les sections de l'_1 et de la quadrique (dégénérée).

$$\left. \begin{aligned} & [2b\eta + \xi(\log a\xi)^{40}][2z_2 - \{\eta - (\log b)^{01}\}z_4]^2 \\ & + (\eta^{40} + h_4 - \xi^{01} - k_4)[2z_2 - \{\eta - (\log b)^{01}\}z_4][2z_3 - \{\xi - (\log a)^{40}\}z_4] \\ & - [2a\xi + \eta(\log b\eta)^{01}][2z_3 - \{\xi - (\log a)^{40}\}z_4]^2 = 0. \end{aligned} \right\} (4)$$

5. Pour avoir les intersections de la droite l'_1 avec les plans focaux de la droite l_1 et les foyers de la droite l'_1 , nous devons combiner les équations (2) et (4) avec les équations

$$z_4 = 0, \quad 2z_1 - [\xi - (\log a)^{40}]z_2 - [\eta - (\log b)^{01}]z_3 = 0$$

de l'_1 . Pour $z_4 = 0$, les équations (2) et (4) deviennent

$$\left. \begin{aligned} & [2b\eta - \xi(\log a\xi)^{40}]z_2^2 + (\eta^{40} + h_4 - \xi^{01} - k_1)z_2z_3 \\ & - [2a\xi - \eta(\log b\eta)^{01}]z_3^2 = 0, \end{aligned} \right\} (2')$$

$$\left. \begin{aligned} & [2b\eta + \xi(\log a\xi)^{40}]z_2^2 + (\eta^{40} + h_4 - \xi^{01} - k_1)z_2z_3 \\ & - [2a\xi + \eta(\log b\eta)^{01}]z_3^2 = 0 \end{aligned} \right\} (4')$$

Si les asymptotiques de la surface (y_1) sont les lignes u, v , c'est-à-dire si l'on a

$$(\log a\xi)^{10} = 0, \quad (\log b\eta)^{01} = 0, \quad (5)$$

les équations (2') et (4') sont identiques et les foyers de la droite l'_1 appartiennent aux plans focaux de l_1 . Inversement, pour que cette propriété ait lieu, c'est-à-dire que les équations (2'), (4') soient identiques, il faut que l'on ait

$$\xi(\log a\xi)^{10} = 0, \quad \eta(\log b\eta)^{01} = 0.$$

Si l'on a $\xi = 0$, $\eta = 0$, on a $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques. Les droites l_1, l'_1 sont les directrices de Wilczynski des deux nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie (*).

Si une seule des quantités ξ, η est nulle, par exemple si $\xi = 0$, on a $\alpha = 0$ et les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques.

Si aucune des quantités ξ, η n'est nulle, les relations (5) sont vérifiées.

Dans tous les cas, les asymptotiques des nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie se correspondent et le théorème énoncé au début est démontré.

6. Supposons, pour plus de simplicité dans l'exposé, que les quadriques de Lie de la surface (x) aient cinq points caractéristiques distincts. Les droites U_1U_2, V_1V_2 coupent l'hyperquadrique Q en des points distincts. S'il y a conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface (x) , un des points de rencontre D_1 de la droite U_1U_2 avec Q , par exemple, engendre un réseau (D_1) conjugué à la congruence (U_1U_2) . Le réseau (D_1) détermine une suite de Laplace inscrite dans la suite..., $U, V, \dots$ Le

(*) L. GODEAUX, Sur les Surfaces ayant mêmes quadriques de Lie. (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, t. XIV, 1928, pp. 158-186, 345-348)

transformé de Laplace de D_1 dans le sens des u est un point de la droite UU_1 ; le second transformé de D_1 dans le même sens est un point J de la droite UV . Le point J est l'image d'une tangente j à la surface (x) au point x et cette droite engendre une congruence W ayant la surface (x) comme surface focale.

Inversement, soit (j) une congruence W ayant (x) comme surface focale. D'après un théorème de M. Demoulin (*), le point J image d'une droite j sur l'hyperquadrique Q engendre un réseau (J) conjugué à la congruence (UV) . Soient J_1, J_2 les transformés de Laplace de J dans le sens des v . Le point J_1 appartient à la droite UU_1 et le point J_2 à la droite U_1U_2 , la suite de Laplace..., $J, J_1, J_2, \dots$ étant inscrite dans la suite..., $U, V, \dots$. Si le point J_2 appartient à l'hyperquadrique Q , il coïncide avec l'un des points D_1 représentant une arête du tétraèdre de Demoulin appartenant à la quadrique de Lie. Il y a alors conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface (x) .

Considérons la surface réglée R_v engendrée par les droites j de la congruence (j) touchant la surface (x) aux points d'une asymptotique v (sur laquelle v varie). La section de l'hyperquadrique Q par le plan JJ_1J_2 représente la demi-quadrique osculatrice à la réglée R_v suivant la droite j de cette réglée correspondant au point J .

