ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XV, no 1.
Séance du 5 janvier 1929, pp. 37-53.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE.

Sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface,

par LUCIEN GODEAUX, professeur à l'Université de Liége.

M. Demoulin (*) a démontré que les quadriques de Lie d'une surface ont en général cinq points caractéristiques. L'un de ces points appartient à la surface; les quatre autres sont les sommets d'un tétraèdre — le tétraèdre de Demoulin — dont quatre arêtes sont des génératrices de la quadrique de Lie. Ces arètes engendrent, en général, quatre congruences. Nous nous proposons de former les équations différentielles des développables de ces congruences. Nous recherchons ensuite les équations différentielles des lignes asymptotiques des quatre nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie. En utilisant certains résultats de M. Thomsen (**), nous en déduisons les conditions pour qu'une surface soit une « surface minima projective ».

Pour établir nos résultats, nous utilisons la représentation des surfaces dans l'espace réglé telle qu'elle a été imaginée par MM. Bompiani (***) et Tzitzeica (IV). Nous utiliserons les

(*) A. DEMOULIN, Sur la quadrique de Lie. (*C. R.*, 1908, t. CXLVII, pp. 493-496.)

(**) G. THOMSEN, Ueber eine liniengeometrische Behandlungsweise der projectiven Flächentheorie und die projective Geometrie der systeme von Flächen zweiter Ordnung (*Abhandl. Mathem. Seminar Hamburg*, 1925, Bd IV, pp. 232-266); Sulle superficie minime proiettive (*Annali di Matematica*, 1927-1928, t. V, pp. 169-184).

(***) E. BOMPIANI, Sull' equazione di Laplace (*Rend. Circ. matem. di Palermo*, 1912, t. XXXIV, pp. 383-407); M. Bompiani est revenu à plusieurs reprises sur les surfaces considérées dans l'espace réglé; on trouvera un exposé de ses recherches dans son mémoire : *I fondamenti geometrici della teoria proiettiva delle curve e delle superficie*, appendice II au traité de *Geometria proiettiva differenziale* de MM. FUBINI et CECH. (Bologne, Zanichelli, 1927.)

(IV) TZITZEICA, Géométrie différentielle projective des réseaux. (Paris, Gauthier-Villars, 1924.)

résultats établis dans quelques notes que nous avons récemment publiées sur cet argument (*).

1. — Soit (x) une surface de l'espace ordinaire, non réglée, rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes de Wilczynski (**) d'un point x de cette surface satisfont au système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable (***)

$$\left.\begin{aligned} x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0, \\ x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Les conditions d'intégrabilité sont

$$\left.\begin{aligned} a^{20} + c_2^{10} + 2ba^{01} + 4ab^{01} = 0, \\ b^{02} + c_1^{01} + 2ab^{10} + 4ba^{10} = 0, \\ c_1^{02} + 2ac_1^{10} + 4a^{10}c_1 = c_2^{20} + 2bc_2^{01} + 4b^{01}c_2. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

L'hypothèse que la surface (x) n'est pas réglée se traduit analytiquement par le fait que les fonctions a, b de u, v ne sont pas identiquement nulles.

Soit Q l'hyperquadrique d'un espace linéaire à cinq dimensions S_5 représentant les droites de l'espace ordinaire. Les points U, V qui représentent sur Q les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} à la surface (x) engendrent deux surfaces (U), (V) qui sont consécutives dans une suite de Laplace (Bompiani,

(*) L. Godeaux, Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé (*Bull. Acad. roy. de Belgique,* 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-41); Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie (*Ibidem,* 1928, pp. 158-186 et 345-348); Sur les congruences formées par les directrices de Wilczynski d'une surface (*Ibidem,* 1928, pp. 335-345); Sur les congruences de M. Goursat et les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie (*Ibidem,* 1928, pp. 455-466).

(**) Wilczynski, Projective differential geometry of curved surfaces, premier et second mémoires. (*Trans. of the amer. math. Society,* 1907, t. VIII, pp. 233-260; 1908, t. IX, pp. 79-120.)

(***) φ étant une fonction de u, v, nous écrivons

$$\varphi^{ik} = \frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial u^i \partial v^k}.$$

Tzitzeica). La surface (V) est la transformée de Laplace de (U) dans le sens des u.

Désignons par U_1, U_2, ... les transformés successifs de Laplace de U dans le sens des v, par V_1, V_2, ... ceux de V dans le sens des u. La suite ... U_1, U, V, V_1, ... est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q. Nous supposerons cette suite illimitée dans les deux sens (éventuellement périodique).

