ACADEMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XIV, nos 8-9.
Séance du 4 août 1928, pp. 455-466.

GÉOMÉTRIE. — **Sur les Congruences de M. Goursat et les Surfaces ayant mêmes quadriques de Lie,**

par LUCIEN GODEAUX, professeur à l'Université de Liége.

Dans un travail récent (*), nous avons étudié les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie; nous sommes arrivé aux résultats suivants :

Soient (x), (y) deux surfaces liées par une correspondance telle que les quadriques de Lie de ces surfaces en deux points x, y homologues soient confondues. Deux cas peuvent se présenter :

1° Les droites xy passent par un point fixe et les intersections des plans tangents aux surfaces (x), (y) en des points homologues appartiennent à un plan fixe;

2° Si l'on désigne par p, q les points focaux de la droite xy, par m, n ceux de la droite commune aux plans tangents aux surfaces (x), (y) en deux points homologues, les points p, q, d'une part, les points m, n, d'autre part, déterminent deux suites de Laplace dont la seconde est doublement inscrite dans la première. Les tangentes asymptotiques des surfaces (x), (y) aux points homologues x, y sont respectivement xm, xn et ym, yn.

Il est aisé de voir que la droite mn engendre une congruence de M. Goursat (**).

(*) L. GODEAUX, *Sur les Surfaces ayant mêmes quadriques de Lie.* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1928, pp. 158-186.) Voir aussi sur ce sujet deux notes antérieures de M. DEMOULIN, *Sur la Quadrique de Lie* (C. R., 1908, t. CXLVII, pp. 493-496); *Sur les Surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques.* (C. R., 1924, t. CLXXIX, pp. 20-23.)

(**) Pour la définition de ces congruences, voir les notes de M. TZITZEICA, *Sur certaines Congruences* (C. R., 1926, t. CLXXXII, pp. 952-954); *Sur une nouvelle classe de Congruences.* (IDEM, pp. 1071-1073.)

Dans cette note, nous nous proposons de résoudre les problèmes suivants : Considérons une congruence de M. Goursat et soient m, n les foyers d'une droite de cette congruence, m_1, n_1 les transformés de Laplace de m, n, respectivement distincts de n, m. Dans quelles conditions les réseaux (m_1), (n_1) sont-ils conjugués à la congruence engendrée par la droite $m_1 n_1$? Ces conditions étant supposées réalisées et p, q désignant les foyers de la droite $m_1 n_1$, les points x, y de cette droite partageant harmoniquement les couples p, n_1 et q, m_1, engendrent-ils des surfaces ayant mêmes quadriques de Lie? La réponse est affirmative, comme nous allons le faire voir.

1. Avant d'aborder la résolution des problèmes posés, nous montrerons que si (x), (y) sont deux surfaces ayant mêmes quadriques de Lie, la droite commune aux plans tangents aux surfaces (x), (y) en deux points homologues engendre une congruence de M. Goursat, dans l'hypothèse où elle n'appartient pas à un plan fixe.

Dans notre travail cité plus haut et dans l'hypothèse considérée, nous avons montré que les coordonnées homogènes des points focaux m, n de la droite en question satisfont aux équations (*)

$$2m^{10} + m(\log a)^{10} + 4bn = 0,$$

$$2n^{01} + n(\log b)^{01} + 4am = 0.$$

Multiplions les coordonnées du point m par $\sqrt{a}$, celles de n par $\sqrt{b}$, et posons

$$\overline{m}_i = \sqrt{a}\, m_i, \qquad n_i = \sqrt{b}\, n_i. \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

(*) Si φ est une fonction de u, v, nous posons

$$\varphi^{ik} = \frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial u^i\, \partial v^k}.$$

Les nouvelles coordonnées des points m, n satisfont aux équations

$$\bar{m}^{10} + 2\sqrt{ab}\,\bar{n} = 0, \qquad \bar{n}^{01} + 2\sqrt{ab}\,\bar{m} = 0$$

transformées des précédentes. Ce sont précisément les équations caractéristiques d'une congruence de M. Goursat (*).

