GÉOMÉTRIE

SUR
LES CORRESPONDANCES PONCTUELLES ENTRE SURFACES

PAR

L. GODEAUX, professeur à l'Université de Liége

Dans nos recherches sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique, nous avons été conduit au problème suivant : Soit F une surface algébrique appartenant à un espace linéaire S_r à r dimensions et transformée en elle-même par une homographie cyclique H de cet espace. Considérons un point uni P de l'homographie H appartenant à F. Dans le plan tangent à F en P, l'homographie H détermine une homographie qui peut être une homologie de centre P. Les plans osculateurs en P aux différentes courbes tracées sur F et passant par ce point appartiennent à un espace linéaire ayant en général cinq dimensions, S_5. Cet espace S_5 est transformé en lui-même par l'homographie H et celle-ci détermine donc dans S_5 une homographie. Comment peuvent se distribuer les éléments unis de cette homographie? C'est ce problème que nous étudions dans cette note. Les méthodes utilisées sont empruntées à la géométrie projective différentielle.

1. Considérons, dans un espace linéaire S_r à r ($r \geq 5$) dimensions, une surface (X) lieu d'un point X dont les coordonnées projectives homogènes $X_0, X_1, \ldots, X_r$ sont des fonctions effectives de deux paramètres u, v. Nous supposerons que les coordonnées du point X ne sont pas solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre (*).

Pour abréger nous poserons

$$X^{ik} = \frac{\partial^{i+k} X}{\partial u^i \partial v^k}.$$

Considérons une courbe C, donnée par les équations

$$u = u(t), \qquad v = v(t),$$

où les fonctions $u(t)$, $v(t)$ sont continues et différentiables jusqu'au second ordre au moins, les dérivées étant continues. Supposons que la courbe C passe par un point générique X de la surface (X), ce point étant ordinaire pour la courbe.

La tangente au point X à la courbe C est déterminée par les points

$$X, \qquad \Omega_1 = u' X^{10} + v' X^{01}.$$

La droite $X^{10}X^{01}$ ne passe d'ailleurs pas par le point X d'après les hypothèses faites.

Le plan osculateur au point X à la courbe C est déterminé par les points

$$X, \quad \Omega_1, \quad \Omega_2 = u'^2 X^{20} + 2u'v' X^{11} + v'^2 X^{02} + u'' X^{10} + v'' X^{01}.$$

D'après les hypothèses faites, il n'existe aucune relation entre les points X, X^{10}, X^{01}, X^{20}, X^{11}, X^{02} et ces points déterminent un espace linéaire à cinq dimensions Σ_5, lieu des plans

(*) Nous supposons les fonctions X de u, v continues et différentiables deux fois au moins, les dérivées partielles étant continues.

osculateurs aux différentes courbes tracées sur la surface (X) et passant par X (*).

2. Tout point de l'espace Σ_5 peut être représenté par

$$x_0 X + x_1 X^{10} + x_2 X^{01} + x_3 X^{20} + x_4 X^{11} + x_5 X^{02}$$

et nous pouvons prendre $x_0, x_1, \ldots, x_5$ comme coordonnées projectives de ce point dans cet espace. Les points X, Ω_1, Ω_2 sont alors donnés par

$$X\,(x_1 = x_2 = \cdots = x_5 = 0),$$

$$\Omega_1\left(x_0 = 0, \quad \frac{x_1}{u'} = \frac{x_2}{v'}, \quad x_3 = x_4 = x_5 = 0\right),$$

$$\Omega_2\left(x_0 = 0, \quad \frac{x_1}{u''} = \frac{x^2}{v''} = \frac{x_3}{u'^2} = \frac{x_4}{2u'v'} = \frac{x_5}{v'^2}\right).$$

Désignons par Σ_4 l'espace linéaire à quatre dimensions représenté par $x_0 = 0$ et déterminé par suite par les points X^{10}, X^{01}, X^{20}, X^{11}, X^{02}. La droite $\Omega_1\Omega_2$ de cet espace détermine le plan osculateur à la courbe C au point X; nous allons écrire les équations de cette droite dans Σ_4.