2. — Nous avons démontré que les arêtes d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22} du tétraèdre de Demoulin appartenant à la quadrique de Lie ont pour images, sur Q, les points D_{11}, D_{12} où la droite U_1U_2 rencontre cette hyperquadrique et les points D_{21}, D_{22} où la droite V_1V_2 rencontre l'hyperquadrique Q.

Considérons un point x de la surface (x), la ligne v (v variable) passant par ce point et la réglée asymptotique lieu des tangentes aux lignes u aux points de cette ligne v. Soit R_u cette surface. La congruence linéaire déterminée par la génératrice de R_u passant par x et par les trois génératrices infiniment voisines successives a pour image la section de l'hyperquadrique Q par l'espace linéaire à trois dimensions $UU_1U_2U_3$. Les directrices de cette congruence, c'est-à-dire les tangentes flecnodales de la réglée R_u correspondant à la génératrice passant par x, sont représentées par les intersections de Q et de la droite polaire de $UU_1U_2U_3$ par rapport à cette hyperquadrique. D'après ce qui a été établi dans la première de nos notes citées, cette droite est la droite V_1V_2. Par suite, les tangentes flecnodales envisagées sont les droites d_{21}, d_{22}. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, dû à M. Demoulin (*) :

Les arêtes du tétraèdre de Demoulin appartenant à la quadrique de Lie en un point x *de la surface* (x), *sont les tangentes flecnodales des réglées asymptotiques relatives au point* x.

(*) Sur la quadrique de Lie (*loc. cit.*).

3. — Les points caractéristiques de la quadrique de Lie Φ relative à un point x de la surface (x) sont le point x et les quatre sommets du tétraèdre de Demoulin, c'est-à-dire les points où les droites d_{11}, d_{12} rencontrent les droites d_{21}, d_{22}. Désignons par ζ_{ij} le point commun aux droites d_{1i}, d_{2j}, de telle sorte que les surfaces (ζ_{11}), (ζ_{12}), (ζ_{21}), (ζ_{22}) forment, avec la surface (x), l'enveloppe des quadriques de Lie de cette dernière surface.

Le plan $d_{1i}\,d_{2j}$ étant tangent à la quadrique de Lie Φ au point ζ_{ij}, est également tangent à la surface (ζ_{ij}). Par suite, la congruence (d_{li}), engendrée par la droite d_{li}, a comme surfaces focales (ζ_{i1}), (ζ_{i2}) si $l=1$, (ζ_{1i}), (ζ_{2i}) si $l=2$.

Pour rechercher les équations différentielles des développables de la congruence (d_{li}), nous rappellerons quelques notations introduites dans nos recherches précédentes.

4. — Nous avons

$$U^{10}+2bV=0, \qquad V^{01}+2aU=0.$$

En posant

$$h_1=-(\log b)^{11}+4ab, \qquad h_2=-(\log bh_1)^{11}+h_1, \ldots,$$

nous avons ensuite

$$U_1=U^{01}-(\log b)^{01}U,$$
$$U_2=U_1^{01}-(\log bh_1)^{01}U_1, \ldots.$$

De même, en posant

$$k_1=-(\log a)^{11}+4ab, \qquad k_2=-(\log ak_1)^{11}+k_1, \ldots,$$

on a

$$V_1=V^{10}-(\log a)^{10}V,$$
$$V_2=V_1^{10}-(\log ak_1)^{10}V_1, \ldots.$$

Les points x, x^{10}, x^{01}, x^{11} ne sont pas en général dans un même plan et le déterminant

$$\Delta=\begin{vmatrix} x \\ x^{10} \\ x^{01} \\ x^{11} \end{vmatrix}$$

formé avec leurs coordonnées n'est pas nul en général.

Tout point de l'espace y donne lieu à quatre relations que nous condensons en une seule :

$$y = xz_1 + x^{10}z_2 + x^{01}z_3 + x^{11}z_4.$$

z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées locales [relatives à un point x de la surface (x)] du point y.

Désignons par M_1, M_2, M_3, M_4 les points de l'hyperquadrique Q qui représentent respectivement les droites xx^{11}, $x^{10}x^{01}$, $x^{10}x^{11}$, $x^{01}x^{11}$. Si Y est le point de Q représentant une droite donnée, nous pouvons écrire la relation condensée

$$Y = UZ_{12} + VZ_{13} + M_1Z_{14} + M_2Z_{23} + M_3Z_{24} + M_4Z_{34}.$$

Les quantités Z_{ik} sont les coordonnées radiales locales de la droite Y.