2. Considérons maintenant une congruence de M. Goursat. Les coordonnées des points focaux m, n d'une droite de cette congruence satisfont aux équations

$$m^{10} + \alpha n = 0, \qquad n^{01} + \alpha m = 0,$$

et, par suite, aux équations de Laplace

$$m^{11} - m^{10}(\log\alpha)^{01} - \alpha^2 m = 0,$$
$$n^{11} - n^{01}(\log\alpha)^{10} - \alpha^2 n = 0.$$

Posons

$$\alpha_1 = -(\log\alpha)^{11} + \alpha^2, \qquad \alpha_2 = -(\log\alpha\alpha_1)^{11} + \alpha_1, \qquad \ldots,$$

et désignons par m_1, m_2, ... les transformés successifs de Laplace de m dans le sens des v, par n_1, n_2, ... ceux de n dans le sens des u. Nous avons

$$\begin{array}{ll} m^{01} = m_1 + m(\log\alpha)^{01}, & m_1^{10} = \alpha_1 m, \\ m_1^{01} = m_2 + m_1(\log\alpha\alpha_1)^{01}, & m_2^{10} = \alpha_2 m_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ n_1^{01} = \alpha_1 n, & n^{10} = n_1 + n(\log\alpha)^{10}, \\ n_2^{01} = \alpha_2 n_1, & n_1^{10} = n_2 + n_1(\log\alpha\alpha_1)^{10}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

3. La droite $m_1 n_1$ engendre une congruence dont nous désignerons par p, q les foyers. Supposons que les réseaux (m_1), (n_1) soient conjugués à la congruence $(m_1 n_1)$.

Pour fixer les idées, nous supposerons que p est le trans-

(*) TZITZEICA, *loc cit.*

formé de Laplace de q dans le sens des v. Désignons par p_1 le transformé de Laplace de p dans le sens des v, par q_1 celui de q dans le sens des u.

La suite de Laplace $\ldots, m, m_1, m_2, \ldots$ est par hypothèse inscrite dans la suite $\ldots\ q_1, q, p, p_1, \ldots$; donc le point m appartient à la droite $q_1 q$ et le point m_2 à la droite $p p_1$.

De même, la suite de Laplace $\ldots, n_2, n_1, n, \ldots$ est inscrite dans la suite, $\ldots\ q_1, q, p, p_1, \ldots$ et, par suite, le point n_2 appartient à $q_1 q$ et le point n à $p p_1$.

Il résulte de ceci que les points $n_1 n m_1 m_2$, d'une part, les points $n_2 n_1 m m_1$, d'autre part, sont coplanaires. Nous devons donc avoir des relations

$$m_2 = A m_1 + B n_1 + C n, \tag{1}$$
$$n_2 = A_1 m_1 + B_1 n_1 + C_1 m, \tag{2}$$

A, B, ..., C_1 étant des fonctions de u, v.

4. Dérivons la relation (1) par rapport à u. Il vient

$$\left.\begin{aligned} B n_2 + (A^{10} - \alpha_2)\, m_1 + [B\,(\log B\alpha\alpha_1)^{10} + C]\, n_1 & \\ + A\alpha_1 m + C\,(\log C\alpha)^{10} n = 0. & \end{aligned}\right\}$$

Cette relation doit être équivalente à la relation (2); par suite, on a

$$-B = \frac{A^{10} - \alpha_2}{A_1} = \frac{B\,(\log B\alpha\alpha_1)^{10} + C}{B_1} = \frac{A\alpha_1}{C_1}, \tag{3}$$

$$(\log C\alpha)^{10} = 0. \tag{4}$$

En dérivant la relation (2) par rapport à v, on obtient

$$\left.\begin{aligned} A_1 m_2 + [A_1\,(\log A_1\alpha\alpha_1)^{01} + C_1]\, m_1 + (B_1^{01} - \alpha_2)\, n_1 & \\ + B_1\alpha_1 n + C_1\,(\log C_1\alpha)^{01} m = 0. & \end{aligned}\right\}$$