Observons tout d'abord que la droite $\Omega_1\Omega_2$ se trouve dans le plan

$$\frac{x_3}{u'^2} = \frac{x_4}{2u'v'} = \frac{x_5}{v'^2},$$

c'est-à-dire

$$2v'x_3 - u'x_4 = 0, \qquad 2u'x_5 - v'x_4 = 0. \tag{1}$$

Cherchons maintenant l'équation d'un hyperplan de Σ_4 passant par les points X^{20}, X^{02}, Ω_1, Ω_2. Si l'équation de cet hyperplan est

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_4 x_4 = 0,$$

nous devons avoir

$$a_1 u' + a_2 v' = 0, \qquad a_1 u'' + a_2 v'' + 2a_4 u'v' = 0.$$

(*) Cf. C. Segre, *Su una classe di superficie degl' iperspazi, legata colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine.* (Atti R. Accad. di Torino, 1907, t. XLII, pp. 1047-1079.)

Par suite, l'équation devient

$$2u'v'(v'x_1 - u'x_2) + (u'v'' - u''v')x_4 = 0. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) représentent la droite $\Omega_1\Omega_2$ dans Σ_4 ou encore le plan osculateur à la courbe C en X dans Σ_5.

Le plan (1) rencontre le plan $X^{20}X^{11}X^{02}$ au point

$$x_0 = x_1 = x_2 = 0, \qquad x_3 : x_4 : x_5 = u'^2 : 2u'v' : v'^2. \qquad (3)$$

Le lieu de ce point est la conique Γ_2 d'équations

$$x_0 = x_1 = x_2 = 0, \qquad x_4^2 - 4x_3x_5 = 0,$$

et les équations (3) montrent qu'il existe une projectivité entre cette conique et la droite $X^{10}X^{01}$. La droite joignant le point (3) à son homologue Ω_1 de $X^{10}X^{01}$ engendre une surface cubique Δ_3 de Σ_4, d'équations

$$x_0 = 0, \qquad \begin{Vmatrix} x_1 & 2x_3 & x_4 \\ x_2 & x_4 & 2x_5 \end{Vmatrix} = 0.$$

Le plan (1) est tangent à cette surface au point Ω_1. On en conclut que le plan osculateur à la courbe C en X est déterminé par ce point et par une droite passant par le point Ω_1 et située dans le plan tangent en ce point à la surface Δ_3.

3. Considérons une seconde surface (Y) de S_r, lieu d'un point Y dont les coordonnées projectives homogènes sont fonctions de deux paramètres u_1, v_1. Nous supposerons d'ailleurs que la surface (Y) satisfait aux mêmes conditions que la surface (X).

Supposons qu'il existe entre les surfaces (X), (Y) une correspondance

$$u_1 = \alpha(u, v), \qquad v_1 = \beta(u, v), \qquad (4)$$

cette correspondance étant continue et biunivoque dans le voisinage de deux points homologues génériques X, Y que nous allons considérer.

A la courbe C correspond, sur la surface (Y), une courbe C′ donnée par

$$u_1 = u_1(t), \qquad v_1 = v_1(t)$$

et passant par le point Y homologue de X. Le plan osculateur en Y à la courbe C′ appartient à un espace linéaire Σ_5', à cinq dimensions, déterminé par les points Y, Y^{10}, Y^{01}, Y^{20}, Y^{11}, Y^{02}. Les coordonnées projectives d'un point de Σ_5' étant déterminées par

$$y_0 Y + y_1 Y^{10} + y_2 Y^{01} + y_3 Y^{20} + y_4 Y^{11} + y_5 Y^{02},$$

le plan osculateur à C′ en Y est donné par les points

$$Y\,(y_1 = y_2 = \cdots = y_5 = 0),$$

$$\Omega_1'\left(y_0 = 0, \quad \frac{y_1}{u_1'} = \frac{y_2}{v_1'}, \quad y_3 = y_4 = y_5 = 0\right),$$

$$\Omega_2'\left(y_0 = 0, \quad \frac{y_1}{u_1''} = \frac{y_2}{v_1''} = \frac{y_3}{u_1'^2} = \frac{y_4}{2u_1'v_1'} = \frac{y_5}{v_1'^2}\right).$$

