ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XV, n° 2.
Séance du 2 février 1929, pp. 126-133.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE.

Sur les directrices de Wilczynski et les quadriques de Lie d'une surface,

par L. GODEAUX, professeur à l'Université de Liége.

Dans quelques notes parues récemment (*), nous avons étudié certaines questions de géométrie projective différentielle des surfaces. Nous nous proposons de compléter nos recherches en établissant certaines relations entre les directrices de Wilczynski et la quadrique de Lie attachées en un point d'une surface.

1. — Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives normales de Wilczynski $x_1, x_2, x,_3 x_4$, d'un point x de cette surface satisfont au système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles (**).

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0.$$

Nous supposerons la surface (x) non réglée, c'est-à-dire que les fonctions a, b ne sont pas nulles.

Un point x de la surface étant choisi, nous appellerons coordonnées locales d'un point des quantités z_1, z_2, z_3, z_4 telles que les coordonnées générales du point s'expriment par

$$z_1 x + z_2 x^{10} + z_3 x^{01} + z_4 x^{11},$$

où x est successivement affecté des indices 1, 2, 3, 4 Le point x étant supposé non parabolique, les coordonnées locales

(*) *Bulletins de l'Acad. roy. de Belgique*, 1927 et 1928.

(**) WILCZYNSKI, Projective differential geometry of curved surfaces. (*Transactions of the American Mathem. Society*, 1907, t. VIII, pp. 233-260; 1908, t. IX, pp. 79-120.)

d'un point sont donc ses coordonnées par rapport au tétraèdre de référence $x\,x^{10}\,x^{01}\,x^{11}$.

Les équations locales des directrices de Wilczynski r, s de la surface (x) relatives au point x sont (*)

$$\frac{z_2}{(\log b)^{01}} = \frac{z_3}{(\log a)^{10}} = \frac{z_4}{-2}, \qquad (r)$$

$$2z_1 + z_2(\log a)^{10} + z_3(\log b)^{01} = 0, \quad z_4 = 0. \qquad (s)$$

La quadrique de Lie Φ relative au point x a pour équation locale

$$z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2ab z_4^2 = 0. \qquad (\Phi)$$

Les droites r, s sont conjuguées par rapport à la quadrique Φ.

La droite r rencontre la quadrique de Lie Φ au point x et en un point

$$y = [8ab - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]\,x + 2(\log b)^{01}x^{10} + 2(\log a)^{10}x^{01} - 4x^{11}.$$

La droite s rencontre Φ aux points

$$m' = x(\log a)^{10} - 2x^{10}, \qquad n' = x(\log b)^{01} - 2x^{01}$$

appartenant aux tangentes asymptotiques $x\,x^{10}$, $x\,x^{01}$ de la surface (x) au point x.

2. — L'équation différentielle des développables des congruences (r), (s) est (**)

$$\alpha du^2 + 2\left(\log \frac{a}{b}\right)^{11} du dv - \beta dv^2 = 0. \qquad (1)$$

Appelons éléments focaux homologues des droites r, s ceux

(*) Voir notre note : Sur les congruences formées par les directrices de Wilczynski d'une surface. (*Bulletins de l'Acad. roy. de Belgique,* 1928, pp. 335 345.)

(**) Sur les Congruences... (*Loc. cit.*)

de ces éléments qui correspondent à la même solution de l'équation (1).

En posant

$$\varphi = \sqrt{\left(\log \frac{a}{b}\right)^{11^2} + \alpha\beta},$$

les foyers p, q de la droite r sont donnés par

$$p = y + [8ab - (\log ab)^{11} + \varphi]\, x,$$
$$q = y + [8ab - (\log ab)^{11} - \varphi]\, x.$$

Les plans focaux de la droite s respectivement homologues des foyers p, q de r rencontrent cette droite aux points

$$m_1' = y - [8ab - (\log ab)^{11} - \varphi]\, x,$$
$$n_1' = y - [8ab - (\log ab)^{11} + \varphi]\, x.$$

Observons maintenant que tout point de la droite r peut s'écrire sous la forme $\lambda\, p + \mu\, q$. Deux points (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2), conjugués par rapport à la quadrique Φ, donnent lieu à la relation

$$\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 = 0.$$

On en conclut que les points p, q sont respectivement conjugués des points n'_1, m'_1 par rapport à Φ.