Cette relation devant être équivalente à (1), on a

$$-A_1 = \frac{A_2\,(\log A_1\alpha\alpha_1)^{01} + C_1}{A} = \frac{B_1^{01} - \alpha_2}{B} = \frac{B_1\alpha_1}{C}, \tag{5}$$

$$(\log C_1\alpha)^{01} = 0. \tag{6}$$

Les équations (4) et (6) donnent

$$C\alpha = V, \qquad C_1\alpha = U,$$

V étant une fonction de v seule, U une fonction de u seule. En faisant, dans les équations de départ, des substitutions convenables sur les variables u, v, on peut d'ailleurs supposer, sans restrictions $U = V = 1$. On a donc

$$C = C_1 = \frac{1}{\alpha}.$$

Les équations (3) et (5) donnent alors

$$B = -A\alpha\alpha_1, \qquad A_1 = -B_1\alpha\alpha_1.$$

L'équation obtenue en égalant les second et troisième rapports (3) donne alors

$$(\beta A)^{10} = (\log \alpha\alpha_1)^{11},$$

en posant

$$\beta = \alpha^2\alpha_1^2 - 1.$$

On en déduit

$$\beta A = (\log \alpha\alpha_1)^{01} + V_1, \tag{7}$$

V_1 étant une fonction de v seule.

On a de même

$$\beta B_1 = (\log \alpha\alpha_1)^{10} + U_1, \tag{8}$$

U_1 dépendant de u seule.

Des équations (3) et (5), on déduit encore

$$A^{10} - \alpha_2 = B_1^{01} - a_2 = -A_1 B.$$

Par suite, il existe une fonction θ de u, v telle que

$$A^{10} = \theta^{01}, \qquad B_1 = \theta^{10}.$$

On a encore

$$(\beta A)^{10} = (\beta B)^{01},$$

c'est-à-dire

$$(\alpha\alpha_1)^{01}\theta^{10} - (\alpha\alpha_1)^{10}\theta^{01} = 0.$$

On en conclut que, φ étant une fonction arbitraire d'un argument, on a

$$\theta = \varphi(\alpha\alpha_1).$$

En portant cette valeur de θ dans les équations (7), (8), on en déduit

$$\varphi' = \frac{1}{\alpha\alpha_1\beta}, \qquad U_1 \equiv 0, \qquad V_1 \equiv 0$$

et, par suite,

$$A = \frac{1}{\beta}(\log\alpha\alpha_1)^{01}, \qquad B = \frac{1}{\beta}(\log\alpha\alpha_1)^{10}.$$

Les équations (3) et (5) fournissent enfin une dernière relation

$$A^{10} - \alpha_2 + AB_1\alpha^2\alpha_1^2 = 0;$$

elle se traduit par

$$\alpha^2\alpha_1\left[\beta(\log\alpha\alpha_1)^{11} - (\log\alpha\alpha_1)^{10}(\log\alpha\alpha_1)^{01}\right] = \beta^2, \tag{9}$$

équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire la fonction α de u, v.

5. Les relations (1), (2) s'écrivent actuellement

$$m_2 = \frac{1}{\beta}(m_1 - \alpha\alpha_1 n_1)(\log\alpha\alpha_1)^{01} + \frac{1}{\alpha}n, \tag{10}$$

$$n_2 = \frac{1}{\beta}(n_1 - \alpha\alpha_1 m_1)(\log\alpha\alpha_1)^{10} + \frac{1}{\alpha}m. \tag{11}$$

Le point p étant l'intersection des droites $m_1 n_1$ et $m_2 n$, nous poserons

$$p = m_1 - \alpha\alpha_1 n_1;$$

d'où

$$m_2 = \frac{1}{\beta}(\log\alpha\alpha_1)^{01}p + \frac{1}{\alpha}n.$$

De même, nous poserons

$$q = n_1 - \alpha\alpha_1 m_1;$$

d'où

$$n_2 = \frac{1}{\beta}(\log \alpha\alpha_1)^{10} q + \frac{1}{\alpha} m.$$

On déduit de ces diverses relations

$$\beta p^{10} - 2\alpha\alpha_1 (\alpha\alpha_1)^{10} p - (\alpha\alpha_1)^{10} q = 0,$$
$$\beta q^{01} - 2\alpha\alpha_1 (\alpha\alpha_1)^{01} q - (\alpha\alpha_1)^{01} p = 0.$$