Considérons les équations

$$\left.\begin{aligned}
\rho y_1 &= \alpha^{10}x_1 + \alpha^{01}x_2 + \alpha^{20}x_3 + \alpha^{11}x_4 + \alpha^{02}x_5,\\
\rho y_2 &= \beta^{10}x_1 + \beta^{01}x_2 + \beta^{20}x_3 + \beta^{11}x_4 + \beta^{02}x_5,\\
\rho y_3 &= \overline{\alpha^{10}}^2 x_3 + \alpha^{10}\alpha^{01}x_4 + \overline{\alpha^{01}}^2 x_5,\\
\rho y_4 &= 2\alpha^{10}\beta^{10}x_3 + (\alpha^{10}\beta^{01} + \alpha^{01}\beta^{10})\,x_4 + 2\alpha^{01}\beta^{01}x_5,\\
\rho y_5 &= \overline{\beta^{10}}^2 x_3 + \beta^{10}\beta^{01}x_4 + \overline{\beta^{01}}^2 x_5.
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Elles établissent une homographie entre Σ_4 et l'espace Σ_4' de Σ_5' donné par $y_0 = 0$. Dans cette homographie, Ω_1' correspond à Ω_1, Ω_2' à Ω_2.

Les équations (5) établissent, entre les gerbes de sommets X, Y des espaces Σ_5, Σ_5', une homographie dans laquelle se correspondent les plans osculateurs en X, Y aux courbes homologues dans la correspondance (4).

4. Supposons maintenant les surfaces (X), (Y) coïncidentes. Les formules (4) établissent donc une correspondance entre les points de la surface (X). Si le point X considéré plus haut est un point uni de cette correspondance dans le voisinage duquel celle-ci est continue et biunivoque, le point Y coïncide avec X et les espaces Σ'_5, Σ'_4 coïncident respectivement avec Σ_5, Σ_4. Les intersections $\Omega_1\Omega_2$, $\Omega'_1\Omega'_2$ avec Σ_4 des plans osculateurs en X à deux courbes homologues se correspondent dans l'homographie (5).

L'équation caractéristique de l'homographie (5) est

$$\begin{vmatrix} \alpha^{10}-\rho & \alpha^{01} & \alpha^{20} & \alpha^{11} & \alpha^{02} \\ \beta^{10} & \beta^{01}-\rho & \beta^{20} & \beta^{11} & \beta^{02} \\ 0 & 0 & \overline{\alpha^{10}}^{2}-\rho & \alpha^{10}\alpha^{01} & \overline{\alpha^{01}} \\ 0 & 0 & 2\alpha^{10}\beta^{10} & \alpha^{10}\beta^{01}+\alpha^{01}\beta^{10}-\rho & 2\alpha^{01}\beta^{01} \\ 0 & 0 & \overline{\beta^{10}}^{2} & \beta^{10}\beta^{01} & \overline{\beta^{01}}^{2}-\rho \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Désignons par ρ_1, ρ_2 les racines de l'équation

$$(\alpha^{10}-\rho)(\beta^{01}-\rho)-\alpha^{01}\beta^{10}=0$$

et écrivons cette équation sous la forme

$$\rho^2 - A\rho + B = 0,$$

en posant

$$A = \alpha^{10} + \beta^{01}, \qquad B = \alpha^{10}\beta^{01} - \alpha^{01}\beta^{10}.$$

Il est facile de voir que l'équation (6) se réduit à

$$(\rho^2 - A\rho + B)[\rho^3 - (A^2 - B)\rho^2 + B(A^2 - B)\rho - B^3] = 0.$$

Les racines de l'équation (6) sont donc ρ_1, ρ_2, ρ_1^2, $\rho_1\rho_2$, ρ_2^2.

5. Arrivons au problème que nous nous sommes posé. Supposons que la transformation (4) de la surface (X) en elle-même soit déterminée par une homographie cyclique H de S_r. Le point X considéré plus haut étant uni par cette homographie, celle-ci échange entre eux les plans osculateurs en ce point aux différentes courbes tracées sur la surface. Par suite, H transforme en lui-même l'espace Σ_5 et détermine nécessairement, dans cet espace, l'homographie (5).

Dans le cas actuel, l'homographie (5) est donc cyclique et par suite ne peut être spéciale.

La droite $X^{10}X^{01}$ est transformée en elle-même suivant l'homographie binaire

$$\left.\begin{aligned} \rho y_1 &= \alpha^{10}x_1 + \alpha^{01}x_2, \\ \rho y_2 &= \beta^{10}x_1 + \beta^{01}x_2. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Deux cas peuvent se présenter :

1° L'homographie (7) est l'identité;

2° L'homographie (7) n'est pas identique.