Nous poserons

$$\Omega(p, q) = p_{12}q_{34} + p_{31}q_{24} + \cdots + p_{34}q_{12},$$

de telle sorte que l'équation de Q, en coordonnées générales, soit

$$\Omega(p, p) = 0.$$

Nous avons alors

$$\Omega(U, M_4) = -\Omega(V, M_3) = \Omega(M_1, M_2) = \Delta,$$
$$\Omega(U, V) = \Omega(U, M_1) = \cdots = \Omega(M_3, M_4) = 0.$$

5. — Nous avons

$$U_1 = M_1 - M_2 - (\log b)^{01}\,U,$$
$$U_1^{01} = -\frac{1}{2}\left[\beta - \overline{(\log b)^{01}}^2\right] U + 4abV - (\log b)^{01}(M_1 - M_2) + 2M_4,$$

en posant

$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2).$$

Tout point de la droite U_1U_2, c'est-à-dire de la droite $U_1U_1^{01}$, est représenté par

$$2(U_1^{01} + \tau_1 U_1).$$

Pour que ce point appartienne à l'hyperquadrique Q, η doit satisfaire à l'équation

$$\Omega(U_1^{01} + \eta U_1, U_1^{01} + \eta U_1) = 0,$$

c'est-à-dire à

$$\eta^2 \Omega(U_1, U_1) + 2\eta \Omega(U_1, U_1^{01}) + \Omega(U_1^{01}, U_1^{01}) = 0.$$

Cette équation se réduit à

$$\eta^2 + \beta = 0. \tag{3}$$

Si, pour abréger les écritures, nous représentons par D_1 l'un des points D_{11}, D_{12} (et par d_1 la droite correspondante), nous aurons

$$D_1 = [\eta - (\log b)^{01}]^2 U + 8abV + 2[\eta - (\log b)^{01}](M_1 - M_2) + 4M_4,$$

η étant une des solutions de l'équation (3).

De même, si nous représentons par D_2 l'un des points D_{21}, D_{22} (et par d_2 la droite correspondante), nous aurons

$$D_2 = 8abU + [\xi - (\log a)^{10}]^2 V + 2[\xi - (\log a)^{10}](M_1 + M_2) + 4M_3,$$

ξ satisfaisant à l'équation

$$\xi^2 + \alpha = 0, \tag{4}$$

où

$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1).$$

6. — La congruence (d_1) est représentée, sur Q, par la surface (D_1). Les développables de la congruence sont représentés sur (D_1) par les courbes dont les tangentes appartiennent à l'hyperquadrique Q. L'équation différentielle de ces courbes est donc celle des développables de la congruence (d_1). Observons que le plan tangent à la surface (D_1) en un point D_1 est également tangent à l'hyperquadrique Q et coupe donc celle-ci suivant deux droites passant par le point considéré. L'équation différentielle cherchée sera donc

$$\Omega(D_1^{10}du + D_1^{01}dv, D_1^{10}du + D_1^{01}dv) = 0. \tag{5}$$

Nous avons

$$
\begin{aligned}
D_1^{10} &= 2\,(\eta^{10} + h_1)\,[\{\eta - (\log b)^{01}\}\,\mathrm{U} + \mathrm{M}_1 - \mathrm{M}_2],\\
D_1^{01} &= [\{\eta - (\log b)^{01}\}\{2\eta^{01} - \beta + \overline{(\log b)^{01}}^2\} - 16a^2b]\,\mathrm{U}\\
&\quad + [8ab\{\eta - (\log b)^{01}\} - 2a\{\alpha + \overline{(\log a)^{10}}^2\}]\,\mathrm{V}\\
&\quad - [2\beta - 2\eta^{01} + 2\,(\log b)^{01}\{\eta - (\log b)^{01}\}]\,[\mathrm{M}_1 - \mathrm{M}_2]\\
&\quad + 4a^{10}\,(\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2) - 8a\,\mathrm{M}_3 + 4\,[\eta - (\log b)^{01}]\,\mathrm{M}_4.
\end{aligned}
$$

Par suite, nous avons

$$
\begin{aligned}
\Omega\,(D_1^{10}, D_1^{10}) &= -8\,[\eta^{10} + h_1]^2\,\Delta\\
\Omega\,(D_1^{10}, D_1^{01}) &= -8\eta\,[\eta^{10} + h_1]\,(\log b\eta)^{01}\,\Delta,\\
\Omega\,(D_1^{01}, D_1^{01}) &= -8\eta^2\,\overline{(\log b\eta)^{01}}^2\,\Delta - 32a^2\alpha\Delta,
\end{aligned}
$$

et l'équation différentielle (5) s'écrit

$$
[(\eta^{10} + h_1)\,du + \eta\,(\log b\eta)^{01}\,dv]^2 + 4a^2\alpha\,dv^2 = 0. \tag{6}
$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$
(\eta^{10} + h_1)\,du + [\eta\,(\log b\eta)^{01} + 2a\xi]\,dv = 0,
$$

ξ satisfaisant à l'équation (4).