6. Nous allons déterminer, sur la droite m_1, n_1, deux points

$$x = m_1 + \lambda n_1, \qquad y = (m_1 + \mu n_1)\lambda$$

tels que les quaternes $(xypn_1)$, $(xyqm_1)$ soient harmoniques. Les quantités λ, μ sont racines de l'équation

$$\lambda^2 - 2\alpha\alpha_1\lambda + 1 = 0.$$

Nous prendrons

$$\lambda = -\alpha\alpha_1 + \sqrt{\beta}, \qquad \mu = -\alpha\alpha_1 - \sqrt{\beta}.$$

On a, par suite,

$$x = m_1 + \left(\sqrt{\beta} - \alpha\alpha_1\right) n_1 = p + n_1\sqrt{\beta}, \tag{12}$$

$$y = \left(\sqrt{\beta} - \alpha\alpha_1\right) m_1 - \left(\sqrt{\beta} - \alpha\alpha_1\right)\left(\sqrt{\beta} + \alpha\alpha_1\right) n_1 = q + m_1\sqrt{\beta}. \tag{13}$$

Observons que l'on a également

$$\left(\sqrt{\beta} + \alpha\alpha_1\right) x = -q + m_1\sqrt{\beta}, \tag{14}$$

$$\left(\sqrt{\beta} + \alpha\alpha_1\right) y = -p + n_1\sqrt{\beta}. \tag{15}$$

En tenant compte des formules

$$\left(\sqrt{\beta} + \alpha\alpha_1\right)^{10} = \frac{\sqrt{\beta} + \alpha\alpha_1}{\sqrt{\beta}}(\alpha\alpha_1)^{10},$$

$$\left(\sqrt{\beta} + \alpha\alpha_1\right)^{01} = \frac{\sqrt{\beta} + \alpha\alpha_1}{\sqrt{\beta}}(\alpha\alpha_1)^{01},$$

$$\left(\sqrt{\beta} - \alpha\alpha_1\right)^{10} = \frac{\sqrt{\beta} - \alpha\alpha_1}{\sqrt{\beta}}(\alpha\alpha_1)^{10},$$

$$\left(\sqrt{\beta} - \alpha\alpha_1\right)^{01} = \frac{\sqrt{\beta} - \alpha\alpha_1}{\sqrt{\beta}}(\alpha\alpha_1)^{01},$$

on obtient, en dérivant (12) et (15) par rapport à v, (13) et (14) par rapport à u, les relations

$$\left.\begin{aligned} & x^{01} - \frac{1}{2}(\log\beta)^{01}x + \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)n = 0, \\ & x^{10} - \frac{\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)^{10}}{\sqrt{\beta}}x - \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}m = 0, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} & y^{10} - \frac{1}{2}(\log\beta)^{10}y + \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)m = 0, \\ & y^{01} - \frac{\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)^{01}}{\sqrt{\beta}}y - \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}n = 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

On déduit enfin de ces formules (16), (17),

$$\left.\begin{aligned} & x^{20} - \left[\frac{\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)^{10}}{\sqrt{\beta}} + \left(\log\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\right)^{10}\right]x^{10} + \alpha\left(\sqrt{\beta}+\alpha\alpha_1\right)x^{01} \\ & + \left[\begin{aligned} & \frac{\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)^{10}}{\sqrt{\beta}}\left(\log\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\right)^{10} - \left\{\frac{\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)^{10}}{\sqrt{\beta}}\right\}^{10} \\ & - \frac{1}{2}\alpha\left(\sqrt{\beta}+\alpha\alpha_1\right)(\log\beta)^{01} \end{aligned}\right]x = 0, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} & x^{02} - \left[\log\frac{\beta}{\alpha}\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)\right]^{01}x^{01} - \alpha\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)x^{10} \\ & + \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\log\beta)^{01}\left\{\log\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)\right\}^{01} \\ & + \frac{\alpha\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)^{10}}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{2}(\log\beta)^{02} \end{aligned}\right]x = 0, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} & y^{20} - \left[\log\frac{\beta}{\alpha}\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)\right]^{10}y^{10} - \alpha\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)y^{01} \\ & + \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\log\beta)^{10}\left\{\log\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)\right\}^{10} \\ & + \frac{\alpha\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)^{01}}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{2}(\log\beta)^{20} \end{aligned}\right]y = 0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned}
&y^{02} - \left[\frac{(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1)^{01}}{\sqrt{\beta}} + \left(\log\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\right)^{10}\right] y^{01} + \alpha\left(\sqrt{\beta}+\alpha\alpha_1\right) y^{10} \\
&+\left[\begin{aligned}&\frac{(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1)^{01}}{\sqrt{\beta}}\left(\log\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\right)^{01} - \left\{\frac{(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1)^{01}}{\sqrt{\beta}}\right\}^{01} \\ &-\frac{1}{2}\alpha\left(\sqrt{\beta}+\alpha\alpha_1\right)(\log\beta)^{10}\end{aligned}\right] y = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Ces équations montrent que les développables de la congruence $(m_1 n_1)$ découpent sur les surfaces (x), (y) les lignes asymptotiques de ces surfaces. Les équations (16) et (17) montrent de plus que les tangentes aux lignes asymptotiques des surfaces (x), (y) en des points homologues se coupent aux points m et n.