Envisageons le premier cas. *Pour les valeurs de* u, v *qui correspondent au point* X, on a

$$\rho_1 = \rho_2 = \alpha^{10} = \beta^{01}, \qquad \alpha^{01} = \beta^{10} = 0.$$

Les équations de l'homographie (5) deviennent

$$\begin{aligned} \rho y_1 &= \rho_1 x_1 + \alpha^{20}x_3 + \alpha^{11}x_4 + \alpha^{02}x_5, \\ \rho y_2 &= \rho_1 x_2 + \beta^{20}x_3 + \beta^{11}x_4 + \beta^{02}x_5, \\ \rho y_3 &= \rho_1^2 x_3, \\ \rho y_4 &= \rho_1^2 x_4, \\ \rho y_5 &= \rho_1^2 x_5. \end{aligned}$$

Le plan (1) est transformé en lui-même par cette homographie.

Supposons tout d'abord que ρ_1 ne soit pas égal à l'unité. Alors la racine triple $\rho_1^2 = \rho_1\rho_2 = \rho_2^2$ de l'équation (6) est différente de ρ_1 et il lui correspond un plan uni (lieu de points unis)

$$\left.\begin{aligned} \rho_1(1-\rho_1)x_1 + \alpha^{20}x_3 + \alpha^{11}x_4 + \alpha^{02}x_5 = 0, \\ \rho_1(1-\rho_1)x_2 + \beta^{20}x_3 + \beta^{11}x_4 + \beta^{02}x_5 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Un plan (1), passant par une tangente déterminée à la surface (X) en X, coupe le plan (8) en un point non situé sur $X^{10}X^{01}$, car le plan (8) ne peut rencontrer cette droite. Par suite, par la tangente considérée passent deux plans transformés en eux-mêmes par l'homographie (7), l'un de ces plans étant le plan tangent à la surface en X.

Supposons maintenant $\rho_1 = 1$. Alors l'unité est racine quintuple de l'équation caractéristique (6) de l'homographie (5), et comme celle-ci, étant cyclique, ne peut être spéciale, elle coïncide nécessairement avec l'identité.

6. Examinons le cas où l'homographie (7) n'est pas l'identité. Alors les racines ρ_1, ρ_2 sont nécessairement distinctes et, puisque l'homographie (7) est cyclique, ce sont des racines de l'unité. Nous pouvons supposer sans restriction que l'on a choisi les lignes *u*, *v* sur la surface (X) de manière que les points unis de l'homographie (7), sur la droite $X^{10}X^{01}$, soient précisément X^{10}, X^{01}. Pour les valeurs de *u*, *v* qui correspondent au point X considéré, on a alors

$$\alpha^{01} = \beta^{10} = 0$$

et, par suite,

$$\rho_1 = \alpha^{10}, \qquad \rho_2 = \beta^{01}, \qquad (\alpha^{10} \neq \beta^{01}).$$

Les équations (5) deviennent

$$\left.\begin{array}{l} \rho y_1 = \rho_1 x_1 + \alpha^{20} x_3 + \alpha^{11} x_4 + \alpha^{02} x_5, \\ \rho y_2 = \rho_2 x_2 + \beta^{20} x_3 + \beta^{11} x_4 + \beta^{02} x_5, \\ \rho y_3 = \rho_1^2 x_3, \\ \rho y_4 = \rho_1 \rho_2 x_4, \\ \rho y_5 = \rho_2^2 x_5. \end{array}\right\} \qquad (5')$$

Observons que l'équation (6) ne possède des racines multiples que dans les cas suivants :

1° On a $\rho_1 + \rho_2 = 0$;

2° L'une des racines ρ_1, ρ_2 est égale à l'unité;

3° On a l'une des relations $\rho_1 = \rho_2^2$, $\rho_2 = \rho_1^2$.