La droite joignant le point D_1 au point

$$
[\eta\,(\log b\eta)^{01} + 2a\xi]\,D_1^{10} - (\eta^{10} + h_1)\,D_1^{01}
$$

appartient à l'hyperquadrique Q ; elle représente un faisceau de rayons ayant pour sommet un des foyers de la droite d_1, c'est-à-dire un des points ζ_{ij} que nous avons défini plus haut. La vérification est aisée ; nous ne la ferons pas ici. Les coordonnées locales du point considéré sont

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{8ab + [\xi + (\log a)^{10}]\,[\eta - (\log b)^{01}]} &= \frac{z_2}{-2\,[\xi + (\log a)^{10}]}\\
&= \frac{z_3}{2\,[\eta - (\log b)^{01}]} = \frac{z_4}{-4}.
\end{aligned}
$$

Ce point est donc donné par

$$
\begin{aligned}
\zeta = \{8ab + [\xi + (\log a)^{10}]\,[\eta - (\log b)^{01}]\}\,x &- 2\,[\xi + (\log a)^{10}]\,x^{10}\\
&+ 2\,[\eta - (\log b)^{01}]\,x^{01} - 4x^{11}.
\end{aligned}
$$

Les deux foyers de la droite d_1 s'obtiennent en donnant à ξ les deux valeurs possibles.

On obtient de même l'équation différentielle des développables de la congruence (d_2). On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_2^{10} = {} & [8ab \{ \xi - (\log a)^{10} \} - 2b \{ \beta + \overline{(\log b)^{01}}^2 \}] \mathrm{U} \\
& + [\{ \xi - (\log a)^{10} \} \{ 2\xi^{10} - \alpha + \overline{(\log a)^{10}}^2 \} - 16ab^2] \mathrm{V} \\
& - [2\alpha - 2\xi^{10} + 2(\log a)^{10} \{ \xi - (\log a)^{10} \}] (\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2) \\
& + 4b^{01} (\mathrm{M}_1 - \mathrm{M}_2) + 4[\xi - (\log a)^{10}] \mathrm{M}_3 - 8b\mathrm{M}_4, \\
\mathrm{D}_2^{01} = {} & 2(\xi^{10} + k_1)[\{ \xi - (\log a)^{10} \} \mathrm{V} + \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2], \\
\Omega(\mathrm{D}_2^{10}, \mathrm{D}_2^{10}) & = 8\xi^2 \overline{(\log a\xi)^{10}}^2 \Delta + 32b^2\beta\Delta, \\
\Omega(\mathrm{D}_2^{10}, \mathrm{D}_2^{01}) & = 8\xi(\xi^{01} + k_1)(\log a\xi)^{10} \Delta, \\
\Omega(\mathrm{D}_2^{01}, \mathrm{D}_2^{01}) & = 8(\xi^{01} + k_1)^2 \Delta,
\end{aligned}$$

et, finalement,

$$[\xi (\log a\xi)^{10} du + (\xi^{01} + k_1) dv]^2 + 4b^2\beta du^2 = 0. \tag{7}$$

7. — Désignons, pour abréger, par ζ celui des points ζ_{ij} commun aux droites d_1, d_2. Nous allons déterminer l'équation différentielle des asymptotiques de la surface (ζ).

Le plan $d_1 d_2$ étant tangent au point ζ à la surface (ζ), les tangentes asymptotiques en ce point à cette surface appartiennent au faisceau de rayons déterminé par d_1, d_2. Les images sur l'hyperquadrique Q de ces tangentes asymptotiques sont donc des points de la droite $\mathrm{D}_1 \mathrm{D}_2$ (qui appartient à Q). Soit

$$\mathrm{A} = \lambda \mathrm{D}_1 + \mu \mathrm{D}_2$$

un de ces points. Pour que le point A représente une tangente asymptotique, il faut et il suffit que le plan tangent au point A à la surface (A) rencontre l'hyperquadrique Q suivant deux droites confondues. L'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface (ζ) s'obtiendra donc en exprimant que l'équation, du second degré en du, dv,

$$\Omega(\mathrm{A}^{10} du + \mathrm{A}^{01} dv, \mathrm{A}^{10} du + \mathrm{A}^{01} dv) = 0, \tag{8}$$

a deux racines $du : dv$ confondues.