On observera que l'on a

$$\left[\log\frac{\beta}{\alpha}\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)\right]^{10} = \frac{\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1}{\sqrt{\beta}} + \left(\log\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\right)^{10},$$

$$\left[\log\frac{\beta}{\alpha}\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)\right]^{01} = \frac{\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1}{\sqrt{\beta}} + \left(\log\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\right)^{01},$$

c'est-à-dire que les coefficients de x^{10} et y^{10} dans les équations (18) et (20) sont égaux, de même que les coefficients de x^{01}, y^{01} dans les équations (19) et (21).

7. Les coordonnées d'un point quelconque de l'espace peuvent se mettre sous l'une des trois formes

$$\begin{gathered}
x z_1 + m z_2 + n z_3 + y z_4, \\
x z_1' + x^{10} z_2' + x^{01} z_3' + x^{11} z_4', \\
y z_1'' + y^{10} z_2'' + y^{01} z_3'' + y^{11} z_4''.
\end{gathered}$$

On introduit ainsi trois systèmes de coordonnées locales en prenant respectivement pour figures de référence les tétraèdres $xmny$, $xx^{10}x^{01}x^{11}$, $yy^{10}y^{01}y^{11}$. On a d'ailleurs les relations suivantes, où ρ' et ρ'' sont des facteurs de proportionnalité :

$$\left.\begin{aligned}
\rho' z_1 &= \alpha z_1' + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)^{10} z_2' + \frac{\alpha}{2}(\log\beta)^{01} z_3' \\
&\quad + \left[\frac{\alpha}{2}(\log\beta)^{11} + \frac{\alpha}{2}\frac{\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)^{10}}{\sqrt{\beta}}(\log\beta)^{01} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)\right] z_4', \\
\rho' z_2 &= \sqrt{\beta}\, z_2' + \frac{1}{2}\sqrt{\beta}\,(\log\beta)^{01} z_4', \\
\rho' z_3 &= -\sqrt{\beta}\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right) z_3' - \left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)^{10} z_4', \\
\rho' z_4 &= \frac{1}{2} z_4';
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned}
\rho'' z_1 &= \frac{1}{2} z_4'', \\
\rho'' z_2 &= -\sqrt{\beta}\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right) z_2'' - \left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)^{01} z_4'', \\
\rho'' z_3 &= \sqrt{\beta}\, z_3'' + \frac{1}{2}\sqrt{\beta}\,(\log\beta)^{10} z_4'', \\
\rho'' z_4 &= \alpha z_1'' + \frac{\alpha}{2}(\log\beta)^{10} z_2'' + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)^{01} z_3'' \\
&\quad + \left[\frac{\alpha}{2}(\log\beta)^{11} + \frac{\alpha}{2}\frac{\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)^{01}}{\sqrt{\beta}}(\log\beta)^{10} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\beta}-\alpha\alpha_1\right)\right] z_4''.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Observons maintenant que si les surfaces (x), (y) ont même quadrique de Lie en deux points homologues, cette quadrique a nécessairement, par rapport au tétraèdre de référence $xmny$, une équation de la forme