Chaque foyer de la directrice de Wilczynski r *et le point où cette droite est rencontrée par le plan focal non homologue de la directrice* s *sont conjugués par rapport à la quadrique de Lie.*

3. — On obtient une proposition analogue relative à la droite s.

Les foyers m, n de cette droite sont donnés par

$$m = \left[\left(\log \frac{a}{b}\right)^{11} - \varphi\right] m' + \alpha n',$$

$$n = \left[\left(\log \frac{a}{b}\right)^{11} + \varphi\right] m' + \alpha n'.$$

Les plans focaux de la droite r, respectivement homologues des foyers m, n de la droite s, rencontrent cette droite aux points

$$p' = -\left[\left(\log \frac{a}{b}\right)^{11} - \varphi\right] m' + \alpha n';$$

$$q' = -\left[\left(\log \frac{a}{b}\right)^{11} + \varphi\right] m' + \alpha n'.$$

Les points de la droite s pouvant être représentés par $\lambda m' + \mu n'$, deux points (λ_1, μ_1), $(\lambda_2 \mu_2)$ conjugués par rapport à la quadrique de Lie Φ donnent lieu à la relation

$$\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 = 0.$$

Par suite, les points m', n' sont respectivement conjugués des points p', q' par rapport à Φ.

Chaque foyer de la directrice de Wilczynski s *et le point où cette droite est rencontrée par le plan focal homologue de la directrice* r *sont conjugués par rapport à la quadrique de Lie.*

4. Les sommets du tétraèdre de Demoulin de la surface (x) relatifs au point x, supposés distincts, sont donnés par (*)

$$\zeta_{11} = y - \xi\eta x + \eta m' + \xi n',$$
$$\zeta_{12} = y + \xi\eta x + \eta m' - \xi n',$$
$$\zeta_{21} = y + \xi\eta x - \eta m' + \xi n',$$
$$\zeta_{22} = y - \xi\eta x - \eta m' - \xi n',$$

ξ et η étant deux racines déterminées des équations

$$\xi^2 + \alpha = 0, \qquad \eta^2 + \beta = 0.$$

Appelons z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22} les coordonnées d'un point par rapport au tétraèdre de Demoulin. On passe de ces coordonnées

(*) Sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface. (*Bulletins de l'Acad. roy. de Belgique*, 1929, pp. 35-52.)

aux coordonnées locales au moyen des formules suivantes, où nous avons posé

$$\psi = 4z_1 + 2(\log a)^{10}z_2 + 2(\log b)^{01}z_3 + [8ab + (\log a)^{10}(\log b^{01})]z_4 = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} \rho z_{11} &= \psi + \xi[2z_2 + z_4(\log b)^{01}] + \eta[2z_3 + z_4(\log a)^{10}] + \xi\eta z_4, \\ -\rho z_{12} &= \psi - \xi[2z_2 + z_4(\log b)^{01}] + \eta[2z_3 + z_4(\log a)^{10}] - \xi\eta z_4, \\ -\rho z_{21} &= \psi + \xi[2z_2 + z_4(\log b)^{04}] - \eta[2z_3 + z_4(\log a)^{10}] - \xi\eta z_4, \\ \rho z_{22} &= \psi - \xi[2z_2 + z_4(\log b)^{01}] - \eta[2z_3 + z_4(\log a)^{10}] + \xi\eta z_4. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Les seconds membres de ces équations, égalés à zéro, représentent les faces du tétraèdre de Demoulin respectivement opposées aux sommets ζ_{11}, ζ_{12}, ζ_{21}, ζ_{22}.

Au moyen des formules (2), on voit que le point y a pour coordonnées

$$z_{11} = z_{12} = z_{21} = z_{22}$$

et que le plan $z_4 = 0$, tangent en x à la surface (x), a pour équation

$$z_{11} + z_{12} + z_{21} + z_{22} = 0.$$

Par suite, *le point où la directrice de Wilczynski* r *rencontre la quadrique de Lie en dehors du point* x *est le pôle du plan tangent en* x *à la surface* (x), *par rapport au tétraèdre de Demoulin*.