Un calcul simple montre que l'équation (8) devient

$$\begin{aligned}
&[\lambda^2\Omega(D_1^{10}, D_1^{10}) + 2\lambda\mu\Omega(D_1^{10}, D_2^{10}) + \mu^2\Omega(D_2^{10}, D_2^{10})]\,du^2 \\
+\,2&[\lambda^2\Omega(D_1^{10}, D_1^{01}) + \lambda\mu\Omega(D_1^{01}, D_2^{10}) + \mu^2\Omega(D_2^{10}, D_2^{01})]\,du\,dv \\
+\;&[\lambda^2\Omega(D_1^{01}, D_1^{01}) + 2\lambda\mu\Omega(D_1^{01}, D_2^{01}) + \mu^2\Omega(D_2^{01}, D_2^{01})]\,dv^2 = 0,
\end{aligned}$$

les coefficients des dérivées partielles de λ, μ étant identiquement nuls.

Moyennant les formules données plus haut, cette équation s'écrit

$$\begin{aligned}
&[\{(\eta^{10} + h_1)\lambda + 2b\eta\mu\}^2 - \xi^2\overline{(\log a\xi)^{10}}^2\,\mu^2]\,du^2 \\
+\,2&[\eta(\log b\eta)^{01}\lambda\{(\eta^{10} + h_1)\lambda + 2b\eta\mu\} \\
-\;&\xi(\log a\xi)^{10}\mu\{(\xi^{1} + k_1)\mu + 2a\xi\lambda)\}]\,du\,dv \\
+\;&[\eta^2\overline{(\log b\eta)^{01}}^2\lambda^2 - \{(\xi^{01} + k_1)\mu + 2a\xi\lambda\}^2]\,dv^2 = 0,
\end{aligned}$$

ou encore

$$\left.\begin{aligned}
&[\{(\eta^{10} + h_1)\lambda + 2b\eta\mu\}\,du + \eta(\log b\eta)^{01}\lambda\,dv]^2 \\
-\,&[\xi(\log a\xi)^{10}\mu\,du + \{(\xi^{01} + k_1)\mu + 2a\xi\lambda\}\,dv]^2 = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

L'équation (9) se décompose en deux autres :

$$\left.\begin{aligned}
&[(\eta^{10} + h_1)\lambda + \{2b\eta + \xi(\log a\xi)^{10}\}\mu]\,du \\
+\,&[(\xi^{01} + k_1)\mu + \{2a\xi + \eta(\log b\eta)^{01}\}\lambda]\,dv = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

$$\left.\begin{aligned}
&[(\eta^{10} + h_1)\lambda + \{2b\eta - \xi(\log a\xi)^{10}\}\mu]\,du \\
-\,&[(\xi^{01} + k_1)\mu + \{2a\xi - \eta(\log b\eta)^{01}\}\lambda]\,dv = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (11$$

qui, pour que le point A représente une tangente asymptotique de la surface (ζ), doivent être équivalentes. Cette condition s'exprime par la relation

$$\left.\begin{aligned}
&[(\eta^{10} + h_1)\lambda + 2b\eta\mu][(\xi^{01} + k_1)\mu + 2a\xi\lambda] \\
&\quad - \xi\eta(\log a\xi)^{10}(\log b\eta)^{01}\lambda.\mu = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

On observera que le discriminant de l'équation (9) est précisément le carré du premier membre de l'équation (12).

Les lignes asymptotiques de la surface (ζ) s'obtiendront en intégrant l'équation (10) ou l'équation (11), après avoir remplacé λ, μ successivement par les deux racines de l'équation (12). On peut encore dire que l'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface (ζ) s'obtient en éliminant λ, μ entre les équations (10) et (12), ou (11) et (12).

Remarquons que, moyennant (12), les équations (10) et (11) peuvent s'écrire sous l'une des deux formes équivalentes

$$\xi(\log a\xi)^{10}\mu\, du + [(\xi^{01} + k_1)\mu + 2a\xi\lambda]\, dv = 0,$$
$$[(\eta^{10} + h_1)\lambda + 2b\eta\mu]\, du + \eta(\log b\eta)^{01}\mu\, dv = 0,$$

mais le passage des équations (11) ou (12) à ces équations implique l'hypothèse que certains facteurs ne sont pas nuls.

8. — Avant d'aller plus loin, nous allons établir certaines relations qui nous seront utiles.

Nous avons tout d'abord

$$\alpha^{01} = -2k_1(\log a k_1)^{10}, \qquad \beta^{10} = -2h_1(\log b h_1)^{01}. \tag{13}$$

Puisque par hypothèse la suite de Laplace ..., U, V, ... n'est pas terminée, h_1 et k_1 ne sont pas nuls. Par suite, si α est nul, il en est de même de $(\log ak_1)^{10}$ et si β est nul, il en est de même de $(\log bh_1)^{01}$.