$$z_1 z_4 + \lambda z_2 z_3 = 0. \tag{24}$$

Déterminons λ de manière que, si l'on passe aux coordonnées z' par les formules (22), les termes en $z_2'z_4'$, $z_1'z_4'$ manquent, et que, si l'on passe aux coordonnées z'' par les formules (23), les termes en $z_2''z_4''$, $z_3''z_4''$ manquent. On trouve la même valeur de λ, donnée par

$$\alpha - 2\lambda\beta\left(\sqrt{\beta} - \alpha\alpha_1\right) = 0,$$

et les équations de la quadrique (24) sont respectivement

$$z_1'z_4' - z_2'z_3' + \frac{1}{2}\left[(\log\beta)^{11} - \frac{\sqrt{\beta} - \alpha\alpha_1}{\alpha}\right]z_4'^2 = 0, \tag{25}$$

$$z_1''z_4'' - z_2''z_3'' + \frac{1}{2}\left[(\log\beta)^{11} - \frac{\sqrt{\beta} - \alpha\alpha_1}{\alpha}\right]z_4''^2 = 0. \tag{26}$$

Si nous écrivons les équations (18), (19) sous la forme

$$x^{20} + \psi^{10}x^{10} + bx^{01} + c_1x = 0,$$
$$x^{02} + \psi^{01}x^{10} + ax^{10} + c_2x = 0,$$

on sait que la quadrique de Lie relative au point x a pour équation, par rapport au tétraèdre de référence $xx^{10}x^{01}x^{11}$,

$$z_1'z_4' - z_2'z_3' + \frac{1}{2}\left[(\log\psi)^{11} + ab\right]z_4'^2 = 0.$$

Pour que la quadrique (25) soit la quadrique de Lie attachée au point x à la surface (x), on doit donc avoir

$$\left.\begin{aligned}(\log\beta)^{11} - \frac{\sqrt{\beta} - \alpha\alpha_1}{\alpha} = {} & \left[\log\frac{\beta}{\alpha}\left(\sqrt{\beta} - \alpha\alpha_1\right)\right]^{11} \\ & - \alpha^2\left(\sqrt{\beta} + \alpha\alpha_1\right)\left(\sqrt{\beta} - \alpha\alpha_1\right),\end{aligned}\right\}$$

c'est-à-dire

$$\left[\log\frac{\sqrt{\beta} - \alpha\alpha_1}{\alpha}\right]^{11} + \alpha^2 + \frac{\sqrt{\beta} - \alpha\alpha_1}{\alpha} = 0.$$

Cette relation est une identité en vertu de la condition (9); par suite, la quadrique (25) est la quadrique de Lie relative à la surface (x) au point x et, de même, la quadrique (26) est la quadrique de Lie relative à la surface (y) au point y. Les surfaces (x), (y) ont donc mêmes quadriques de Lie.

En résumé : *Si les coordonnées homogènes de deux points* m, n *satisfont aux équations*

$$m^{10} + \alpha n = 0, \qquad n^{01} + \alpha m = 0,$$

où α *est une solution de l'équation*

$$\alpha^2\alpha_1 [\beta (\log \alpha\alpha_1)^{11} - (\log \alpha\alpha_1)^{10} ((\log \alpha\alpha_1)^{01}] = \beta^2,$$

avec

$$\alpha_1 = -(\log \alpha)^{11} + \alpha^2, \qquad \beta = \alpha^2\alpha_1^2 - 1,$$

la droite $m_1 n_1$, *où*

$$m_1 = m^{01} - m (\log \alpha)^{01}, \qquad n_1 = n^{10} - n (\log \alpha)^{10},$$

engendre une congruence dont les foyers sont

$$p = m_1 - \alpha\alpha_1 n_1, \qquad q = n_1 - \alpha\alpha_1 m_1.$$

Les points x, y *de cette droite, tels que les quaternes* $(x\,y\,p\,n_1)$, $(x\,y\,q\,m_1)$ *soient harmoniques, engendrent deux surfaces ayant mêmes quadriques de Lie.*

Liége, le 7 juin 1928.

Marcel HAYEZ, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.