Plaçons-nous en premier lieu dans l'hypothèse où les cinq racines ρ_1, ρ_2, ρ_1^2, $\rho_1\rho_2$, ρ_2^2 de l'équation (6) sont distinctes. L'homographie (5′) de Σ_4 possède cinq points unis. Désignons par P_{11}, P_{12}, P_{22} les points unis qui correspondent respectivement aux racines ρ_1^2, $\rho_1\rho_2$, ρ_2^2; ils sont donnés par

$$\frac{x_1}{(\rho_1^2-\rho_2)\,\alpha^{20}} = \frac{x_2}{(\rho_1^3-\rho_1)\,\beta^{20}} = \frac{x_3}{(\rho_1^2-\rho_1)(\rho_1^2-\rho_2)}, \quad x_4 = x_5 = 0; \qquad (P_{11})$$

$$\frac{x_1}{\rho_2(\rho_1-1)\,\alpha^{11}} = \frac{x_2}{\rho_1(\rho_2-1)\,\beta^{11}} = \frac{x_4}{\rho_1\rho_2(\rho_1-1)(\rho_2-1)}, \quad x_3 = x_5 = 0; \qquad (P_{12})$$

$$\frac{x_1}{(\rho_2^2-\rho_2)\,\alpha^{02}} = \frac{x_2}{(\rho_2^2-\rho_1)\,\beta^{02}} = \frac{x_5}{(\rho_2^2-\rho_1)(\rho_2^2-\rho_2)}, \quad x_3 = x_4 = 0. \qquad (P_{22})$$

Les plans osculateurs en X aux courbes ayant pour tangente la droite XX^{10} forment un faisceau; ils coupent Σ_4 suivant les droites du faisceau de sommet X^{10} et de plan

$$x_4 = x_5 = 0.$$

Ce dernier plan contient le point uni P_{11} et, par suite, dans le faisceau les plans osculateurs considérés; il y en a deux qui sont unis pour l'homographie (5'), à savoir le plan $XX^{10}P_{11}$ et le plan tangent $XX^{10}X^{01}$ à la surface (X) au point X.

De même, parmi les plans osculateurs au point X aux courbes ayant la droite XX^{01} pour tangente, il y en a deux, à savoir $XX^{01}P_{22}$, $XX^{10}X^{01}$, unis pour l'homographie (5').

Les droites $X^{10}P_{12}$, $X^{01}P_{12}$, $P_{11}P_{22}$, $P_{11}P_{12}$, $P_{22}P_{12}$, qui sont unies pour l'homographie (5'), n'appartiennent pas à des plans osculateurs en X à des courbes tracées sur la surface (X).

7. Envisageons le cas où $\rho_1 = 1$, $\rho_2 \neq -1$. Les racines de l'équation (6) sont $\rho_1 = 1$, ρ_2, $\rho_1^2 = 1$, $\rho_1\rho_2 = \rho_2$, ρ_2^2. A la racine double $\rho_1 = \rho_1^2 = 1$ correspond une droite de points unis commune aux hyperplans

$$\alpha^{20}x_3 = 0, \qquad (\rho_2 - 1)x_2 + \beta^{20}x_3 = 0, \qquad x_4 = x_5 = 0.$$

Il faut donc que, pour les valeurs de u, v correspondant au point X, on ait $\alpha^{20} = 0$. Par la droite XX^{10} passe alors, outre le plan tangent $XX^{10}X^{01}$, un seul plan osculateur uni

$$(\rho_2 - 1)x_2 + \beta^{20}x_3 = 0.$$

A la racine double $\rho_2 = \rho_1\rho_2$ correspond une droite de points unis commune aux hyperplans

$$(1 - \rho_2)x_1 + \alpha^{11}x_4 = 0, \qquad \beta^{11}x_4 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_5 = 0.$$

Au point X, on doit donc avoir $\beta^{11} = 0$. Le plan déterminé par la droite qui vient d'être obtenue et par le point X ne peut être un plan osculateur à une courbe tracée sur la surface (X) au point X.

A la racine simple ρ_2^2 correspond un point uni

$$\frac{x_1}{(\rho_2^2-\rho_2)\alpha^{02}}=\frac{x_2}{(\rho_2^2-1)\beta^{02}}=\frac{x_5}{(\rho_2^2-1)(\rho_2^2-\rho_2)},\quad x_3=x_4=0.$$

Ce point et la droite XX^{01} déterminent un plan osculateur uni.