Des formules (13) on déduit

$$\xi\xi^{01} = k_1(\log a k_1)^{10}, \qquad \eta\eta^{10} = h_1(\log b h_1)^{01}. \tag{14}$$

D'autre part, en utilisant les conditions (2) d'intégrabilité du système (1), on a

$$a\alpha^{10} + 2\alpha a^{10} = b\beta^{01} + 2\beta b^{01}. \tag{15}$$

Moyennant les relations (3) et (4), cette relation devient

$$\xi(a\xi)^{10} = \eta(b\eta)^{01} \tag{16}$$

et, si aucune des quantités α, β n'est identiquement nulle,

$$a\alpha(\log a\xi)^{10} = b\beta(\log b\eta)^{01}. \tag{16'}$$

Dans cette dernière hypothèse, les quantités

$$(\log a\xi)^{10}, \qquad (\log b\eta)^{01}$$

sont donc nulles en même temps.

9. — Voyons tout d'abord rapidement ce que deviennent les résultats précédents lorsque les quadriques de Lie de la surface (x) n'ont que deux points caractéristiques. Nous avons démontré dans notre seconde note citée que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0.$$

Alors, on a en outre

$$(\log ak_1)^{10} = 0, \qquad (\log bh_1)^{01} = 0, \qquad \xi = 0, \qquad \eta = 0.$$

Les quatre points ζ_{11}, ζ_{12}, ζ_{21}, ζ_{22} coïncident en un point unique ζ; les équations (6) et (7) se réduisent respectivement à

$$du^2 = 0, \qquad dv^2 = 0.$$

Les droites $d_1 = d_{11} = d_{12}$, $d_2 = d_{21} = d_{22}$ sont les tangentes asymptotiques de la surface (ζ), comme on le sait d'ailleurs (*).

Du reste, l'équation (12) se réduit à

$$h_1 k_1 \lambda \mu = 0$$

et les équations (10) ou (11) donnent, pour les asymptotiques, $du = 0$ (pour $\mu = 0$) et $dv = 0$ (pour $\lambda = 0$).

10. — Nous allons maintenant examiner le cas où les droites d_{11}, d_{12} coïncident en une seule, d_1, les droites d_{21}, d_{22} étant distinctes. La droite U_1U_2 doit être tangente à l'hyperquadrique Q, ce qui exige que l'on ait $\beta = 0$ et, par suite, en vertu de (13), $(\log bh_1)^{01} = 0$. D'autre part, en vertu de (16), on a

$$(a\xi)^{10} = 0,$$

car pour que d_{21}, d_{22} soient distinctes, on doit avoir α et, par suite, ξ différents de zéro.

(*) Voir la note de M. Demoulin et la seconde des nôtres citées plus haut. Voir, en outre, A. Demoulin, Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques. (*C. R.*, 1924, 2e sem., pp. 20-23.)

On remarquera que les points U_2, U_1^{01} et D_{11}, D_{12} coïncident.

Les points ζ_{11} et ζ_{21} coïncident en un point ζ_1 ; les points ζ_{12}, ζ_{22}, en un point ζ_2. Les quadriques de Lie de la surface (x) n'ont plus que trois points caractéristiques : x, ζ_1, ζ_2.

L'équation différentielle (6) des développables de la congruence (d_1) devient

$$h_1^2 du^2 + 4a^2 \alpha\, dv^2 = 0.$$

Interprétée sur la surface (x), cette équation différentielle représente un réseau conjugué.

L'équation différentielle (7) des développables de la congruence (d_{21}) [ou (d_{22})] se réduit à

$$k_1^2\, dv^2 = 0.$$

Les droites d_{21}, d_{22} sont donc respectivement des tangentes asymptotiques des surfaces (ζ_1), (ζ_2).

L'équation (12) se réduit à

$$h_1 \lambda \left[(\xi^{01} + k_1)\mu + 2a\xi\lambda \right] = 0.$$

Pour la solution $\lambda = 0$ de cette équation, l'équation (10) donne $dv = 0$. Pour la solution

$$(\xi^{01} + k_1)\,\mu + 2a\xi\lambda = 0,$$

on obtient $du = 0$. On a, par suite, le théorème suivant de M. Demoulin (*) :

Dans les correspondances entre les surfaces (x), (ζ_1), (ζ_2), *il y a conservation des asymptotiques et la congruence* (d_1) *est une congruence* W.