Corrélativement, on peut mener par s deux plans tangents à la quadrique de Lie; l'un est le plan tangent en x à la surface (x), l'autre est le plan

$$\psi = 0$$

dont le point de contact avec Φ est le point y et qui est le plan polaire du point x par rapport au tétraèdre de Demoulin.

5. — Quatre des arêtes du tétraèdre de Demoulin, les droites $\zeta_{11}\zeta_{12}$, $\zeta_{12}\zeta_{22}$, $\zeta_{22}\zeta_{21}$, $\zeta_{21}\zeta_{11}$, appartiennent à la quadrique de Lie. Les quadriques passant par ces droites ont pour équation

$$z_{11}z_{22} + \lambda z_{12}z_{21} = 0.$$

Le lieu du pôle du plan tangent à la surface (x) au point x, par rapport à ces quadriques, est la droite

$$z_{11} = z_{22}, \qquad z_{12} = z_{21},$$

c'est-à-dire, comme on le voit par les équations (2), précisément la droite r.

Parmi les quadriques considérées se trouve la quadrique Φ_1 (*) ; par suite,

La directrice de Wilczynski passant par le point x *est le lieu des pôles du plan tangent à la surface* (x) *au point* x, *par rapport aux quadriques du faisceau déterminé par* Φ *et* Φ_1.

De même,

La directrice de Wilczynski située dans le plan tangent en x *à la surface* (x) *appartient aux plans polaires du point* x *par rapport aux quadriques du faisceau déterminé par* Φ, Φ_1.

Notons en passant que la quadrique de Lie Φ a pour équation

$$x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} = 0 \tag{3}$$

et la quadrique Φ_1,

$$[a\alpha^{10} + 2\alpha a^{10} + 4ab\xi\eta]\, z_{11}z_{22} - [a\alpha^{10} + 2\alpha a^{10} - 4ab\xi\eta]\, z_{12}z_{21} = 0. \tag{4}$$

Cette dernière équation doit être symétrique par rapport à a, b; c'est ce qui a effectivement lieu, car on a identiquement

$$a\alpha^{10} + 2\alpha a^{10} = b\beta^{01} + 2\beta b^{01}. \tag{5}$$

6. — Deux des arêtes du tétraèdre de Demoulin, les droites $\zeta_{11}\zeta_{22}$, $\zeta_{12}\zeta_{21}$, n'appartiennent pas à la quadrique de Lie et sont conjuguées par rapport à cette quadrique. On sait que ces droites s'appuient sur les directrices r, s de Wilczynski.

(*) Pour la définition de la quadrique Φ_1, voir notre note : Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé. (*Bulletins de l'Acad. roy. de Belgique*, 1927, pp. 812-826.)

Le point

$$g_{11} = \frac{1}{2}(\zeta_{11} + \zeta_{22}) = y - \xi\eta x$$

et le point

$$g_{21} = \frac{1}{2}(\zeta_{12} + \zeta_{21}) = y + \xi\eta x$$

sont les points d'appui de r respectivement sur $\zeta_{11}\zeta_{22}$, $\zeta_{12}\zeta_{21}$.

De même, les points

$$g_{12} = \frac{1}{2}(\zeta_{11} - \zeta_{22}) = \eta m' + \xi n',$$

$$g_{22} = \frac{1}{2}(\zeta_{12} - \zeta_{21}) = \eta m' - \xi n'$$

sont les points d'appui de s sur les mêmes droites.

Les droites $\zeta_{11}\zeta_{22}$, $\zeta_{12}\zeta_{21}$ sont conjuguées par rapport à toutes les quadriques du faisceau déterminé par les quadriques Φ, Φ_1. De même, les droites r, s sont conjuguées par rapport à toutes les quadriques du même faisceau. Par suite, les points $g_{11}, \ldots, g_{22}$ sont les sommets d'un tétraèdre autopolaire par rapport à toutes les quadriques du faisceau envisagé.

Les points d'appui des directrices de Wilczynski sur les arêtes du tétraèdre de Demoulin n'appartenant pas à la quadrique de Lie, sont les sommets d'un tétraèdre autopolaire par rapport aux quadriques du faisceau déterminé par Φ *et* Φ_1.