Examinons le cas où $\rho_1=1$, $\rho_2=-1$. Les racines de l'équation (6) sont $\rho_1=1$, $\rho_2=-1$, $\rho_1^2=1$, $\rho_1\rho_2=-1$, $\rho_2^2=1$. A la racine triple $\rho_1=\rho_1^2=\rho_2^2=1$ correspond un plan formé de points unis donné par

$$\alpha^{20}x_3+\alpha^{02}x_5=0,\quad -2x_2+\beta^{20}x_3+\beta^{02}x_5=0,\quad x_4=0.$$

Au point X, on doit donc avoir $\alpha^{20}=\alpha^{02}=0$. Il existe deux plans de Σ_5 :

$$x_4=x_5=0,\qquad 2x_2-\beta^{20}x_3=0,$$
$$x_3=x_4=0,\qquad 2x_2-\beta^{02}x_5=0,$$

passant le premier par XX^{10}, le second par XX^{01}, unis pour l'homographie (5'), osculateurs à des courbes passant par X en ce point.

A la racine double $\rho_2=\rho_1\rho_2=-1$ correspond une droite de points unis commune aux hyperplans

$$2x_1+\alpha^{11}x_4=0,\quad \beta^{11}x_4=0,\quad x_3=x_5=0.$$

Au point X, on doit donc avoir $\beta^{11}=0$. Il n'existe aucun plan osculateur en X à une courbe de la surface (X), passant par la droite rencontrée ici.

8. Passons au cas où $\rho_1+\rho_2=0$, ρ_1 étant différent de l'unité. Les racines de l'équation (6) sont ρ_1, ρ_2, ρ_1^2, $\rho_1\rho_2=-\rho_1^2$, $\rho_2^2=\rho_1^2$. A la racine double $\rho_1^2=\rho_2^2$ correspond une droite de points unis

$$(\rho_1-\rho_1^2)x_1+\alpha^{20}x_3+\alpha^{02}x_5=0,\quad -(\rho_1+\rho_1^2)x_2+\beta^{20}x_3+\beta^{02}x_4=0,$$
$$x_4=0.$$

Parmi les plans osculateurs en X à des courbes de la surface (X), passant par l'une des droites XX^{10}, XX^{01}, il en est deux rencontrant la droite trouvée ici et qui sont donc unis pour l'homographie (5'). Ce sont les plans

$$(\rho_1 - \rho_1^2)\, x_1 + \alpha^{20} x_3 = 0$$

passant par XX^{10} et

$$-(\rho_1 + \rho_1^2)\, x_2 + \beta^{02} x_5 = 0$$

passant par XX^{01}.

A la racine simple $\rho_1\rho_2 = -\rho_1^2$ correspond un point uni

$$\frac{x_1}{(\rho_1 - 1)\,\alpha^{11}} = \frac{x_2}{(\rho_1 + 1)\,\beta^{11}} = \frac{x_4}{-\rho_1(\rho_1^2 - 1)}, \quad x_3 = x_5 = 0.$$

Par ce point il ne passe aucun plan uni osculateur en X à une courbe tracée sur la surface (X).

9. Il nous reste à examiner le cas où l'on a l'une (au moins) des égalités $\rho_1 = \rho_2^2$, $\rho_2 = \rho_1^2$ (ρ_1, ρ_2 étant différents de l'unité).

Supposons en premier lieu que nous ayons $\rho_1 = \rho_2^2$, $\rho_2 \neq \rho_1^2$. Les racines de l'équation (6) sont ρ_1, ρ_2, ρ_1^2, $\rho_1\rho_2$, $\rho_2^2 = \rho_1$. A la racine double $\rho_1 = \rho_2^2$ correspond une droite formée de points unis, commune aux hyperplans

$$\alpha^{02} x_5 = 0, \quad (\rho_2 - \rho_1)\, x_2 + \beta^{02} x_5 = 0, \quad x_3 = x_4 = 0.$$

Au point X, nous devons donc avoir $\alpha^{02} = 0$. Dans le plan $X^{10}X^{01}X^{02}$, l'homographie (5') détermine une homologie dont l'axe passe par X^{10} mais non par X^{01} ; par suite, toutes les droites passant par X^{01} dans ce plan sont unies, ce point étant le centre de l'homologie. Il en résulte que les plans osculateurs en X à toutes les courbes tangentes en ce point à la droite XX^{01} sont unis.

On trouve sans difficulté qu'il existe un seul plan osculateur (distinct du plan tangent $XX^{10}X^{01}$) en X à une courbe tangente en ce point à la droite XX^{10}, qui est uni par l'homographie (5'). En dehors des plans rencontrés, il n'existe pas de plan osculateur uni pour l'homographie (5').