Le résultat précédent suppose toutefois que $\xi^{01} + k_1$ n'est pas identiquement nul. Observons que l'on a

$$\xi^{01} + k_1 = \frac{k_1}{\xi}\left[\xi + (\log a k_1)^{10}\right],$$

(*) Sur la quadrique de Lie (*loc. cit.*).

Si le premier membre était nul, on aurait $\xi = -(\log ak_1)^{10}$ et

$$V_2 = V_1^{01} + \xi V_1.$$

Par suite,

$$\Omega(V_2, V_2) = \Omega(V_1^{01}, V_1^{01}) + \xi^2 \Omega(V_1, V_1) = 2\alpha\Delta + 2\xi^2\Delta = 0,$$

et V_2 appartiendrait à l'hyperquadrique Q. Mais alors, on aurait

$$\frac{\partial}{\partial v}\, \Omega(V_2, V_2) = 2\Omega(V_2, V_2^{01}) = 0$$

et la droite $V_2^{01} V_2$, c'est-à-dire la droite $V_1 V_2$, serait tangente à l'hyperquadrique Q. Cela entraînerait $\alpha = 0$, contrairement à l'hypothèse.

11. — Nous allons envisager le cas où les droites d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22} sont distinctes. Les droites U_1U_2, V_1V_2 ne sont pas, dans ces conditions, tangentes à l'hyperquadrique Q, et α, β ne sont pas nuls. Nous venons de voir que si α n'est pas nul, il en est de même de la quantité $\xi^{01} + k_1$. Par un raisonnement analogue, on établirait que, β n'étant pas nul, la quantité $\eta^{10} + h_1$ ne peut l'être non plus.

Dans le premier de ses travaux cités plus haut, M. Thomsen a établi que si les développables des congruences (d_{11}), (d_{12}), (d_{21}), (d_{22}) correspondaient à des systèmes conjugués de la surface (x), celle-ci est une surface minima projective. Dans son second travail, il a établi que si les asymptotiques des surfaces (ζ_{11}), (ζ_{12}), (ζ_{21}), (ζ_{22}) correspondaient à celles de la surface (x), celle-ci présentait la même propriété (*). Nous allons établir que les deux conditions données par M. Thomsen pour que (x) soit une surface minima projective sont équivalentes et nous obtiendrons une expression simple de ces conditions.

(*) Il résulte de ce qui précède que si l'un au moins des nombres α, β est nul, la surface (x) est minima projective.

Aux développables de la congruence (d_{11}) ou (d_{12}) correspondent, sur la surface (x), les courbes d'un système donné par l'équation (6). Pour que ce système de courbes soit un réseau conjugué, il faut et il suffit que le terme en $dudv$ disparaisse dans (6), les coefficients de du^2, dv^2 n'étant pas nuls. Cette condition ne peut être obtenue qu'en posant

$$(\log b\eta)^{01} = 0, \tag{17}$$

$a^2\alpha$ et $\eta^{10} + h_1$ ne pouvant être nuls. D'après (16'), (16) et (15), cette condition entraîne

$$a\alpha^{10} + 2\alpha a^{10} = b\beta^{01} + 2\beta b^{01} = 0.$$

Par suite, la relation (17) et la relation

$$(\log a\xi)^{10} = 0 \tag{17'}$$

sont vérifiées par les deux racines η, ξ des équations (3) et (4). Mais alors le système de courbes de la surface (x) représenté par l'équation (7) et qui correspond aux développables des congruences (d_{21}), (d_{22}) est également un réseau conjugué.

Donc, dans les conditions posées (α, β non nuls), *pour que les arêtes du tétraèdre de Demoulin appartenant à la quadrique de Lie engendrent des congruences dont les développables correspondent à des courbes de réseaux de la surface* (x), *il faut et il suffit que l'on ait*

$$a\alpha^{10} + 2\alpha a^{10} = 0, \qquad b\beta^{01} + 2\beta b^{01} = 0, \tag{18}$$

l'une de ces conditions étant la conséquence de l'autre.

On observera que ce théorème s'étend immédiatement au cas où l'une des quantités α, β, au moins, est identiquement nulle.

Recherchons maintenant sous quelles conditions les asymptotiques de l'une des surfaces (ζ_{11}), ..., (ζ_{22}) sont les courbes u et v. Pour cela, il faut que, ξ et η étant des racines déterminées des équations (4), (3), pour une solution λ, μ de l'équation (12), l'équation (10) se réduise à $dv = 0$, et que la solution λ, μ de (12), (10) se réduise à $du = 0$.