7. — Lorsque les quadriques de Lie d'une surface (x) n'ont que deux points caractéristiques, ceux-ci sont les points x, y, et dans la correspondance entre les surfaces (x), (y), les asymptotiques sont conservées (*). Il n'en est plus de même lorsque la quadrique de Lie a cinq points caractéristiques ; dans ce cas,

(*) Voir Demoulin, Sur la quadrique de Lie (*C. R.*, 1908, t. CXLVII, pp. 493-496); Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques (*C. R.*, 1924, t. CLXXIX, pp. 20-23). Voir aussi notre travail : Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie. (*Bulletins de l'Acad. roy. de Belgique*, 1928, pp. 158-186 et 345-348.)

les lignes u, v ne sont en général des asymptotiques ni sur la surface (y), ni sur les surfaces (ζ_{11}), (ζ_{12}), (ζ_{21}), (ζ_{22}).

Pour la surface (y), on a

$$
\begin{gathered}
2y^{10} + y\,(\log a)^{10} = 2h_1 m' - \alpha n' - 4b\beta x, \\
2y^{01} + y\,(\log b)^{01} = -\beta m' + 2k_1 n' - 4a\alpha x,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
& 4y^{20} + 2y^{10}(\log a)^{10} + y[\alpha + 2(\log a)^{20}] = 2[2h_1^{10} - h_1(\log a)^{10} + 2b\beta]\,m' \\
& \qquad - [2\alpha^{10} + \alpha(\log a)^{10} + 8b\beta]\,n' + 4[\alpha h_1 - b\beta(\log ab^2\beta^2)^{10}]\,x, \\
& 4y^{11} + 2y^{10}(\log b)^{01} + 2y^{01}(\log a)^{10} + y[2(\log ab)^{11} + (\log a)^{10}(\log b)^{01} - 8ab] \\
& \qquad = 2(2b\beta - \beta^{10})\,m' + 2(2a\alpha - \alpha^{01})\,n' \\
& \qquad - [\alpha\beta + 4h_1k_1 + 4(b\beta)^{01} + 4(a\alpha)^{10} + 4b\beta(\log a)^{10} + 4a\alpha(\log b)^{01}]\,x, \\
& 4y^{02} + 2y^{01}(\log b)^{01} + y[\beta + 2(\log b)^{02}] = -[2\beta^{01} + \beta(\log b)^{01} + 8a\alpha]\,m' \\
& \qquad + 2[2k_1^{01} - k_1(\log b)^{01} + 2a\alpha]\,n' + 4[\beta k_1 - a\alpha(\log ba^2\alpha^2)^{01}]\,x.
\end{aligned}
$$

D'autre part, nous avons montré (*) que pour que les asymptotiques soient les lignes u, v sur les surfaces (ζ_{11}), ..., (ζ_{22}), il faut et il suffit que l'on ait

$$
a\alpha^{10} + 2\alpha a^{10} = b\beta^{01} + 2b\beta^{01} = 0, \tag{6}
$$

l'une de ces conditions entraînant l'autre en vertu de la relation (5).

Observons que si la condition (6) est remplie, la quadrique Φ_1, représentée par l'équation (4), et sa polaire réciproque par rapport à la quadrique de Lie Φ, polaire réciproque qui a pour équation

$$
[a\alpha^{10} + 2\alpha\alpha^{10} - 4ab\xi\eta]\,z_{11}z_{22} - [a\alpha^{10} + 2\alpha a^{10} + 4ab\xi\eta]\,z_{12}z_{21} = 0, \tag{7}
$$

coïncident. Inversement, si les quadriques (4) et (7) coïncident, la condition (6) est satisfaite. Par suite,

Si les quadriques de Lie d'une surface ont cinq points caractéristiques, la condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotiques se correspondent sur toutes les nappes de la surface-enveloppe de ces quadriques, est que la quadrique Φ_1 soit sa propre polaire réciproque par rapport à la quadrique de Lie Φ.

Liége, 15 octobre 1928.

(*) Sur l'enveloppe... (*Loc. cit.*)

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.