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface (x) , est qu'il existe une congruence W ayant (x) comme surface focale, telle que les quadriques osculatrices aux réglées engendrées par les droites de cette congruence s'appuyant sur les asymptotiques d'une famille de la surface (x) , contiennent une des arêtes du

(*) A. DEMOULIN, Sur les Surfaces R. (C. R., 1911, t. 153, pp. 797-799.)

tétraèdre de Demoulin appartenant à la quadrique de Lie correspondante.

Ce théorème reste vrai lorsque les points caractéristiques de la quadrique de Lie ne sont pas distincts, car si la droite U_1U_2 , par exemple, touche l'hyperquadrique Q , le point D_1 coïncide avec U_2 et le point J avec le point U .

7. Pour que le point

$$J = \lambda U - \mu V$$

représente une droite engendrant une congruence W ayant (x) comme surface focale, il faut, d'après le théorème de M. Demoulin invoqué plus haut, que l'on ait

$$\lambda^{01} + 2a\mu = 0, \quad \mu^{10} + 2b\lambda = 0. \quad (1)$$

Nous avons alors (*)

$$J_1 = \left(\log \frac{b}{\mu} \right)^{01} U + U_1,$$

$$J_2 = \left[\left(\log \frac{b}{\mu} \right)^{01} - \left(\log \frac{H\mu}{\lambda} \right)^{01} \right] U_1 + U_1^{01},$$

où l'on a posé

$$H = -(\log \mu)^{11} + 4ab.$$

Si le point J_2 appartient à l'hyperquadrique Q , la droite J_1J_2 est tangente à celle-ci en J_2 et l'on a

$$\Omega(J_2, J_2) = 0, \quad \Omega(J_1, J_2) = 0.$$

Cela donne

$$\left(\log \frac{b}{\mu} \right)^{01} = \tau_1, \quad \left(\log \frac{H\mu}{\lambda} \right)^{01} = 0, \quad (2)$$

τ_1 étant une racine de l'équation

$$\tau^2 + \beta = 0.$$

(*) L. GODEAUX, Sur quelques familles de quadriques attachées aux points d'une surface. (*Annales de la Société polonaise de Mathématique*, 1928, pp. 213-226.)

Observons que moyennant (1), on a

$$H = -(\log \mu)^{40} \left(\log \frac{b}{\mu} \right)^{01} = 2b \frac{\lambda}{\mu} \left(\log \frac{b}{\mu} \right)^{01}.$$

Par suite, la seconde des conditions (2) devient

$$(\log b)^{01} + \left(\log \frac{b}{\mu} \right)^{02} = 0,$$

équivalente à la relation

$$(\log b \gamma)^{01} = 0.$$

Le point

$$U_1^{40} = (h_1 + \gamma^{40}) [U_1 + \gamma U]$$

coïncide avec le point J_1 et le point

$$[U_1 + \gamma U]^{49} = (h_1 + \gamma^{40}) U - 2b \gamma V$$

avec le point J . On a donc

$$\frac{\lambda}{h_1 + \gamma^{40}} = \frac{\mu}{-2b\gamma}.$$

On observera que l'on a

$$\Omega(J_1, J_1) = -2\Delta$$

et que par suite le point J_1 ne peut appartenir à l'hyperquadrique Q . De plus, on a

$$J_1^{41} - HJ_1 = 0$$

et le point J_1 engendre un réseau à invariants égaux.

8. Si D_{11} , D_{12} , D_{21} , D_{22} sont les images sur l'hyperquadrique Q des quatre génératrices du tétraèdre de Demoulin appartenant à la quadrique de Lie, il leur correspond, lorsqu'il y a conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie, quatre droites engendrant des congruences W et représentées sur Q par les points

$$\left. \begin{aligned} J_{11} &= (h_1 + \gamma^{40}) U - 2b \gamma V, & J_{12} &= (h_1 - \gamma^{40}) U + 2b \gamma V, \\ J_{21} &= -2a \xi U + (k_1 + \xi^{01}) V, & J_{22} &= 2a \xi U + (k_1 - \xi^{01}) V, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

où ξ , η sont des solutions déterminées des équations

$$\xi^2 + \alpha = 0, \quad \eta^2 + \beta = 0.$$

Les points J_{11} et J_{12} ne peuvent coïncider que si D_{11} , D_{12} coïncident avec U_2 et l'on a alors $\eta = 0$. De même J_{21} et J_{22} ne peuvent coïncider que si D_{21} , D_{22} coïncident avec V_2 et l'on a dans ce cas $\xi = 0$. Pour que les points J_{11} , J_{21} , par exemple, coïncident, on doit avoir

$$\frac{h_1 + \eta^{10}}{-2a\xi} = \frac{-2b\eta}{k_1 + \xi^{01}}.$$

Mais alors, les quadriques de Lie de la surface (x) sont tangentes à un plan (*). Les quatre points (3) seront donc en général distincts.

Liège, le 9 juillet 1929.

(*) L. GODEAUX, Sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, t. XV, 1929, pp. 37-53.)