Observons tout d'abord que si les relations (18) sont vérifiées, c'est-à-dire si l'on a (17) et (17′) pour les valeurs de ξ, η considérées, les lignes asymptotiques de la surface (ζ) correspondante sont des lignes u, v, à moins que l'on ait

$$\begin{vmatrix} 2a\xi & \xi^{01} + k_1 \\ \eta^{10} + h_1 & 2b\eta \end{vmatrix} = 0, \qquad (19)$$

auquel cas les lignes asymptotiques sont indéterminées.

Supposons maintenant que l'une des quantités $(\log a\xi)^{10}$, $(\log b\eta)^{01}$ et, par suite, l'autre, ne soit pas nulle pour les valeurs de ξ, η considérées. Alors les valeurs de λ, μ vérifiant l'équation

$$(\eta^{10} + h_1)\,\lambda + [2b\eta + \xi\,(\log a\xi)^{10}]\,\mu = 0$$

doivent satisfaire à l'équation (12). Mais on trouve que, dans ces conditions, ces valeurs de λ, μ vérifient également la relation

$$(\xi^{01} + k_1)\,\mu + [2a\xi + \eta\,(\log b\eta)^{01}]\,\lambda = 0.$$

Par suite, les lignes asymptotiques de la surface (ζ) considérée sont indéterminées. Ce cas est caractérisé par la condition

$$\begin{vmatrix} 2a\xi + \eta\,(\log b\eta)^{01} & \xi^{01} + k_1 \\ \eta^{10} + h_1 & 2b\eta + \xi\,(\log a\xi)^{10} \end{vmatrix} \qquad (20)$$

pour les valeurs de ξ, η considérées.

Cela étant, recherchons s'il est possible que les asymptotiques soient indéterminées sur les quatre surfaces (ζ_{11}), ..., (ζ_{22}). Pour cela, il faut que la relation (20) soit vérifiée lorsqu'on remplace ξ, ou η, ou ces deux quantités, par les autres racines des équations (4), (3), c'est-à-dire par $-\xi$, $-\eta$. Cela donne quatre relations d'où l'on déduit aisément

$$\xi^{01} = 0, \qquad \eta^{10},$$

c'est-à-dire

$$(\log ak_1)^{10} = 0, \qquad (\log bh_1)^{01} = 0.$$

On a, dans ces conditions,

$$V_2 = V_1^{10} - (\log ak_1)^{10} V_1 = V_1^{10}.$$

Par suite,

$$\Omega(V_1, V_2) = \Omega(V_1, V_1^{10}) = 0,$$

et les points V_1, V_2 sont conjugués par rapport à Q. De même, les points U_1, U_2 sont conjugués par rapport à Q.

L'hyperplan polaire de U_1 par rapport à Q contient les points U_2, U, V, V_1, V_2, V_3; celui de V_1 contient les points U_3, U_2, U_1, U, V, V_2. Par suite, si R est un des points de rencontre de la droite U_1V_1 avec Q, l'hyperplan polaire de R par rapport à Q contient les points R, U, V, U_2, V_2. Mais le plan RUV appartient tout entier à Q et les points U_2, V_2 ne peuvent appartenir à ce plan. Par suite, l'hyperplan polaire de R rencontre Q suivant une quadrique dégénérée en deux plans dont l'un est UVR et dont l'autre contient U_2, V_2. Mais alors, les points U_2, V_2 appartiennent à Q, contrairement à l'hypothèse (*). Par suite, la relation (20), et à fortiori la relation (19) qui en est un cas particulier, ne peut être satisfaite pour toutes les valeurs de ξ, η. Les asymptotiques des quatre surfaces (ζ_{11}), ..., (ζ_{22}) ne peuvent donc être toutes indéterminées et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Pour que les asymptotiques se correspondent sur les cinq nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface (x), *il faut et il suffit que les relations équivalentes* (18) *soient vérifiées.*

En utilisant les résultats de M. Thomsen et en remarquant que les conditions (18) sont vérifiées si l'une au moins des quantités α, β est nulle, nous pouvons écrire que

Les conditions équivalentes (18) *caractérisent les surfaces minima projectives.*

(*) On pourrait également établir ce point en remarquant que les équations de Laplace satisfaites par les coordonnées des points U_1, V_1 sont à invariants égaux, et en appliquant un théorème de M. Tzitzeica.

La relation (20) peut être satisfaite pour une racine déterminée ξ de (4) et pour une racine déterminée η de (3). Sur la surface (ζ) correspondante, toutes les courbes sont des asymptotiques et cette surface est, par suite, un plan. Les quadriques de Lie de la surface (x) touchent donc un plan fixe.

Liége, 26 septembre 1928.

Marcel HAYEZ, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.