ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XIV, no 6.
Séance du 2 juin 1928, pp. 345-348.

Sur les Surfaces ayant mêmes quadriques de Lie

(*Troisième note*),

par L. GODEAUX, professeur à l'Université de Liége.

Dans la première note (*), nous avons établi les conditions nécessaires et suffisantes pour que les quadriques de Lie d'une surface (x) n'aient que deux points caractéristiques. D'une manière précise, si la surface (x) est rapportée à ses asymptotiques u, v et si les coordonnées homogènes de ses points satisfont au système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable

$$\left.\begin{array}{l} x^{20} + 2bx^{01} + c_1x = 0, \\ x^{02} + 2ax^{10} + c_2x = 0, \end{array}\right\}$$

ces conditions s'expriment par les relations

$$2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1) = 0,$$

$$2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2) = 0.$$

(*) *Bull. Acad. roy. de Belgique,* 1928, pp. 158-186. Nous continuerons à utiliser les mêmes notations.

Ces conditions peuvent être mises sous une autre forme. Soient g_1 une droite issue d'un point x de la surface (x) et n'appartenant pas au plan tangent à la surface en ce point, g_2 sa conjuguée par rapport à la quadrique de Lie relative au point x. Lorsque x varie sur la surface (x), les droites g_1, g_2 engendrent des congruences (g_1), (g_2). Nous allons faire voir que *La condition nécessaire et suffisante pour que les quadriques de Lie de la surface* (x) *n'aient que deux points caractéristiques, est que les développables des congruences* (g_1), (g_2) *soient engendrées lorsque* x *décrit les lignes asymptotiques de la surface* (x). *De plus, les droites* g_1, g_2 *sont alors les directrices de Wilczynski de la surface* (x).

1. — Les équations en coordonnées locales d'une droite g_1 passant par le point x et n'appartenant pas au plan tangent à la surface (x) en ce point peuvent s'écrire

$$2z_2 = \lambda z_4, \qquad 2z_3 = \mu z_4, \qquad (g_1)$$

λ et μ étant fonction de u, v. La conjuguée de g_1 par rapport à la quadrique de Lie

$$z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2ab\, z_4^2 = 0$$

a pour équations

$$\mu z_2 + \lambda z_3 - 2z_1 = 0, \quad z_4 = 0. \qquad (g_2)$$

Les points G_1, G_2 représentant les droites g_1, g_2 sur l'hyperquadrique Q de S_5 sont donnés par

$$G_1 = \lambda U + \mu V + 2M_1,$$
$$G_2 = -\lambda U + \mu V + 2M_2.$$

Remarquons que les points

$$J_1 = G_1 - G_2 = 2[\lambda U + M_1 - M_2] = 2(\lambda U + U^{01}),$$
$$J_2 = G_1 + G_2 = 2[\mu V + M_1 + M_2] = 2(\mu V + V^{10})$$

appartiennent respectivement aux droites UU_1, VV_1.

2. — Les développables de la congruence (g_1) ont pour images, sur Q, les courbes de la surface (G_1) dont les tangentes appartiennent à Q. L'équation différentielle de ces courbes est

$$\Omega(G_1^{10}, G_1^{10})du^2 + 2\Omega(G_1^{10}, G_1^{01})du\,dv + \Omega(G_1^{01}, G_1^{01})dv^2 = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les développables en question soient données par $u = c^{te}$, $v = c^{te}$ se traduit donc par

$$\Omega(G_1^{10}, G_1^{10}) = 0, \qquad \Omega(G_1^{01}, G_1^{01}) = 0. \tag{1}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} G_1^{10} &= (\lambda^{10} + 8ab)U + (\mu^{10} - 2b\lambda - 4b^{01} - 2c_1)V \\ &\qquad + \mu(M_1 + M_2) + 2M_3, \\ G_1^{01} &= (\lambda^{01} - 2a\mu - 4a^{10} - 2c_2)U + (\mu^{01} + 8ab)V \\ &\qquad + \lambda(M_1 - M_2) + 2M_4. \end{aligned}$$

Les équations (1) donnent, par suite,

$$2\mu^{10} - \mu^2 - 4b\lambda - 8b^{01} - 4c_1 = 0, \tag{2}$$
$$2\lambda^{01} - \lambda^2 - 4a\mu - 8a^{10} - 4c_2 = 0. \tag{3}$$

3. — Pour que les développables de la congruence (g_2) soient données par $u = c^{te}$, $v = c^{te}$, nous devons avoir de même

$$\Omega(G_2^{10}, G_2^{10}) = 0, \qquad \Omega(G_2^{01}, G_2^{01}) = 0. \tag{4}$$

On a

$$G_2^{10} = -\lambda^{10}U + (\mu^{10} + 2b\lambda - 2c_1)V + \mu(M_1 + M_2) + 2M_3,$$
$$G_2^{01} = -(\lambda^{01} + 2a\mu - 2c_2)U + \mu^{01}V - \lambda(M_1 - M_2) - 2M_4.$$

Les conditions (4) donnent donc

$$2\mu^{10} - \mu^2 + 4b\lambda - 4c_1 = 0, \tag{5}$$
$$2\lambda^{01} - \lambda^2 + 4a\mu - 4c_2 = 0. \tag{6}$$

4. — Soustrayons membre à membre (5) de (2) et (6) de (3) ; nous obtenons

$$\lambda = -(\log b)^{01}, \qquad \mu = -(\log a)^{10}.$$

Exprimons ensuite que λ, μ satisfont aux équations (5), (6) ; nous obtenons

$$2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^{2} + 4(b^{01} + c_1) = 0,$$
$$2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^{2} + 4(a^{10} + c_2) = 0,$$

c'est-à-dire précisément les conditions pour que les quadriques de Lie relatives à la surface (x) n'aient que deux points caractéristiques.

Actuellement, nous avons

$$J_1 = 2[U^{01} - (\log b)^{01} U],$$
$$J_2 = 2[V^{10} - (\log a)^{10} V],$$

et, par suite, les points J_1, J_2 coïncident respectivement avec les points U_1, V_1. Il en résulte que les droites g_1, g_2 sont les directrices de Wilczynski de la surface (x).

Liége, le 30 avril 1928.

ERRATA AUX DEUX PREMIÈRES NOTES

Page 159, ligne 4, *lire :*	$a^{20} + \ldots$
Page 165, ligne 1, *lire :*	... des courbes tracées...
Page 168, ligne 17, *lire :*	la droite *s*. Pour le point S, ...
Page 177, ligne 11, *lire :*	... les points R_2, ...
Page 183, ligne 11, *lire :*	$\ldots - 2(h_1 + k_1) S - \ldots$

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.