Supposons enfin que l'on ait $\rho_1 = \rho_2^2$, $\rho_2 = \rho_1^2$. Il est facile de voir que l'on a alors $\rho_1^3 = 1$, $\rho_2^3 = 1$ et que ρ_1, ρ_2 sont donc les racines cubiques primitives de l'unité. L'homographie binaire (7) a la période trois et, par suite, l'homographie H a une période multiple de trois.

Les racines de l'équation (6) sont ρ_1, ρ_2, $\rho_1^2 = \rho_2$, $\rho_1\rho_2 = 1$, $\rho_2^2 = \rho_1$.

A la racine double $\rho_1 = \rho_2^2$ correspond la droite de points unis commune aux hyperplans

$$\alpha^{02}x_5 = 0, \quad (\rho_2 - \rho_1)\,x_2 + \beta^{02}x_5 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Au point X, on doit donc avoir $\alpha^{02} = 0$. Les plans osculateurs en X aux courbes tracées sur la surface (X) et tangentes à la droite XX^{01} sont tous unis pour l'homographie (5').

A la racine double $\rho_2 = \rho_1^2$ correspond la droite de points unis commune aux hyperplans

$$(\rho_1 - \rho_2)\,x_1 + \alpha^{20}x_3 = 0, \quad \beta^{20}x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0.$$

Au point X, on a donc nécessairement $\beta^{20} = 0$. On voit que les plans osculateurs au point X aux courbes tangentes en ce point à la droite XX^{10} sont tous unis pour l'homographie (5').

Enfin, à la racine simple $\rho_1\rho_2 = 1$ correspond le point uni

$$\frac{x_1}{(1-\rho_2)\,\alpha^{11}} = \frac{x_2}{(1-\rho_1)\,\beta^{11}} = \frac{x_4}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}, \quad x_3 = x_5 = 0.$$

Par ce point ne passe aucun plan uni osculateur en X à une courbe tracée sur la surface (X).

10. En résumé :

Soient F *une surface de* $S_r\,(r \geqq 5)$ *transformée en elle-même par une homographie cyclique* H, P *un point ordinaire de* F *uni pour* H. *Si le lieu des plans osculateurs au point* P *aux courbes tracées sur* F *et passant par* P *est un espace linéaire* *à cinq dimensions, les circonstances suivantes peuvent se présenter :*

1° *Chacun de ces plans osculateurs est uni pour* H; *ou*

2° *Chaque tangente à la surface* F *au point* P *est unie pour* H *et par chacune de ces droites passe un plan osculateur uni pour* H (*en dehors du plan tangent à* F *en* P); *ou*

3° *Il existe deux tangentes à la surface* F *au point* P *unies pour* H; *par chacune de ces droites passe un plan osculateur uni pour* H (*en dehors du plan tangent à* F *en* P); *ou*

4° *Il existe deux tangentes à* F *en* P *unies pour* H *et par une de ces droites passe un plan osculateur uni pour* H (*en dehors du plan tangent à* F *en* P), *tandis que tous les plans osculateurs passant par l'autre sont unis pour* H; *ou*

5° *Il existe deux tangentes à* F *en* P *unies pour* H *et les plans osculateurs passant par chacune de ces droites sont tous unis pour* H. *Dans ce dernier cas, l'homographie* H *détermine une homographie de période trois dans le faisceau des tangentes à* F *en* P.

On observera que l'on pourrait étudier de la même manière l'entourage d'un point ordinaire uni d'une surface transformée en elle-même par une transformation biunivoque quelconque (sous la restriction que cette transformation est continue). On pourrait de même étudier la correspondance entre les espaces linéaires à s dimensions ayant un contact d'ordre s en un point uni (ordinaire pour la surface) avec les courbes passant par ce point et tracées sur la surface. Si le lieu de ces espaces est un espace linéaire à $\frac{1}{2}s(s+3)$ dimensions (r étant suffisamment grand), on trouvera que cette correspondance est une homographie. Les racines de l'équation caractéristique de cette homographie seront d'ailleurs

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_1^2,\ \rho_1\rho_2,\ \rho_2^2,\ \ldots,\ \rho_1^s,\ \rho_1^{s-1}\rho_2,\ \ldots,\ \rho_1^{s-i}\rho_2^i,\ \ldots,\ \rho_2^s,$$

et l'étude des éléments unis de cette homographie se fera sans difficulté.

Liége, le 29 décembre 1928.

Marcel HAYEZ, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.